Eine funktionentheoretische Randwertaufgabe in der Theorie der quasikonformen Abbildungen

REINER KÜHNAU

Communicated by F. W. GEHRING

1. Einleitung. Schon von O. Teichmüller [13, Seite 15, Zeilen 16–20] wurde auf diejenigen Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen $w = w(z)$ hingewiesen, bei denen die übliche Beschränkung $p(z) \leq Q$ ($= \text{const}$) der Dilatation $p(z) \geq 1$ ersetzt wird durch eine ortsabhängige Ungleichung der Form $p(z) \leq p_0(z)$. Dabei ist $p_0(z)$ eine gewisse in dem betreffenden in der z -Ebene vorgegebenen Gebiet fest definierte Ortsfunktion. In [4], [5], [7] (vgl. auch die dort zitierten Arbeiten von C. Andreian Cazacu) wurde gezeigt, daß die Lösung einer großen Klasse von Extremalproblemen dieses Typs ähnlich wie im klassischen Falle $p_0(z) \equiv Q$ durch Angabe eines quadratischen Differentials geometrisch-funktionentheoretisch beschrieben werden kann. Nachdem damit der geometrisch-funktionentheoretische Charakter der Extremalabbildungen bekannt ist, entsteht die Frage nach der analytisch-rechnerischen Gestalt der Extremalfunktionen und der genauen Schranken für das betreffende Funktional. In einer großen Klasse von Fällen, in denen das zugehörige quadratische Differential das Quadrat eines Differentials ersten Grades ist, wurde diese Frage in [7], [5b], [8] und vor allem in [10] behandelt.

Im folgenden soll nun an einem Beispiel ein einfaches Verfahren dargelegt werden, mit dessen Hilfe sich diese Frage nach der analytischen Gestalt der Extremalfunktionen bei beliebigen quadratischen Differentialen behandeln läßt in dem Falle, es wird $p_0(z) \equiv 1$ für $|z| > 1$ und $p_0(z) \equiv Q$ für $|z| < 1$ gesetzt. Das abzubildende Gebiet ist in diesem Falle also die ganze z -Ebene. Wir betrachten also die Klasse $\Sigma(Q)$ = Gesamtheit der stetigen schlichten Abbildungen $w = w(z)$ der ganzen z -Ebene, die für $|z| > 1$ konform und durch $w(z) = z + a_1 z^{-1} + \dots$ hydrodynamisch normiert sind und für $|z| < 1$ Q -quasikonform sind.

Das hier betrachtete Extremalproblem lautet: Man bestimme zu fixiertem z_1 den genauen Wertebereich von $w(z_1)$, d.h. die Vereinigung der Werte $w(z_1)$, wenn $w(z)$ die Klasse $\Sigma(Q)$ durchläuft. Dabei kann man $z_1 > 0$ annehmen, da der Fall $z_1 = 0$ in [7] schon erledigt wurde. Nach [7] ist dieser genaue Wertebereich eine abgeschlossene Kreisscheibe K . Sind m und r der zugehörige Mittelpunkt

bzw. Radius, dann ist noch zu jedem reellen t für genau eine (Extremal-) Abbildung $w_t(z)$ das Funktional $w(z_1) = m + re^{it}$. Bei dieser Abbildung $w_t(z)$ gehen in $|z| < 1$ gelegene infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen mit dem Hauptachsenverhältnis Q über, deren große Achsen auf der Schar derjenigen zu $w_t(z_1)$ konfokalen Parabeln liegen, deren Brennpachse gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi + t$ geneigt ist (also in K im Punkte $w_t(z_1)$ orthogonal einmündet). Unten sollen nun in den §§2–4 die zugehörigen analytischen Ausdrücke explizit bestimmt werden. Dabei wird naturgemäß die Fallunterscheidung $z_1 > 1$, $z_1 = 1$, $0 < z_1 < 1$ notwendig. Die in den Fällen $z_1 > 1$ und $0 < z_1 < 1$ entstehenden Ausdrücke sind leider ziemlich kompliziert. Dabei wirkt sich weiter das Auftreten von Parametern unangenehm aus. Dadurch gewinnen sehr einfache unscharfe Abschätzungen für $w(z_1)$ an Bedeutung, wie sie in [10] unter (24), (25) und (86) angegeben wurden; vgl. auch unten (28).

Es sei noch bemerkt, daß durch die unten gegebene Konstruktion der Funktion $w_t(z)$ zugleich folgende Aufgabe der ebenen Elektrostatik gelöst wird. In ein homogenes elektrostatisches Feld im Vakuum (Dielektrizitätskonstante $= 1$), dessen Feldlinien gegen die positive Richtung der reellen Achse um $t/2$ geneigt sind, werde ein (evtl. aus zwei Teilen bestehender) Körper mit der Dielektrizitätskonstanten Q eingebracht, der sich in einer Z -Ebene als Inneres einer Cassinischen Linie mit den Brennpunkten $\pm iz_1^{1/2}$ darstellt, wobei $i(1 + z_1)^{1/2}$ der Punkt größten Imaginärteils ist. Das etwa wie in [6, §3] gebildete komplexe Potential zu dem entstehenden Feld ist dann (bis auf einen reellen Faktor) $e^{-it/2}(w_t(z_1 + Z^2) - w_t(z_1))^{1/2}$. Dieses Potential ließe sich auch nach der in [12] angegebenen Methode bestimmen. Das wäre jedoch erheblich umständlicher und würde das Potential zunächst auch nur in einer Hilfebene liefern.

2. Der Fall $z_1 > 1$. Wir setzen

$$(1) \quad F(z) = (w_t(z) - w_{1t})^{1/2} \quad \text{mit} \quad w_{1t} = w_t(z_1).$$

Diese Funktion ist für $|z| > 1$ bis auf Ausnahmestellen analytisch, und eindeutig bei Aufschneidung von $|z| > 1$ längs einer von z_1 nach $z = \infty$ verlaufenden Linie. $F(z)$ ist zwar für $|z| < 1$ eindeutig, aber nicht analytisch (außer für $Q = 1$). Jedoch werden die Funktionen

$$(2) \quad \begin{aligned} f(z) &= F(z) + qA\overline{F(z)} \quad \text{für} \quad |z| < 1 \\ G(z) &= \overline{f(1/\bar{z})} \quad \text{für} \quad |z| > 1 \quad \text{bei} \quad q = \frac{Q-1}{Q+1}, \quad A = e^{it} \end{aligned}$$

analytisch und eindeutig. Damit stehen wir vor folgender funktionentheoretischer Randwertaufgabe: Gesucht sind zwei für $|z| > 1$ analytische Funktionen $F(z)$ und $G(z)$, wobei $G(z)$ eindeutig ist für $|z| > 1$ und $F(z)$ im aufgeschnittenen Äußeren $|z| > 1$ und mit einem bekannten Verhalten in dem Ausnahmepunkt z_1 sowie in $z = \infty$. Beide Funktionen sind noch auf $|z| = 1$ stetig und erfüllen dort

$$(3) \quad F(z) + qA \cdot \overline{F(z)} = \overline{G(z)}.$$

(Insbesondere sind F und G noch über $|z| = 1$ hinaus analytisch fortsetzbar, da z.B. die — bis auf Ausnahmepunkte — für $|z| < 1$ analytische Funktion $\overline{G(1/\bar{z})} - qA \cdot \overline{F(1/\bar{z})}$ auf $|z| = 1$ mit F übereinstimmt).

Zur Lösung dieser Randwertaufgabe, deren Schwierigkeit in der Mehrdeutigkeit von F liegt, betrachten wir zunächst die für $|z| > 1$ analytische und eindeutige Hilfsfunktion

$$(4) \quad h(z) = (1 - q^2) \cdot \bar{A}^2 F^2 + G^2.$$

Diese erfüllt offenbar auf $|z| = 1$ wegen (3)

$$(5) \quad h(z) = 2\bar{A} \cdot [\operatorname{Re}(\bar{A}F^2) + q \cdot |F|^2],$$

so daß $(1 - q^2)^{-1}A \cdot h(z) - \bar{A} \cdot (z + A^2 z^{-1})$ auf $|z| = 1$ reell und in $z = \infty$ regulär, mithin eine reelle Konstante C ist. Daraus ergibt sich dann $h(z)$ zu

$$(6) \quad h(z) = (1 - q^2) \cdot [\bar{A}^2 z + C\bar{A} + z^{-1}], \quad C \text{ reell.}$$

Weiter betrachten wir die zweite Hilfsfunktion

$$(7) \quad k(z) = FG' - GF'.$$

Diese erfüllt auf $|z| = 1$, wenn dort $z = e^{is}$ gesetzt wird,

$$(8) \quad z \cdot k(z) = -|w - w_{1i}| \cdot \frac{d}{ds} \arg(w - w_{1i}),$$

so daß k für $|z| = 1$ (zunächst mindestens) zwei verschiedene Nullstellen a und b besitzen muß. $(zk)^2$ ist eindeutig für $|z| > 1$ mit einfachen Polen in $z = z_1$ und $z = \infty$. Damit ist

$$(9) \quad (zk)^2 \cdot \frac{(z - z_1)(1 - z_1 z)}{z} \cdot \frac{-az}{(z - a)^2} \cdot \frac{-bz}{(z - b)^2}$$

für $|z| > 1$ mit Einschluß von $z = \infty$ analytisch, wobei die Funktionswerte auf $|z| = 1$ stets ≥ 0 sind, da dies für jeden der vier Faktoren zutrifft. Die Funktion (9) ist damit eine positive Konstante, woraus sich ergibt

$$(10) \quad z \cdot k(z) = \frac{ic}{(ab)^{1/2}} \frac{(z - a)(z - b)}{(z(z - z_1)(z - z_1^{-1}))^{1/2}}, \quad c \text{ reell.}$$

Schließlich sei

$$(11) \quad H(z) = i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \cdot F + G, \quad K(z) = -i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \cdot F + G.$$

Hieraus errechnet man gemäß (4) und (7)

$$\frac{H'}{H} = \frac{h'}{2h} - i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \cdot \frac{k}{h}, \quad \frac{K'}{K} = \frac{h'}{2h} + i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \cdot \frac{k}{h},$$

$$H = h^{1/2} \cdot \exp \left\{ -i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \int \frac{k}{h} dz \right\},$$

$$K = h^{1/2} \cdot \exp \left\{ i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \int \frac{k}{h} dz \right\}.$$

Nun bekommt man mit diesen Ausdrücken

$$(12) \quad 2i\bar{A}(1 - q^2)^{1/2} \cdot F = H - K = -2ih^{1/2} \cdot \sin \left((1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \int_{z_1}^z \frac{k}{h} dz \right),$$

$$2G = H + K = 2h^{1/2} \cdot \cos \left((1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \int_{z_1}^z \frac{k}{h} dz \right).$$

Mit der Integration kann man dabei bei F — und dann auch bei G — in z_1 beginnen, da F^2 in z_1 von erster Ordnung verschwinden muß und h in z_1 gewißlich nicht verschwindet (da die gegenteilige Annahme unter Benutzung der Ausdrücke (6) und (10) zu einem Widerspruch führt). Dadurch ergibt sich nun endgültig für $|z| \geq 1$

$$(13) \quad w_i(z) = w_{1i} + (z + CA + A^2 z^{-1}) \cdot \sin^2 \left(\frac{A}{(1 - q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{(ab)^{1/2}} \cdot \int_{z_1}^z \frac{(z - a)(z - b)}{(z^2 + CAz + A^2)(z(z - z_1)(z - z_1^{-1}))^{1/2}} dz \right),$$

während für $|z| \leq 1$

$$(14) \quad w_i(z) = w_{1i} + \frac{1}{(1 - q^2)^2} \cdot [f(z) - qA \cdot \overline{f(z)}]^2, \quad f(z) = \overline{G(1/z)},$$

$$G(z) = (1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A}(z + CA + A^2 z^{-1})^{1/2} \cdot \cos(\dots)$$

folgt. Bei der nun folgenden Bestimmung der bei Vorgabe von z_1 , q und A noch unbekannten Konstanten w_{1i} , C , c , a , b (= 6 unbekannte reelle Parameter) gehen wir nach dem *Prinzip* vor: Es werden Bedingungen angeschrieben, die in ihrer Gesamtheit umgekehrt garantieren, daß durch (13), (14) die gewünschte Abbildung tatsächlich vermittelt wird. Dann ist gewährleistet, daß diese Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Konstanten ausreichen (daß diese Bedingungsgleichungen überhaupt lösbar sind, ist von vornherein wegen der vorausgesetzten Existenz der Funktion $w_i(z)$ gesichert).

Wir beginnen mit der Untersuchung der beiden (sicher — wie schon bemerkt — von z_1 verschiedenen) Nullstellen

$$(15) \quad z^*, z^{**} = \frac{1}{2}A(-C \pm (C^2 - 4)^{1/2})$$

von $h(z)$, d.h. von $z^2 + CAz + A^2$. Diese liegen für $|C| > 2$ spiegelbildlich zu $|z| = 1$ (z^* sei dann diejenige Nullstelle in $|z| > 1$), für $|C| = 2$ zusammenfallend auf $|z| = 1$, für $|C| < 2$ getrennt auf $|z| = 1$. Schreibt man im Falle $|C| > 2$ die Entwicklung von (13) um $z = z^*$ an, so ergibt sich als notwendige Bedingung für den Entwicklungstypus $w_i(z) = w_{1i} + w'_i(z^*)(z - z^*) + \dots$ mit

$w_i'(z^*) \neq 0$ mit geeigneten Wurzelzweigen

$$(16) \quad \frac{2}{(1-q^2)^{1/2}} \cdot \frac{c}{(ab)^{1/2}} \cdot \frac{(z^* - a)(z^* - b)}{(C^2 - 4)^{1/2}(z^*(z^* - z_1)(z^* - z_1^{-1}))^{1/2}} = 1.$$

Diese Bedingung muß auch noch für $|C| = 2$ gelten und auch für $|C| < 2$, im letzteren Falle jedoch auch in $z = z^{**}$ — die entsprechende Relation werde dann mit (16') bezeichnet (in (16) und (16') sind die linken Seiten dann stets reell von vornherein).

Die Bedingung, daß (13) und (14) für $|z| = 1$ übereinstimmen, liefert weiter

$$(17) \quad q = \pm \cos \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{2A}{(1-q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{(ab)^{1/2}} \cdot \int_{z_1}^{|z|=1} \right] \right\}.$$

Dabei kann man wegen der Eigenschaften des Integranden (= Integrand von (13)) bis zu irgendeinem Punkte auf $|z| = 1$ integrieren, in dem Ah d.h. $2 \operatorname{Re}(\bar{A}z) + C$ positiv (dann steht in (17) das Zeichen "+") bzw. negativ ist (dann steht in (17) "-").

Da $w_i(z)$ zum Ausgangswert zurückkehren muß, wenn z einmal $|z| = 1$ durchläuft, ergibt sich weiter aus (13) mit gleichem Integranden

$$(18) \quad \frac{A}{(1-q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{(ab)^{1/2}} \cdot \oint_{|z|=1} = n\pi \quad (n \text{ ganz})$$

(man beachte, daß sich (18) wegen des Verhaltens des Integranden auf $|z| = 1$ als eine reelle Gleichung schreiben läßt). Im Falle $|C| \leq 2$ sind die — evtl. zusammenfallenden — Nullstellen z^* und z^{**} etwa in $|z| > 1$ durch kleine Kreisbögen zu umgehen. Für n erhält man z.B. noch im Falle $|C| > 2$ den Wert $n = 0$, da die linke Seite von (18) wegen des Verhaltens des Integranden verschwindenden Realteil besitzt.

Sind die bisher angeschriebenen Bedingungen (16), (17), (18) erfüllt, dann ist gewährleistet, daß durch (13), (14) eine stetige schlichte Abbildung der Vollebene auf sich mit $\infty \rightarrow \infty$ vermittelt wird mit allen verlangten Eigenschaften, wenn noch w_i , so gewählt wird, daß in $z = \infty$ die Normierung vorliegt. Dazu entwickelt man (13) um $z = \infty$ und erhält

$$w_i(z) = w_{i\infty} + (z + CA + A^2 z^{-1}) \cdot \sin^2 \left(\frac{A}{(1-q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{(ab)^{1/2}} \cdot \frac{2}{z^{1/2}} (1 + \langle(0)\rangle) + \text{const} \right).$$

Hier ist $\text{const} = m\pi/2$ ($m = \pm 1, \pm 3, \dots$) wegen der Eindeutigkeit in Umgebung von $z = \infty$ und wegen $\sin^2(\text{const}) = 1$. Daher folgt

$$(19) \quad w_i(z) = w_{i\infty} + z + CA + 4 \frac{A^2}{1-q^2} \cdot \frac{c^2}{ab} + \langle(0)\rangle,$$

$$w_{i\infty} = -CA - 4 \frac{A^2}{1-q^2} \cdot \frac{c^2}{ab}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 1. *Bezüglich der Gesamtheit aller Abbildungen $w(z) \in \Sigma(Q)$ ist der genaue Wertebereich der Punkte $w(z_1)$ bei fixiertem $z_1 > 1$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, die durch*

$$(20) \quad |w(z_1) - \tfrac{1}{2}(w_{10} + w_{1\pi})| \leq \tfrac{1}{2}(w_{10} - w_{1\pi})$$

charakterisiert wird. Dabei ist genau für die durch (13), (14) mit den Nebenbedingungen (16), (17), (18), (19) (eindeutig) charakterisierte Abbildung $w(z_1) = \tfrac{1}{2}(w_{10} + w_{1\pi}) + \tfrac{1}{2}(w_{10} - w_{1\pi})e^{it}$.

Bemerkungen. 1.) Eine wenn auch unscharfe, so doch wesentlich einfachere Abschätzung für den Wertebereich von $w(z_1)$ wird unten unter (28) angegeben (vgl. auch Bemerkung 2. in §3).

2.) Im Grenzfalle $Q \rightarrow \infty$ wurde die (20) entsprechende Ungleichung für die Klasse Σ von Golusin (vgl. [1, Seite 129], [3, Seite 97]) angegeben. Jedoch liegt nicht so ohne weiteres auf der Hand, daß (20) für $Q \rightarrow \infty$ in diese Golusinsche Ungleichung übergeht, wie es ja sein muß nach den Grenzübergangsprinzipien in [7, Seite 5]. Übrigens ist auch (im Gegensatz zu dem Golusinschen Grenzfalle bei der Klasse Σ) nicht so unmittelbar zu erkennen, daß w_1 , in der bekannten Weise auf einer Kreislinie marschiert, wenn t variiert.

3.) Wie in [1, Seite 132 ff.] erhält man aus Satz 1 durch lineare Transformation auch zu fixiertem z aus $|z| > 1$ den genauen Wertebereich des Funktionals $z \cdot w''(z)/w'(z)$ bei den Abbildungen aus $\Sigma(Q)$. Damit läßt sich wie in [1] die (von Q abhängende) Rundungsschranke bei den Abbildungen von $\Sigma(Q)$ bestimmen. Wegen der bei der Diskussion der anfallenden elliptischen Integrale entstehenden Weitläufigkeiten soll hier jedoch keine weitere Behandlung dieser Frage erfolgen. Abschätzungen dieser Rundungsschranke werden in [11] angegeben.

4.) Da sich nachträglich ergibt, daß a und b einzige Nullstellen von $k(z)$ sind, erhält man aus (8) über die geometrische Gestalt des Bildes von $|z| = 1$ bei den Extremalfunktionen $w_i(z)$ von Satz 1 die Aussage: Genau zwei der von $w_i(z_1)$ ausgehenden Strahlen berühren dieses Bild.

5.) Für die numerische Berechnung der in (20) vorkommenden Hilfsgrößen ist noch die Bemerkung nützlich, daß für $t = 0$ und $t = \pi$ stets $b = \bar{a}$ und daß h keine Nullstelle auf $|z| = 1$ besitzen kann, wie sich geometrisch aus (5) ergibt. Also ist dann stets $|C| > 2$. In (15), (16), (17) liegen dann drei reelle Bestimmungsgleichungen für $\operatorname{Re} a$, c und z^* bzw. C vor. Aus diesen ergibt sich zunächst leicht eine Bestimmungsgleichung für C , und anschließend lassen sich dann $\operatorname{Re} a$ und c anschreiben.

3. Der Fall $z_1 = 1$. Durch entsprechende Rechnungen wie in §2 ergibt sich zunächst wieder (12). Jetzt verschwindet h nach (5) für $z = 1$, d.h. es folgt aus (6) $\bar{A}^2 + C\bar{A} + 1 = 0$ oder

$$(21) \quad C = -2 \cos t, \quad z^* = 1, \quad z^{**} = A^2.$$

Weiter muß eine der Stellen a , b , z.B. a mit $z_1 = 1$ übereinstimmen: $a = 1$.

Ist speziell $A^2 = 1$, folgt überdies aus gleichem Grunde noch $b = 1$. Für $A^2 \neq 1$ folgt weiter bei analoger Betrachtung von (12) in Umgebung von $z^{**} = A^2$ mit geeigneten Wurzelzweigen

$$(22) \quad \frac{2c(b - A^2)}{(1 - q^2)^{1/2} \cdot b^{1/2} \cdot (1 - A^2)} = 1.$$

Wir haben nun zunächst für $|z| \geq 1$

$$(23) \quad \begin{aligned} w_i(z) &= w_{1i} + (z - 1)(z - A^2)z^{-1} \\ &\quad \cdot \sin^2 \left(\frac{A}{(1 - q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{b^{1/2}} \cdot \int^* \frac{z - b}{(z - 1)(z - A^2)z^{1/2}} dz \right) \\ &= w_{1i} + (z - 1)(z - A^2)z^{-1} \\ &\quad \times \sin^2 \left(\frac{A}{(1 - q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{b^{1/2}} \cdot \left[\frac{1 - b}{1 - A^2} \log \frac{z^{1/2} - 1}{z^{1/2} + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{b - A^2}{A(1 - A^2)} \log \frac{z^{1/2} - A}{z^{1/2} + A} \right] + \text{const} \right) \\ &= w_{1i} + (z - 1)(z - A^2)z^{-1} \\ &\quad \cdot \mathfrak{Cos}^2 \left(\frac{A}{2} \cdot \frac{1 - b}{b - A^2} \log \frac{z^{1/2} - 1}{z^{1/2} + 1} + \frac{1}{2} \log \frac{z^{1/2} - A}{z^{1/2} + A} \right) \end{aligned}$$

(die Integrationskonstante const bestimmt sich zunächst wegen der Eindeutigkeit um $z = \infty$, falls die Logarithmen in $z = \infty$ verschwinden, zu $\text{const} = n\pi/2$, wobei $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ zu setzen ist wegen $\sin^2(\text{const}) = 1$). Entsprechend ergibt sich für $|z| \leq 1$ wieder (14), wobei dort nur

$$G(z) = i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A} \cdot ((z - 1)(z - A^2)z^{-1})^{1/2} \cdot \mathfrak{Sin}(\dots)$$

zu setzen ist (in $\mathfrak{Sin}$ ist das Gleiche einzusetzen wie bei $\mathfrak{Cos}$ in (23)). Die Übereinstimmung der beiden gefundenen Ausdrücke längs $|z| = 1$ liefert analog zu (17)

$$\begin{aligned} q &= \pm \cos \text{Re} \left[iA \frac{1 - b}{b - A^2} \log \frac{z^{1/2} - 1}{z^{1/2} + 1} + i \log \frac{z^{1/2} - A}{z^{1/2} + A} + \pi \right]_{|z|=1} \\ &= \cos \left(A \frac{1 - b}{b - A^2} \cdot \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \cos \left[(1 - A) \left(1 + A \frac{1 + A}{b - A^2} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \right], \\ A \cdot \frac{1 + A}{b - A^2} &= \frac{2}{\pi} \frac{\arccos q + l\pi}{1 - A} - 1 \quad (l \text{ ganz}). \end{aligned}$$

Nach (19) ergibt sich damit wegen (22)

$$w_{1i} = 2i \cdot \cos t - (2\pi^{-1} \cdot \arccos q + 2l - 1 + A)^2.$$

In Anbetracht des Spezialfalles $q = 0$ ergibt sich hier $l = 0$ und damit

$$w_{1t} = 2\pi^{-1}(2 - 2\pi^{-1} \arccos q) \cdot \arccos q + 2 \cdot (1 - 2\pi^{-1} \arccos q) \cdot A.$$

Wir erhalten also folgendes Ergebnis.

Satz 2. *Bezüglich der Gesamtheit aller Abbildungen $w(z) \in \Sigma(Q)$ ist der genaue Wertebereich der Punkte $w(1)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, die durch*

$$(24) \quad |w(1) - 1 + 4\pi^{-2} \arcsin^2 q| \leq 4\pi^{-1} \cdot \arcsin q$$

mit $q = (Q - 1)/(Q + 1)$ charakterisiert wird. Dabei ist genau dann

$$w(1) = 1 - 4\pi^{-2} \arcsin^2 q + 4\pi^{-1}(\arcsin q)e^{it},$$

wenn mit diesem Ausdruck $w(1)$ die Abbildung

$$(25) \quad \begin{aligned} w(z) &= w(1) + (z - 1)(z - A^2)z^{-1} \\ &\times \cos^2 \left(\frac{1}{2} \log \frac{z^{1/2} - A}{z^{1/2} + A} - \frac{1}{\pi} (\arcsin q) \log \frac{z^{1/2} - 1}{z^{1/2} + 1} \right) \quad \text{für } |z| \geq 1, \\ w(z) &= w(1) + (1 - q^2)^{-2} [\overline{G(1/z)} - qA \cdot G(1/\bar{z})]^2 \quad \text{für } |z| \leq 1 \\ &\text{mit } G(z) = i(1 - q^2)^{1/2} \cdot \bar{A}(z - 1 - A^2 + A^2 z^{-1})^{1/2} \sin(\dots) \end{aligned}$$

vorliegt, wobei $\sin$ und $\cos$ von den gleichen Werten zu bilden sind. Bei dieser Abbildung gehen innerhalb $|z| < 1$ gelegene infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen mit dem Achsenverhältnis Q über, deren große Achsen auf den zu $w(1)$ konfokalen Parabeln liegen, deren Brennpunkte gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi + t$ ($A = e^{it}$) geneigt ist.

Folgerung 1. *Bei jeder Abbildung $w(z) \in \Sigma(Q)$ liegt das Bild von $|z| = 1$ ganz in*

$$(26) \quad |w| \leq 2 - 4\pi^{-2} \arccos^2 q.$$

Dabei gehört jeder Randpunkt der durch (26) definierten Kreisscheibe nur bei jeweils genau einer Abbildung zu diesem Bild. Im Falle des Randpunktes $w = 2 - 4\pi^{-2} \arccos^2 q$ z.B. ist dies die durch (25) mit $A = 1$ definierte Abbildung.

Ferner umschlingt für $Q < (1 + \sin[(2^{1/2} - 1)\pi/2]) / (1 - \sin[(2^{1/2} - 1)\pi/2]) = 4,07 \dots$ das Bild von $|z| = 1$ stets $w = 0$ (jedoch nicht immer für größere Q -Werte) und liegt genauer in

$$(27) \quad |w| \geq 2 - (1 + 2\pi^{-1} \arcsin q)^2$$

mit noch leicht angebbaren Extremalfunktionen.

Im Grenzfalle $Q \rightarrow \infty$, d.h. $q \rightarrow 1$ ergibt sich aus (26) ein klassischer Satz.

Durch Anwendung des Maximumprinzips auf die für $|z| > 1$ mit Einschluß von $z = \infty$ reguläre Funktion $z \cdot [w(z) - z]$ ergibt sich aus (24) weiter

Folgerung 2. *Bei jeder Abbildung $w(z) \in \Sigma(Q)$ gilt für $|z| \geq 1$ stets*

$$(28) \quad |w(z) - z| \leq |z|^{-1} \cdot 4\pi^{-1} (1 + \pi^{-1} \arcsin q) \cdot \arcsin q.$$

Bemerkungen. 1.) Man kann noch leicht anhand von (25) die geometrische Gestalt des Bildes von $|z| = 1$ diskutieren. Diese Bildkurve ist z.B. für $A = 1$ tropfenförmig und besitzt in $w(1)$ eine Ecke mit dem Innenwinkel $2 \arccos q$.

2.) Zu (28) verwandte Abschätzungen des Wertebereichs von $w(z_1)$ bei in $|z| > 1$ fixiertem z_1 wurden in [10] unter (24), (25), (86) angegeben.

3.) Nach Satz 2 ist der genaue Wertebereich von $w(1)$ für jedes (endliche) Q eine abgeschlossene Kreisscheibe. Dagegen ist im Grenzfalle $Q \rightarrow \infty$, wenn dann also die Abbildungsklasse Σ vorliegt, der genaue Wertebereich von $w(1)$ nach [2, §11] eine offene Kreisscheibe unter Hinzunahme nur eines einzigen Punktes. Dieses Grenzübergangsphänomen tritt natürlich allgemein bei Wertannahmeproblemen auf.

4.) Nach Folgerung 1 liegt für hinreichend kleine Q das Bild von $|z| = 1$ in einem beliebig schmalen Kreisring. Jedoch ist es keineswegs so, daß für hinreichend kleine Q dieses Bild sternförmig oder gar konvex ist, wie folgendes Beispiel lehrt. Wird nämlich die komplexe Dilatation κ innerhalb eines $|z| = 1$ einbeschriebenen Dreiecks konstant angesetzt mit $Q = (1 + |\kappa|)/(1 - |\kappa|)$ und außerhalb desselben $\equiv 0$, so erhält man eine Abbildung $\varepsilon \Sigma(Q)$. Bei dieser gehen nach [9, §5] bei Erfülltsein einer gewissen Bedingung bezüglich $\arg \kappa$ die in einer Dreiecksecke einlaufenden Bögen von $|z| = 1$ in Kurven über, die das Bild der Ecke unendlich oft spiralförmig umlaufen.

4. Der Fall $0 < z_1 < 1$. Es werden wieder die gleichen Hilfsfunktionen wie in §2 betrachtet. Abermals ergibt sich $h(z)$ zu (6), wobei jetzt stets $|C| < 2$ ist, da — wie sich aus (5) geometrisch ergibt — (zunächst mindestens) zwei Nullstellen von h auf $|z| = 1$ existieren. Weiter ergibt sich $k(z)$ aus

$$(29) \quad z \cdot k(z) = \frac{ic}{B} \cdot \frac{B^2 z^2 + C'Bz + 1}{(z(z - z_1)(z - z_1^{-1}))^{1/2}}, \quad c, C' \text{ reell}, \quad |B| = 1.$$

Für die Abbildungsfunktion $w_i(z)$ folgt damit für $|z| \geq 1$

$$(30) \quad w_i(z) = w_{1i} + (z + CA + A^2 z^{-1}) \times \sin^2 \left(\frac{A}{(1 - q^2)^{1/2}} \cdot \frac{ic}{B} \cdot \int^z \frac{B^2 z^2 + C'Bz + 1}{(z^2 + CAz + A^2)(z(z - z_1)(z - z_1^{-1}))^{1/2}} dz \right),$$

während für $|z| \leq 1$ ein zu (14) analoger Ausdruck gilt, wobei in (14) nur bei $\cos$ das Gleiche wie in $\sin$ in (30) einzusetzen ist. Für die Bestimmung der unbekannten Parameter gilt Gleiches wie in §2. Es folgt damit ein analoger Satz wie in §2.

LITERATUR

- [1] G. M. GOLUSIN, *Geometrische Funktionentheorie*, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russ.).
- [2] H. GRÖTZSCH, *Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche*, Ber. d. Math.-phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, **83** (1931), 254–279.
- [3] J. A. JENKINS, *Univalent functions and conformal mappings*, *Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb.*, Neue Folge, Heft 18, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.

- [4] R. KÜHNAU, *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung*, Wiss. Z.d. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe, **13** (1964), 35–40.
- [5] ———, *Einige Extremalprobleme bei differentialgeometrischen und quasikonformen Abbildungen*, Math. Z., **94** (1966), 178–192 und **107** (1968), 307–318.
- [6] ———, *Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien*, J. reine angew. Math., **231** (1968), 101–113.
- [7] ———, *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, Math. Nachr., **40** (1969), 1–11.
- [8] ———, *Bemerkungen zu den GRUNSKYschen Gebieten*, Math. Nachr., **44** (1970), 285–293.
- [9] ———, *Triangulierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit ganz-linearen Bezugssubstitutionen und quasikonforme Abbildungen mit stückweise konstanter komplexer Dilatation*, Math. Nachr., **46** (1970), 243–261.
- [10] ———, *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom GRUNSKYschen Typ für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr., **48** (1971), 77–105.
- [11] ———, *Weitere elementare Bemerkungen zur Theorie der konformen und quasikonformen Abbildungen*, Math. Nachr., (im Druck).
- [12] N. V. LAMBIN, *Lösung einiger Randwertaufgaben durch die Spiegelungsmethode*, Prikl. mat. meh., **14** (1950), 611–618 [Russ.].
- [13] O. TEICHMÜLLER, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math.-nat. Klasse, Jg. 1939, No. 22 (1940) 1–197.

Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg,
Sektion Mathematik
Halle an der Saale

Date communicated: FEBRUARY 25, 1971