Über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Hammerstein'schen Gleichung in Banachräumen

HERBERT AMANN

Communicated by H. LEWY

1. EINLEITUNG

Es sei X ein reeller Banachraum mit Dualraum X^* , und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne die natürliche Bilinearform auf $X^* \times X$. Ferner sei Y ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Die Räume (X, Y, X^*) sind *in normaler Lage*, wenn

- (1.1) (i) $X^* \subset Y \subset X$ algebraisch und topologisch,
 (ii) $\langle u^*, u \rangle = (u^*, u) \quad \forall u^* \in X^*, \quad \forall u \in Y$

gilt, und wenn Y ein dichter linearer Teilraum von X ist. Für jedes $p \in [1, 2]$ sind zum Beispiel die Räume $(L_p(0, 1), L_2(0, 1), L_q(0, 1))$ $q = p(p-1)^{-1}$, in normaler Lage; ebenso bilden gewisse Orlicz- sowie andere Banach'sche Funktionenräume Beispiele für Räume in normaler Lage [2].

Ein linearer Operator $K : X \rightarrow X^*$ heisst *accretiv*, wenn

$$\langle Ku, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X$$

ist, und ein accretiver Operator ist *winkelbeschränkt*, wenn ein $\gamma \geq 0$ existiert, derart dass

$$(1.2) \quad |\langle Ku, v \rangle - \langle Kv, u \rangle| \leq \gamma \langle Ku, u \rangle^{1/2} \langle Kv, v \rangle^{1/2} \quad \forall u, v \in X$$

gilt. Der Operator K ist genau dann winkelbeschränkt, wenn der numerische Wertebereich seiner Komplexifizierung in einem Sektor der Gestalt

$$(1.3) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \leq \alpha < \pi/2\}$$

enthalten ist [1].

Ein nichtlinearer Operator $F : X^* \rightarrow X$ ist *hemistetig*, wenn F stetig ist von Geradenabschnitten in die schwache Topologie von X .

In einer früheren Arbeit haben wir den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die *Hammerstein'sche Gleichung*

$$(1.4) \quad u + KF(u) = 0$$

bewiesen [2, Satz 5].

Satz 1. *Die Räume (X, Y, X^*) seien in normaler Lage, und $K : X \rightarrow X^*$ sei ein winkelbeschränkter Operator. Die Abbildung $F : X^* \rightarrow X$ sei hemistetig und genüge der Ungleichung*

$$\langle u - v, F(u) - F(v) \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X^*.$$

Dann besitzt die Hammerstein'sche Gleichung genau eine Lösung.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, aufbauend auf Satz 1, die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (1.4) für eine grössere Klasse linearer Operatoren zu beweisen. Dazu nennen wir einen stetigen linearen Operator $K : X \rightarrow X^*$ *quasiaccretiv*, wenn

$$\mu_K := \inf_{\substack{u \in X \\ Ku \neq 0}} \frac{\langle Ku, u \rangle}{\|Ku\|_Y^2} > -\infty$$

ist, und ein quasiaccretiver Operator heisst *quasiwinkelbeschränkt*, wenn reelle Zahlen $\nu < \mu_K$ und $\gamma \geq 0$ existieren, derart dass für alle $u, v \in X$

$$(1.5) \quad |\langle Ku, v \rangle - \langle Kv, u \rangle| \leq \gamma [\langle Ku, u \rangle - \nu \|Ku\|_Y^2]^{1/2} [\langle Kv, v \rangle - \nu \|Kv\|_Y^2]^{1/2}$$

gilt. Ein injektiver stetiger linearer Operator K ist genau dann quasiwinkelbeschränkt, wenn der numerische Wertebereich der Komplexifizierung von K^{-1} in einem Sektor der Gestalt

$$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg(\zeta - \nu)| \leq \alpha < \pi/2\}$$

enthalten ist (vgl. §2.3).

Da jeder winkelbeschränkte Operator $K : X \rightarrow X^*$ stetig ist [2], ist er auch quasiwinkelbeschränkt. Somit stellt der folgende *Existenz- und Eindeutigkeitssatz*, der im ersten Teil dieser Arbeit bewiesen wird, eine Verallgemeinerung von Satz 1 dar.

Satz 2. *Die Räume (X, Y, X^*) seien in normaler Lage, und der stetige lineare Operator $K : X \rightarrow X^*$ sei quasiwinkelbeschränkt. Die Abbildung $F : X^* \rightarrow X$ sei hemistetig, und es existiere ein $\lambda < \mu_K$ mit*

$$\langle u - v, F(u) - F(v) \rangle \geq -\lambda \|u - v\|_Y^2 \quad \forall u, v \in X^*.$$

Dann besitzt die Hammerstein'sche Gleichung genau eine Lösung.

Dieser Existenzsatz erhält seine Abrundung durch Kriterien für die Quasiwinkelbeschränktheit eines linearen Operators. So ist zum Beispiel jeder Integraloperator im Raum $L_2(\Omega)$ quasiwinkelbeschränkt, dessen Kern von der Green'schen Funktion eines gleichmässig elliptischen Dirichlet'schen Randwertproblems gebildet wird. Dem Beweis dieser Tatsache, sowie der Herleitung anderer Kriterien ist der zweite Teil dieser Arbeit gewidmet.

Satz 2 steht in engem Zusammenhang mit einem Satz, den Kolodner [5] für die Hammerstein'sche Gleichung im Hilbertraum bewiesen hat. Kolodner fordert von K nur die Quasiaccretivität (für die Äquivalenz der Definitionen vgl. §2.2), muss jedoch voraussetzen, dass F beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet. Dies ist eine sehr einschneidende Voraussetzung, welche die Anwendbarkeit seines Existenzsatzes stark einschränkt. Aus diesem Grunde stellt Kolodner die Frage (open question), unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an K auf die Beschränktheit von F verzichtet werden kann. Satz 2 stellt eine mögliche Antwort auf diese Frage dar.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass bei geeigneter Interpretation alle Resultate auch im Falle komplexer Banachräume ihre Gültigkeit behalten. In diesem Falle ist unter X^* der Antidualraum von X zu verstehen, die Winkelbeschränktheit ist mit Hilfe des numerischen Wertebereichs zu definieren, und in Ungleichungen ist $\langle Ku, u \rangle$ durch $\operatorname{Re} \langle Ku, u \rangle$ zu ersetzen, u.s.w.

2. DER BEWEIS DES EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZES

2.1 Bezeichnungen. Es seien X_1 und X_2 zwei reelle Banachräume. Dann ist $B(X_1, X_2)[B(X_1) = B(X_1, X_1)]$ der Banachraum aller stetigen linearen Operatoren K mit Definitionsbereich $D(K) = X_1$, Wertebereich $R(K) \subset X_2$ und Nullraum $N(K)$.

Im Folgenden sollen die Räume (X, Y, X^*) stets in normaler Lage sein. Für jedes $K \in B(X, X^*)$ existiert der duale Operator $K' \in B(X^{**}, X^*)$, und wir bezeichnen mit $K^* \in B(X, X^*)$ die Restriktion von K' auf X . Wegen (1.1.i) können wir die Restriktion von K auf Y auch als Abbildung von Y in sich auffassen, und diesen Operator bezeichnen wir mit $\hat{K}$. Aus $K \in B(X, X^*)$ folgt dann $\hat{K} \in B(Y)$. Aus (1.1.ii) ergibt sich für die Hilbertraumadjungierte $(\hat{K})^*$ von $\hat{K}$ die Beziehung $(\hat{K})^* = \hat{K}^*$; diesen Operator nennen wir $\hat{K}^*$.

Für eine beliebige Teilmenge $M \subset Y$ sind $\bar{M}$ die Abschliessung und $M^\perp$ das Orthogonalkomplement von M in Y !

Im Produktraum $Y \times Y$ kann durch die Definition

$$\zeta w = \{\xi u - \eta v, \xi v + \eta u\} \quad \forall \zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C}, \quad \forall w = (u, v) \in Y \times Y$$

eine Skalarmultiplikation definiert werden, wodurch man einen komplexen linearen Raum Y_c erhält, dessen Elemente in der Form $w = u + iv$ dargestellt werden können. Mit dem Skalarprodukt

$$(2.1) \quad (w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) + i((v_1, u_2) - (u_1, v_2))$$

für alle $w_k = u_k + iv_k \in Y_c$, $k = 1, 2$, wird Y_c ein Hilbertraum—die Komplexfizierung von Y .

Für jeden linearen Operator $A : D(A) \rightarrow Y$ mit $D(A) \subset Y$ wird die Komplexfizierung A° von A durch

$$A^\circ w = Au + iAv \quad \forall w \in D(A^\circ) = \{w = u + iv \mid u, v \in D(A)\} \subset Y_c$$

definiert. Mit $\sigma(A)$ bzw. $\rho(A)$ bezeichnen wir das Spektrum bzw. die Resolventenmenge der Komplexifizierung von A ! Diese Bezeichnungsweise ist zulässig, da $\lambda \in R_1$ genau dann zur Resolventenmenge von A gehört, wenn $\lambda \in \rho(A)$ ist.

2.2 Quasiaccretive Operatoren. Aus der Definition der Quasiaccretivität folgt, dass der Operator $K \in B(X, X^*)$ genau dann quasiaccretiv ist, wenn

$$L_\lambda = K - \lambda K^*K$$

für ein $\lambda \in R_1$ accretiv ist, und es gilt:

$$\mu_K = \sup \{ \lambda \in R_1 \mid L_\lambda \text{ accretiv} \}.$$

Lemma 1. *Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv. Dann ist $N(K) \subset N(K^*)$.*

Beweis. Es sei $\lambda < \mu_K$. Dann gilt für alle $u \in X$

$$\langle L_\lambda u, u \rangle = \langle Ku, u \rangle - \lambda \|Ku\|_Y^2 \geq (\mu_K - \lambda) \|Ku\|_Y^2,$$

woraus $N(K) = N(L_\lambda)$ folgt. Da L_λ accretiv ist, gilt $N(L_\lambda) = N(L_\lambda^*)$ [2, Lemma 2.4], also $N(K) = N(L_\lambda^*)$. Folglich ist für jedes $u \in X$ mit $Ku = 0$ auch $K^*u = K^*u - \lambda K^*Ku = L_\lambda^*u = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Lemma 2. *Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv, und es sei $\lambda < \mu_K$. Dann gilt*

- (i) $I - \lambda \hat{K}$ ist injektiv ($I = \text{Identität in } Y$);
- (ii) $R(I - \lambda \hat{K}) = Y$.

Beweis. a) Es sei $\hat{K}$ injektiv. Der Operator $\hat{K}^{-1} - \mu_K I$ ist accretiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} ((\hat{K}^{-1} - \mu_K I)u, u) &= (\hat{K}^{-1}u, u) - \mu_K \|u\|_Y^2 = (\hat{K}v, v) - \mu_K \|\hat{K}v\|_Y^2 \\ &= \langle Kv, v \rangle - \mu_K \|Kv\|_Y^2 \geq 0 \quad \forall u = \hat{K}v, v \in Y. \end{aligned}$$

Wegen $\hat{K} \in B(Y)$ ist $\hat{K}^{-1} - \mu_K I$ abgeschlossen und maximal accretiv (d.h. es existiert keine accretive Erweiterung von $\hat{K}^{-1} - \mu_K I$). Nach einem Satz von Phillips [6, Lemma 1.1.3] ist dann $\hat{K}^{-1} - \mu_K I$ (und somit $\hat{K}^{-1}$) dicht definiert. Für jedes $\lambda < \mu_K$ ist $\hat{K}^{-1} - \lambda I$ injektiv und $R(\hat{K}^{-1} - \lambda I) = Y$ [6, Corollary p. 201]. Wegen $\hat{K}^{-1} - \lambda I = (I - \lambda \hat{K})\hat{K}^{-1}$ ist auch $I - \lambda \hat{K}$ injektiv und $R(I - \lambda \hat{K}) \supset R(\hat{K}^{-1} - \lambda I) = Y$, womit in diesem Fall die Behauptung bewiesen ist.

b) Es sei nun $N(\hat{K}) \neq \{0\}$. Nach Lemma 1 gilt dann $N(\hat{K}) \subset N(\hat{K}^*) = R(\hat{K})^\perp$, und hieraus folgt $R(\hat{K}) \subset N(\hat{K})^\perp = Y_1$. Nun betrachten wir die Orthogonalzerlegung $Y = N(K) \oplus Y_1$. Wegen $(I - \lambda \hat{K})Y_1 \subset Y_1$ können wir auf $(I - \lambda \hat{K})|_{Y_1}$ die Ergebnisse von Abschnitt a) anwenden. Da sich $I - \lambda \hat{K}$ auf $N(\hat{K})$ zur Identität reduziert, folgt die Behauptung. Q.E.D.

Korollar 1. *Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv. Dann ist $\lambda^{-1} \in \rho(\hat{K})$ für jedes $\lambda < \mu_K$, $\lambda \neq 0$.*

Lemma 3. Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv, und es sei $\lambda < \mu_K$. Dann gilt

- (i) $K_\lambda = (I - \lambda \hat{K})^{-1} K \in B(X, X^*)$;
- (ii) K_λ ist accretiv.

Beweis. (i) Wegen $K \in B(X, X^*)$ gilt $K \in B(X, Y)$, und somit $K_\lambda \in B(X, Y)$. Andererseits gilt für jedes $v = K_\lambda u$, $u \in X$,

$$v = Ku + \lambda \hat{K}v \in R(K),$$

woraus $R(K_\lambda) \subset X^*$ folgt. Es sei nun $\{u_n\}$ eine Folge mit $u_n \rightarrow 0$ in X und $K_\lambda u_n \rightarrow v$ in X^* . Wegen $K_\lambda \in B(X, Y)$ gilt $K_\lambda u_n \rightarrow 0$ in Y , und aus der stetigen Einbettung von X^* in Y folgt $v = 0$. Somit ist K_λ abschliessbar, und wegen $D(K_\lambda) = X$ folgt die Behauptung (i) aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

(ii) Für alle $u \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \langle K_\lambda u, u \rangle &= \langle (I - \lambda \hat{K})^{-1} \hat{K}u, u \rangle = \langle \hat{K}(I - \lambda \hat{K})^{-1}u, u \rangle \\ (2.2) \quad &= \langle \hat{K}v, (I - \lambda \hat{K})v \rangle = \langle Kv, v \rangle - \lambda \|Kv\|_Y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

mit $v = (I - \lambda \hat{K})^{-1}u$. Nun folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von K_λ und aufgrund der Tatsache, dass Y dicht in X ist. Q.E.D.

Korollar 2. Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv. Dann ist $N(K) = N(K^*)$.

Beweis. Es sei $\lambda < \mu_K$, $\lambda \neq 0$. Mit $\hat{K}_\lambda$ ist auch $\hat{K}_\lambda^*$ accretiv, und aus Korollar 1 folgt $\lambda^{-1} \in \rho(\hat{K}^*)$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \langle \hat{K}_\lambda^* u, u \rangle &= \langle \hat{K}^*(I - \lambda \hat{K}^*)^{-1}u, u \rangle = \langle \hat{K}^*v, v \rangle - \lambda \|\hat{K}^*v\|_Y^2 \\ &= \langle (K^* - \lambda K K^*)v, v \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $v = (I - \lambda \hat{K}^*)^{-1}u \in Y$. Somit ist—aufgrund der Stetigkeit von K und da Y dicht in X ist—der Operator $M_\lambda^* = K^* - \lambda K K^*$ accretiv. Nun folgt genau wie im Beweis von Lemma 1 $N(K^*) = N(M_\lambda^*) = N(M_\lambda) \subset N(K)$, woraus zusammen mit Lemma 1 die Behauptung folgt. Q.E.D.

Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv. Dann folgt aus Korollar 1 und Lemma 3 die Gültigkeit der folgenden Bedingung:

- (2.3) Es existiert ein $\mu_K \in \mathbf{R}_1$, derart dass für alle $\lambda < \mu_K$, $\lambda \neq 0$,
die Zahl λ^{-1} zur Resolvente von $\hat{K}$ gehört und K_λ accretiv ist.

Umgekehrt folgt aus (2.3) aufgrund von (2.2), dass $K \in B(X, X^*)$ quasiaccretiv ist. Im Falle eines Hilbertraumes ($X = Y = X^*$) ist (2.3) genau die Voraussetzung, die Kolodner an den linearen Operator K stellt [5, Hypothesis H_1].

2.3 Quasiwinkelbeschränkte Operatoren. Aus der Definition (1.5) folgt, dass der quasiaccretive Operator $K \in B(X, X^*)$ genau dann quasiwinkelbe-

schränkt ist, wenn ein $\lambda < \mu_K$ existiert, derart dass L_λ winkelbeschränkt ist. Das folgende Lemma zeigt, dass dann L_λ sogar für alle $\lambda < \mu_K$ winkelbeschränkt ist.

Lemma 4. *Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) K ist quasiwinkelbeschränkt;
- (ii) L_λ ist für jedes $\lambda < \mu_K$ winkelbeschränkt;
- (iii) K_λ ist für jedes $\lambda < \mu_K$ winkelbeschränkt.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Winkel—bzw. Quasiwinkelbeschränktheit.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Da K quasiwinkelbeschränkt ist, existiert ein $\nu < \mu_K$, derart dass L_ν winkelbeschränkt ist. Wegen

$$\langle L_\lambda u, u \rangle = \langle L_\nu u, u \rangle + (\nu - \lambda) \|Ku\|_Y^2 \quad \forall u \in X$$

folgt aus (1.5) sofort, dass L_λ für jedes $\lambda \leq \nu$ winkelbeschränkt ist. Es genügt also zu zeigen, dass L_λ für jedes $\lambda \in (\nu, \mu_K)$ winkelbeschränkt ist. Wegen $K \in B(X, X^*)$, und da Y dicht in X ist, können wir uns auf die Betrachtung von $\hat{L}_\lambda$ beschränken, und da es offensichtlich genügt, die Ungleichung (1.5) auf $N(\hat{K})^\perp$ nachzuweisen, können wir—aufgrund von Lemma 1—ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\hat{K}$ als injektiv voraussetzen.

Im Folgenden seien A bzw. B_λ die Komplexifizierungen von $\hat{K}$ bzw. $\hat{L}_\lambda$. Aus (1.2) und (2.1) folgt, dass $\hat{L}_\lambda$ genau dann winkelbeschränkt ist, wenn der numerische Wertebereich von B_λ

$$W(B_\lambda) = \{(B_\lambda w, w) \mid w \in Y_e, \quad \|w\|_{Y_e} = 1\}$$

in einem Sektor der Gestalt (1.3) enthalten ist. Denn aus (1.2) folgt zusammen mit (2.1)

$$|\operatorname{Im} (B_\lambda w, w)| \leq \frac{\gamma}{2} \operatorname{Re} (B_\lambda w, w) \quad \forall w \in Y_e,$$

und diese Ungleichung impliziert wiederum (1.2). Wegen

$$\frac{(B_\lambda w, w)}{\|w\|_{Y_e}^2} = \frac{\|Aw\|_{Y_e}^2}{\|w\|_{Y_e}^2} \left(\frac{(Aw, w)}{\|Aw\|_{Y_e}^2} - \lambda \right) = \frac{\|z\|_{Y_e}^2}{\|A^{-1}z\|_{Y_e}^2} \left(\frac{(z, A^{-1}z)}{\|z\|_{Y_e}^2} - \lambda \right)$$

für alle $z = Aw, w \in Y_e, w \neq 0$, ist somit $\hat{L}_\lambda$ genau dann winkelbeschränkt, wenn

$$(2.4) \quad W(A^{-1}) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg (\zeta - \lambda)| \leq \alpha(\lambda) < \pi/2\}$$

ist. Nach Voraussetzung existiert ein $\alpha(\nu) \in [0, \pi/2)$, derart dass

$$(2.5) \quad W(A^{-1}) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg (\zeta - \nu)| \leq \alpha(\nu)\}$$

ist, und da $\hat{K}$ quasiaccretiv ist, gilt

$$(2.6) \quad W(A^{-1}) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} (\zeta - \mu_K) \geq 0\}.$$

Aus (2.5) und (2.6) folgt nun für jedes $\lambda \in (\nu, \mu_K)$ die Existenz eines $\alpha(\lambda) \in [0, \pi/2)$, derart dass (2.4) gilt, womit die Winkelbeschränktheit von $\hat{L}_\lambda$ für jedes $\lambda < \mu_K$ bewiesen ist.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Für alle $u, v \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle K_\lambda u, v \rangle - \langle K_\lambda v, u \rangle| &= |(\hat{K}_\lambda u, v) - (\hat{K}_\lambda v, u)| \\ &= |(\hat{K}(I - \lambda \hat{K})^{-1}u, v) - (\hat{K}(I - \lambda \hat{K})^{-1}v, u)| = |(\hat{K}x, y) - (\hat{K}y, x)| \\ &\leq \gamma(\hat{L}_\lambda x, x)^{1/2}(\hat{L}_\lambda y, y)^{1/2} = \gamma(\hat{K}x, (I - \lambda \hat{K})x)^{1/2}(\hat{K}y, (I - \lambda \hat{K})y)^{1/2} \\ &= \gamma\langle K_\lambda u, u \rangle^{1/2}\langle K_\lambda v, v \rangle^{1/2} \end{aligned}$$

mit $x = (I - \lambda \hat{K})^{-1}u$, $y = (I - \lambda \hat{K})^{-1}v$ falls $\hat{L}_\lambda$ oder $\hat{K}_\lambda$ winkelbeschränkt sind. Hieraus folgt die Äquivalenz von (ii) und (iii) aufgrund der Stetigkeit von K_λ und L_λ , und da Y dicht in X ist. Q.E.D.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen.

Beweis von Satz 2. Durch Addition und Subtraktion von $\lambda K u$ und anschließende Multiplikation mit $(I - \lambda \hat{K})^{-1}$ erhalten wir die zu (1.4) äquivalente Gleichung

$$u + K_\lambda F_\lambda(u) = 0$$

mit $F_\lambda(u) = F(u) + \lambda u$, $\forall u \in X^*$. Der Operator K_λ ist winkelbeschränkt, F_λ ist hemistetig, und es gilt

$$\langle u - v, F_\lambda(u) - F_\lambda(v) \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X^*.$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 1.

Q.E.D.

3. KRITERIEN FÜR DIE QUASIWINKELBESCHRÄNKTHEIT

3.1 Allgemeine Operatoren. Für einen beliebigen Operator $K \in B(X, X^*)$ bezeichnen wir im Folgenden mit $S = (K + K^*)/2$ den symmetrischen und mit $A = (K - K^*)/2$ den antisymmetrischen Anteil. Dann gilt der folgende

Satz 3. Der Operator $K \in B(X, X^*)$ sei quasiaccretiv, und es gelte

$$R(\hat{A}) \subset R(\hat{S}).$$

Dann ist K quasiwinkelbeschränkt.

Beweis. Es sei $\lambda < \mu_K$, $\lambda \neq 0$. Nach Lemma 4(ii) ist zu zeigen, dass L_λ winkelbeschränkt ist. Nach [2, Satz 6] ist hierfür die Gültigkeit der Inklusion

$$(3.1) \quad R(\hat{A}) \subset R(\hat{S} - \lambda \hat{K}^* \hat{K})$$

hinreichend.

Aus $R(\hat{A}) \subset R(\hat{S})$ folgt $N(\hat{A}) \supset N(\hat{S})$ und $R(\hat{K}^*) = R(\hat{S} - \hat{A}) \subset R(\hat{S})$, also auch $R(\hat{S} - \lambda \hat{K}^* \hat{K}) \subset R(\hat{S})$. Wenn wir nun die Orthogonalzerlegung $Y =$

$N(\hat{S}) \oplus Y_1$ betrachten, können wir uns folglich darauf beschränken, die Inklusion auf dem Hilbertraum Y_1 nachzuweisen, d.h. wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\hat{S}$ als injektiv voraussetzen.

Es existiere also $\hat{S}^{-1}$. Der Operator $T = \hat{S}^{-1}\hat{K}^*$ ist auf ganz Y definiert, und aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt $T \in B(Y)$. Es sei nun $G = I - \lambda T\hat{K}$ und $u \in R(G)^\perp$. Dann ist $u \in N(G^*)$, d.h. $u = \lambda\hat{K}^*T^*u$, und somit $u \in R(\hat{K}^*) \subset R(\hat{S})$. Aus $\hat{K}\hat{S}^{-1} \subset T^*$ folgt nun $u = \lambda\hat{K}^*\hat{K}\hat{S}^{-1}u$, oder mit $v = \hat{S}^{-1}u$

$$(3.2) \quad \hat{S}v - \lambda\hat{K}^*\hat{K}v = 0.$$

Hieraus erhalten wir durch Skalarmultiplikation mit v die Ungleichung

$$0 = (\hat{L}_\lambda v, v) \geq (\mu_K - \lambda) \|\hat{K}v\|_Y^2,$$

also $\hat{K}v = 0$. Dann ist nach (3.2) auch $\hat{S}v = 0$, also $v = 0$, und somit gilt $\overline{R(G)} = Y$. Folglich gehört λ^{-1} nicht zum Residualspektrum von $T\hat{K}$.

Wir nehmen nun an, λ^{-1} gehöre zum approximativen Punktspektrum von $T\hat{K}$. Dann existiert eine Folge $\{u_n\}$ mit $\|u_n\|_Y = 1$, derart dass

$$(3.3) \quad (I - \lambda T\hat{K})u_n \rightarrow 0$$

gilt. Dann konvergiert auch $(\hat{S} - \lambda\hat{K}^*\hat{K})u_n \rightarrow 0$, und hieraus folgt durch Skalarmultiplikation

$$(\mu_K - \lambda) \|\hat{K}u_n\|_Y^2 \leq (\hat{L}_\lambda u_n, u_n) \rightarrow 0,$$

also $\hat{K}u_n \rightarrow 0$. Dann konvergiert auch $T\hat{K}u_n \rightarrow 0$, und aus (3.3) folgt $u_n \rightarrow 0$, im Widerspruch zu $\|u_n\|_Y = 1$.

Es gehört also λ^{-1} zur Resolventenmenge von $T\hat{K}$. Hieraus folgt insbesondere $R(I - \lambda T\hat{K}) = Y$ und somit

$$R(\hat{S} - \lambda\hat{K}^*\hat{K}) = R(\hat{S}(I - \lambda T\hat{K})) = R(\hat{S}).$$

Folglich ist die Inklusion (3.1) richtig, womit der Satz bewiesen ist.

3.2. Normale Operatoren. Ein Operator $K \in B(X, X^*)$ heisst *normal*, falls $KK^* = K^*K$ gilt. Da Y dicht in X ist, ist $K \in B(X, X^*)$ genau dann normal, wenn $\hat{K}$ (im üblichen Sinne) normal ist. Im Falle eines normalen Operators K gibt der folgende Satz eine vollständige Charakterisierung der Quasiwinkelbeschränktheit mit Hilfe des Spektrums $\sigma(\hat{K})$.

Satz 4. Es sei $K \in B(X, X^*)$, und für jedes $\lambda \in \mathbf{R}_1$ werde $f_\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$f_\lambda(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - \lambda\zeta} \quad \forall \zeta \in \mathbf{C}, \lambda\zeta \neq 1,$$

definiert. Notwendig für die Quasiwinkelbeschränktheit von K sind die Existenz eines $\mu \in \mathbf{R}_1$ und eines $\alpha \in [0, \pi/2)$, derart dass für jedes $\lambda < \mu$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad \lambda^{-1} \in \rho(\hat{K}), \\ & \text{(ii)} \quad f_\lambda(\sigma(\hat{K})) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg \zeta| \leq \alpha\} \end{aligned}$$

gilt. Ist K normal, so ist die Bedingung (3.4) auch hinreichend.

Beweis. Für jedes $\lambda \in \rho(\hat{K})$ ist f_λ eine holomorphe Funktion in einer Umgebung des Spektrums $\sigma(\hat{K})$ der Komplexifizierung von $\hat{K}$. Folglich wird durch den Dunford'schen Funktionalkalkül [4] der Operator $f_\lambda(\hat{K}^e)$ definiert, und hierfür gilt $f_\lambda(\hat{K}^e) = \hat{K}_\lambda^e (= \text{Komplexifizierung von } \hat{K}_\lambda)$.

Es sei K quasiwinkelbeschränkt. Dann folgt aus Korollar 1 die Existenz eines $\mu \in \mathbb{R}_1$, derart dass $\lambda^{-1} \in \rho(\hat{K})$ für alle $\lambda < \mu$ gilt und K_λ winkelbeschränkt ist. Folglich gilt für den numerischen Wertebereich von $\hat{K}_\lambda^e$ die Inklusion

$$(3.5) \quad W(\hat{K}_\lambda^e) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg \zeta| \leq \alpha\}$$

mit einem geeigneten $\alpha \in [0, \pi/2)$. Da die abgeschlossene Hülle des numerischen Wertebereichs das Spektrum enthält [3], gilt

$$(3.6) \quad \sigma(\hat{K}_\lambda) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg \zeta| \leq \alpha\}.$$

Aus dem Spektralabbildungssatz [4] folgt $\sigma(\hat{K}_\lambda) = f_\lambda(\sigma(\hat{K}))$, womit die Notwendigkeit der Bedingung (3.4) bewiesen ist.

Es sei nun K normal, und die Bedingung (3.4) sei erfüllt. Mit $\hat{K}$ ist auch $\hat{K}_\lambda^e$ normal, und aus dem Spektralabbildungssatz und (3.4ii) folgt die Gültigkeit von (3.6). Da für einen normalen Operator der abgeschlossene numerische Wertebereich mit der konvexen Hülle des Spektrums übereinstimmt [7], folgt aus (3.6) die Relation (3.5). Somit ist $\hat{K}_\lambda$ winkelbeschränkt, und da Y in X dicht ist, hat auch K_λ diese Eigenschaft. Folglich ist K_λ insbesondere accretiv, und somit—vgl. (2.3)— K quasiaccretiv. Nun folgt die Quasiwinkelbeschränktheit von K aus Lemma 4. Q.E.D.

Die Bedingung (3.4) ist offensichtlich für jeden Operator K hinreichend, der die Eigenschaft besitzt, dass die konvexe Hülle des Spektrums $\sigma(\hat{K})$ mit dem abgeschlossenen numerischen Wertebereich von $\hat{K}^e$ übereinstimmt. Ferner ist μ_K gleich dem Supremum aller μ , für welche die Bedingung (3.4) erfüllt ist.

Als Anwendung von Satz 4 erhält man zum Beispiel, dass jeder normale Operator $K \in B(X, X^*)$ mit

$$\sigma(\hat{K}) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta \leq \delta < 0\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg \zeta| \leq \alpha < \pi/2\}$$

quasiwinkelbeschränkt ist, wobei noch $\mu_K \geq \delta^{-1}$ gilt.

Ersetzt man in (3.4) die Inklusion (ii) durch

$$f_\lambda(\sigma(\hat{K})) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta \geq 0\},$$

so erhält man ein analoges Kriterium für die Quasiaccretivität eines Operators. Kombination mit Satz 3 ergibt dann wieder ein Kriterium für die Quasiwinkelbeschränktheit. So ist zum Beispiel jeder normale Operator $K \in B(X, X^*)$, für den

- (i) $\sigma(\hat{K}) \subset \{\zeta \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} \zeta \leq \delta < 0\} \cup \{\zeta \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} \zeta \geq 0\}$
- (ii) $R(\hat{A}) \subset R(\hat{S})$

gilt, quasiwinkelbeschränkt, und es ist wieder $\mu_K \geq \delta^{-1}$.

3.3. Elliptische Randwertprobleme. Zum Schluss wollen wir die in der Einleitung behauptete Quasiwinkelbeschränktheit der Green'schen Funktion beweisen.

Es sei

$$\sum_{|\nu|, |\mu| \leq m} D^\nu a_{\nu\mu}(x) D^\mu$$

ein in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}_N$ gleichmässig elliptischer Differentialoperator, für dessen Dirichletform $a(u, v)$ die Gårding'sche Ungleichung gilt, d.h. es existieren Konstanten $\beta, \delta > 0, \mu \geq 0$, derart dass für alle $u, v \in \dot{W}_2^m(\Omega)$

- (i) $a(u, u) \geq \delta \|u\|_{\dot{W}_2^m(\Omega)}^2 - \mu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$,
- (ii) $|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_{\dot{W}_2^m(\Omega)} \|v\|_{\dot{W}_2^m(\Omega)}$

gilt (vgl. [1]). Hieraus folgt

$$(3.7) \quad |a(u, v) - a(v, u)| \leq 2\beta\delta^{-1}b_\mu(u)^{1/2}b_\mu(v)^{1/2} \quad \forall u, v \in \dot{W}_2^m(\Omega)$$

mit $b_\mu(u) = a(u, u) + \mu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$.

Wir bezeichnen nun mit L den durch

$$(Lu, v)_{L_2(\Omega)} = a(u, v)$$

definierten maximalen Operator $L : D(L) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ mit dem Definitionsbereich $D(L) = \{u \in \dot{W}_2^m(\Omega) \mid |a(u, v)| \leq \gamma(u) \|v\|_{L_2(\Omega)}, \gamma(u) < \infty, \forall v \in \dot{W}_2^m(\Omega)\} \subset L_2(\Omega)$ und nehmen an, es existiere $K = L^{-1}$, und es sei $K \in B(L_2(\Omega))$. Dann folgt aus (3.7) für alle $u, v \in D(L)$

$$(3.8) \quad |(Lu, v) - (Lv, u)| \leq 2\beta\delta^{-1}((L + \mu I)u, u)^{1/2}((L + \mu I)v, v)^{1/2}$$

mit $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$. Da der Operator $L + \mu I$ maximal accretiv, abgeschlossen und injektiv ist, gilt $-\lambda \in \rho(L)$ für jedes $\lambda \geq \mu$ (vgl. den Beweis von Lemma 2), also $-\lambda^{-1} \in \rho(K)$. Für jedes λ mit $\lambda \leq -\mu$ erhalten wir aus (3.8) mit $x = (L - \lambda I)u = (K^{-1} - \lambda I)u = K_\lambda^{-1}u, y = K_\lambda^{-1}v$ die Ungleichung

$$|(K_\lambda x, y) - (K_\lambda y, x)| \leq 2\beta\delta^{-1}(K_\lambda x, x)^{1/2}(K_\lambda y, y)^{1/2}.$$

Hieraus erhalten wir schliesslich die Quasiwinkelbeschränktheit von K und ausserdem die Abschätzung $\mu_K \geq -\mu$. Dieser Sachverhalt impliziert die Quasiwinkelbeschränktheit der Green'schen Funktion, falls sie existiert.

LITERATUR

- [1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand Comp., Inc., Princeton, New Jersey, 1965.

- [2] H. AMÜNN, Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Hammerstein'sche Gleichung in Banachräumen, erscheint nemnächst.
- [3] S. K. BERBERIAN, The numerical range of a normal operator, *Duke Math. J.*, **31** (1964) 479–483.
- [4] N. DUNFORD & J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Part I, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [5] I. I. KOLODNER, Equations of Hammerstein type in Hilbert spaces, *J. Math. Mech.*, **13** (1964) 701–750.
- [6] R. S. PHILLIPS, Dissipative operators and hyperbolic systems of differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959) 193–254.
- [7] M. H. STONE, *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol. XV, New York, 1932.

Institut für Angewandte Mathematick
Albert-ludwigs-Universität
Date communicated: DECEMBER 8, 1968