Problèmes aux Limites Discontinus dans la Théorie des Fonctions Analytiques

W. POGORZELSKI

Mémoire transmis par A. ZYGMUND

1. Introduction. Les problèmes aux limites de la théorie des fonctions analytiques consistent en la détermination d'un système de fonctions holomorphes dans un ensemble de domaines, dont les valeurs limites aux frontières vérifient les relations données. Les problèmes connus de Riemann et de Hilbert sont de cette espèce.

Le problème aux limites de la théorie des fonctions analytiques est dit *discontinu*, si les fonctions limites admettent des points de discontinuités sur les frontières des domaines. Les problèmes aux limites discontinus étaient étudiés pour la première fois par N. I. MUSKHELISHVILI (voir sa belle monographie [1], p. 251).

Dans ce travail nous allons étudier quelques problèmes aux limites discontinus, linéaires et non-linéaires, sous les hypothèses plus générales concernant les fonctions limites et les lignes de frontière.

2. Classes de fonctions discontinues définies sur un système d'arcs. Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble $L = \sum_{i=1}^m l_i$ de points, composé d'un nombre fini des arcs simples $l_1, l_2, \dots, l_m$. Les extrémités c_i de ces arcs peuvent appartenir à un seul arc, ou bien peuvent être communes aux plusieurs arcs différents. Une partie de l'ensemble de ces arcs peut former aussi un réseau des courbes fermées. Enfin nous remarquons que les arcs donnés peuvent former quelques ensembles disjoints. En tout cas aucun couple des arcs l_i n'a des points intérieurs communs.

Rangeons d'une façon arbitraire les extrémités des arcs donnés en une suite de points différents $c_1, c_2, \dots, c_p$. Nous supposons que tous les arcs donnés l_α ont les tangentes continues en tout point intérieur et les tangentes unilatérales aux extrémités c_i (limite des tangentes intérieures). Les points $c_1, c_2, \dots, c_p$ sont donc soit les points anguleux, soit les points de rebroussement, soit les points multiples, soit les simples extrémités des lignes formées par les arcs donnés (voir la figure).

Nous donnerons une définition d'une classe de fonctions complexes, dis-

continues sur l'ensemble L , qui est une généralisation de la définition donnée dans le travail [2].

Définition 1. Nous appelons classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ un ensemble de toutes les fonctions complexes $\varphi(t)$, définies en tout point t de l'ensemble L , différent des points de discontinuités $c_1, c_2, \dots, c_n$, qui vérifient les inégalités suivantes:

$$(1) \quad |\varphi(t)| < \frac{\text{const.}}{\prod_{v=1}^n |t - c_v|^\alpha},$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \frac{\text{const.} |t - t_1|^\mu}{[|t - c_v| |t_1 - c_{v'}|]^{\alpha+\mu}}$$

pour tout couple de points t, t_1 situés à l'intérieur d'un même arc arbitraire $l_i = c_v c_{v'}$, le point t_1 étant situé sur l'arc $tc_{v'}$. On admet que les paramètres réels α et μ , fixés pour la classe donnée, vérifient les inégalités

$$(2) \quad 0 \leq \alpha < 1; \quad 0 < \mu < 1; \quad \alpha + \mu < 1;$$

les constantes dans les numérateurs des expressions (1) prennent toutes les valeurs positives.

Définition 2. On appelle classe $\mathfrak{S}$ un ensemble de toutes les fonctions des classes $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, qu'on obtient en variant les paramètres α et μ conformément aux inégalités (2).

Fixons maintenant sur tout arc l_i une direction positive d'une façon in-

dividuelle arbitraire, indépendamment l'une de l'autre. Même si un groupe des arcs formait une courbe fermée, il n'est pas nécessaire que les directions des arcs sur cette courbe soient en accord avec une direction de circulation sur cette courbe (voir la figure).

Considérons maintenant l'intégrale du type de Cauchy

$$(3) \quad \Phi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} = \sum_{\nu=1}^m \int_{l_\nu} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

étendue à l'ensemble des arcs dirigés l_ν , où $\varphi(\tau)$ est une fonction donnée appartenant à la classe $\mathfrak{S}$. L'intégrale (3) a le sens ordinaire en tout point z non situé sur L et présente une fonction $\Phi(z)$ holomorphe *séparément* soit dans les domaines bornés $S_1, S_2, S_3, \dots$, limités par les courbes fermés du réseau L , soit dans un domaine non borné S_{ext} situé à l'extérieur des arcs l_i . Nous remarquons que les domaines bornés $S_1, S_2, \dots$ peuvent n'exister pas, mais le domaine non borné S_{ext} existe toujours. En tenant compte des inégalités (1), nous voyons que la fonction $\Phi(z)$ vérifie une condition de Hölder, avec le coefficient borné, en tout arc fermé situé à l'intérieur d'un arc arbitraire l_i . Il en résulte, d'après les formules connues de PLEMELJ (voir [1]), que la fonction (3) a les valeurs limites $\Phi^*(t)$ en tout point t d'un arc arbitraire l_i , différent des extrémités, données par les formules

$$(4) \quad \Phi^*(t) = \pm \pi i \varphi(t) + \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

l'intégrale singulière ayant le sens de la valeur principale de Cauchy. Les signes $\pm$ concernent les deux côtés de l'arc l_i , qui sont tellement disposés par rapport à la direction positive de cet arc, comme les demi-plans, supérieur et inférieur, de la variable complexe par rapport à la direction positive de l'axe réel. Nous signalons que la distinction des deux côtés, positif et négatif, de tout arc l_i est liée strictement avec son direction et présente une propriété individuelle de l'arc l_i , indépendante des autres arcs.

En remarquant que l'intégrale du type de Cauchy, étendue au système L des arcs l_i , est égale à la somme des intégrales de ce type étendues aux arcs l_i , nous en concluons que toutes les propriétés des fonctions particulières $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, exprimées dans les théorèmes 1, 2, 3, 4 du notre travail [2], sont aussi vraies pour les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ dans le cas actuel, plus général. Nous présenterons d'abord deux de ces théorèmes.

Théorème 1. *La classe de fonctions $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, définies sur L , est un sous-ensemble de la classe $\mathfrak{S}_{\alpha_1}^{\mu_1}$, si $\alpha_1 \geq \alpha$, $\mu_1 \leq \mu$.*

La démonstration, assez facile, est analogue à celle donnée dans notre travail [2] ou [4].

Théorème 2. *Si la fonction $\varphi(\tau)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, alors la fonction $\psi(t)$, définie par l'intégrale singulière de Cauchy*

$$(5) \quad \psi(t) = \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

en tout point $t \in L$ différent des extrémités c_ν , appartient à la même classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ si $\alpha > 0$, et à la classe $\mathfrak{S}_\epsilon^\mu$ si $\alpha = 0$, ϵ étant une constante positive arbitrairement petite.

La preuve, assez difficile, est analogue à celle donnée dans notre travail [3] (voir [6]).

Définition 3. Nous appelons classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ un ensemble de toutes les fonctions $\varphi(\tau)$ de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, qui sont bornées aux voisinages de points de discontinuité distingués $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ ($0 \leq q \leq p$) parmi les points $c_1, c_2, \dots, c_p$, notamment qui vérifient les inégalités

$$(6) \quad |\varphi(t)| < \frac{\text{const.}}{\prod_{\nu=1}^p |t - c_\nu|^{\theta_\nu \alpha}},$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \frac{\text{const.} |t - t_1|^\mu}{|t - c_\nu|^{\theta_\nu \alpha + \mu} |t_1 - c_{\nu'}|^{\theta_{\nu'} \alpha + \mu}}$$

à l'intérieur de tout arc $c_\nu c_{\nu'}$ composant de L ; on a $\theta_\nu = 0$, si $\nu = k_1, \dots, k_q$, et $\theta_\nu = 1$ dans le cas $\nu \neq k_1, \dots, k_q$; $\theta_{\nu'}$ admet des valeurs analogues relativement à $c_{\nu'}$.

Nous signalons que la fonction $\varphi(t)$ n'a pas nécessairement les limites aux points distingués $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$. Nous traiterons la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ comme la classe du type précédent, si l'ensemble $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ est vide.

On a les théorèmes suivants.

Théorème 3. Si la fonction $\varphi(\tau)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, alors la fonction

$$(7) \quad \psi(t) = \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\prod_{\nu=1}^p (\tau - c_\nu)^{\gamma_\nu} (\tau - t)},$$

définie en tout point $t \in L$, différent de c_ν , appartient à la classe $\mathfrak{S}_\rho^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$; on admet que les constantes complexes $\gamma_\nu = \gamma'_\nu + i\gamma''_\nu$ vérifient les inégalités

$$(8) \quad \begin{aligned} 0 < \gamma'_\nu < 1, & \quad \text{si } \nu = k_1, \dots, k_q, \\ -1 < \gamma'_\nu \leq 0, & \quad \text{si } \nu \neq k_1, \dots, k_q, \\ \mu + \max |\gamma'_\nu| < 1, & \quad \text{pour } \nu = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

enfin la constante positive ρ a les valeurs suivantes:

$$(8') \quad \begin{aligned} \rho &= \alpha, & \text{si } \alpha > \beta = \max |\gamma'_\nu|, & \quad \nu \neq k_1, \dots, k_q, \\ \rho &= \beta, & \text{si } \alpha < \beta. \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème est une conséquence du théorème 2 (voir [4]).

Théorème 4. Si la fonction $\varphi(\tau)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, alors la fonction

$$(9) \quad \Phi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

holomorphe séparément dans les domaines S_{ext} , S_1 , S_2 , $\dots$, vérifie l'inégalité à singularité faible

$$(10) \quad |\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_v|} \delta$$

au voisinage de tout point c , de discontinuité, où $\delta = \alpha$, si $\alpha > 0$, et δ est une constante positive arbitrairement petite, si $\alpha = 0$.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, il suffit d'étudier l'intégrale

$$(11) \quad \Phi_c(z) = \int_{cc'} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

au voisinage de l'extrémité c d'un arc $\widehat{cc'}$ arbitrairement choisi parmi les arcs l_i composants de L . Soit donc une demi-tangente cT_0 issue du point c sur laquelle sont situées les projections orthogonales des points de l'arc $\widehat{cc'}$ au voisinage de c . Soient ensuite les deux demi-droites cT_1 et cT_2 situées des deux côtés de la tangente cT_0 et faisant avec elle les angles aigus égaux, mais arbitraires.

Soit un arc $\widehat{cv}$, étant une portion de l'arc $\widehat{cc'}$, situé à l'intérieur de l'angle T_1cT_2 et soit en outre un triangle Δ limité par demi-droites cT_1 , cT_2 et la perpendiculaire à la demi-tangente cT_0 passant par le point v , l'extrémité de l'arc $\widehat{cv}$.

Nous supposons que l'arc $\widehat{cv}$ est choisi suffisamment petit pour que: (1) la tangente en tout point t de l'arc $\widehat{cv}$ (extrémité v comprise) fasse un angle aigu avec la tangente cT_0 plus petit que l'angle entre les demi-tangentes cT_0 et cT_1 , (2) la perpendiculaire à la droite cT_0 passant par tout point z du triangle Δ coupe l'arc $\widehat{cv}$ en un seul point t . Soit Δ' un triangle limité par les demi-droites cT_1 , cT_2 et une perpendiculaire à la demi-tangente cT_0 qui coupe l'arc $\widehat{cv}$ en un tel point v' que la longueur de l'arc $\widehat{cv'}$ soit égale à la moitié de la longueur de l'arc $\widehat{cv}$.

Pour limiter l'intégrale (11), supposons que z est un point arbitraire du triangle Δ' , non situé sur l'arc $\widehat{cv'}$, et décomposons l'intégrale (11) en somme des intégrales

$$(12) \quad \Phi_c(z) = \Phi_c^{c't_0}(z) + \Phi_c^{t_0v}(z) + \Phi_c^{v'c'}(z)$$

étendues aux arcs $\widehat{ct_0}$, $\widehat{t_0v}$ et $\widehat{vc'}$, où t_0 est un tel point de l'arc $\widehat{cv}$, que les longueurs des arcs $\widehat{ct}$ et $\widehat{tt_0}$ soient égales, t étant un point d'intersection de l'arc $\widehat{cv'}$ avec la perpendiculaire à la demi-tangente cT_0 passant par le point $z \in \Delta'$.

Écrivons la première des intégrales (12) d'une façon suivante:

$$(13) \quad \Phi_c^{ct_0}(z) = \int_{ct_0} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau + \varphi(t) \int_{ct_0} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

La première des ces intégrales, d'après les inégalités (1), vérifie l'inégalité

$$(14) \quad \left| \int_{ct_0} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \right| < \int_{ct} \frac{\text{const. } dl_\tau}{|\tau - c|^{\alpha+\mu} |\tau - t|^{1-\mu}} + \int_{tt_0} \frac{\text{const. } dl_\tau}{|t - c|^{\alpha+\mu} |\tau - t|^{1-\mu}},$$

puisque le rapport $|\tau - t|/|\tau - z|$ admet une borne supérieure pour $z \in \Delta'$. Il en résulte

$$(14') \quad \left| \int_{ct_0} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \right| < \frac{\text{const.}}{|t - c|^\alpha} < \frac{\text{const.}}{|z - c|^\alpha}$$

si $\alpha > 0$, en remarquant que le rapport $|z - c|/|t - c|$ est borné supérieurement si $z \in \Delta'$. Le second membre de la somme (13) vérifie l'inégalité

$$(15) \quad \left| \varphi(t) \int_{ct_0} \frac{d\tau}{\tau - z} \right| < \frac{\text{const.}}{|t - c|^\alpha} \left| \log \frac{t_0 - z}{c - z} \right| < \frac{\text{const.}}{|t - c|^\alpha},$$

la fonction logarithmique étant bornée, à cause de l'égalité des longueurs des arcs $\widehat{ct}$ et $\widehat{tt_0}$.

La limitation de la seconde des intégrales (12) est plus facile à réussir. Notamment, en désignant par s et σ les longueurs des arcs $\widehat{ct}$ et $\widehat{ct'}$ et en tenant compte de l'inégalité $(\sigma - s)/\sigma \geq \frac{1}{2}$, si $\sigma \geq 2s$, nous aurons

$$(16) \quad |\Phi_c^{t_0 c'}(z)| < \text{const.} \int_{t_0 c'} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^\alpha |\tau - t|} < \text{const.} \int_{2s}^{l_{cc'}} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+1}} < \frac{\text{const.}}{|z - c|^\alpha}.$$

En réunissant les résultats (14'), (15) et (16), on aura une limitation

$$(17) \quad |\Phi_c(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c|^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

La troisième des intégrales (12) est évidemment bornée si $z \in \Delta'$.

Dans le cas $\alpha = 0$ les intégrales (13) et (16) sont comparables à $\log(z - c)$, d'où résulte la limitation de la forme (10), δ étant une constante positive, arbitrairement petite.

Étudions maintenant le cas, où le point z est situé dans le domaine D commun au voisinage suffisamment petit du point c et à l'angle concave entre les demi-droites ct_1 et ct_2 , ne contenant pas la demi-tangente ct_0 . On peut montrer par un calcul élémentaire que, si le point τ est situé sur l'arc $\widehat{cv}$ et le point z dans le domaine D , alors les trois distances $|z - c|$, $|z - \tau|$, $|\tau - c|$ vérifient

une inégalité

$$(18) \quad \frac{|\tau - z|}{|z - c| + |\tau - c|} \geq \sin \frac{\vartheta}{2}$$

où ϑ est une borne inférieure positive de la mesure de l'angle aigu que fait le vecteur $\tau - c$, pour $\tau \in \widehat{cv}$, avec la demi-droite cT_1 ou cT_2 . Il en résulte pour la partie de l'intégrale (11) étendue à l'arc $\widehat{cv}$, dans le cas $z \in D$, une inégalité suivante

$$(19) \quad \left| \int_{cv} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} \right| < \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1} \int_{cv} \frac{\text{const. } dl_\tau}{|\tau - c|^\alpha [|z - c| + |\tau - c|]} \\ < \frac{\text{const.}}{|z - c|^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

si petit que soit $|z - c|$.

Dans le cas $\alpha = 0$ l'intégrale (19) est évidemment comparable à $\log(z - c)$. En réunissant les résultats (17) et (19), nous arrivons à la thèse (10) du théorème 4.

Théorème 5. Si la fonction $\varphi(\tau)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_a^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_s})$, alors toute branche de la fonction analytique $\Phi(z)$, déterminée par la formule

$$(20) \quad \Phi(z) = \prod_{v=1}^p (z - c_v)^{\gamma_v} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\prod_{v=1}^p (\tau - c_v)^{\gamma_v} (\tau - z)}$$

(les suppositions (8) étant conservées), est bornée au voisinage de tout point de discontinuité distingué $c_{k_1}, \dots, c_{k_s}$, coupé par les arcs correspondant l_i , et vérifie une inégalité à singularité faible

$$(20') \quad |\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_v|^\rho} \quad (0 < \rho < 1);$$

aux voisinages des autres points de discontinuité c_v (ρ est défini par les formules (8')).

La démonstration de ce théorème est une conséquence du théorème précédent.

3. Problème aux limites discontinus de Hilbert pour un système d'arcs. Soit un système arbitraire L d'arcs dirigés l_γ ($\gamma = 1, \dots, m$), précisé dans l'article précédent. Soit donnée une fonction complexe $G(t)$ en tout point $t \in L$ différent de c_v , vérifiant une condition de Hölder

$$(21) \quad |G(t) - G(t_1)| < k_G |t - t_1|^{h_G}$$

à l'intérieur de tout arc l_γ composant de L .

La fonction $G(t)$ admet les valeurs limites unilatérales à deux extrémités de tout arc l_γ . Désignons ces valeurs limites, correspondant au point de discontinuité arbitraire c_v , par les symboles suivants:

$$(21') \quad \lim_{t_i \rightarrow c_\nu} G(t_i) = G^i(c_\nu)$$

où $t_1, t_2, \dots, t_r$, sont des points situés à l'intérieur des arcs convergents vers le point c_ν , ou divergents du point c_ν .

À tout point de discontinuité c_ν ($\nu = 1, 2, \dots, p$) correspondent donc r_ν valeurs limites

$$(22) \quad G^1(c_\nu), \dots, G^{r_\nu}(c_\nu)$$

de la fonction $G(t)$ ($r_\nu \geq 1$). Nous admettons que la fonction $G(t)$ et toutes ses valeurs limites (22) sont *différentes de zéro*. Soit ensuite donnée, à l'intérieur de l'ensemble L , une fonction $g(t)$ complexe de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ (voir déf. 1).

Le problème discontinu de Hilbert pour le système L des arcs consiste en détermination d'une fonction $\Phi(z)$, holomorphe *séparément* dans les domaines $S_{\text{ext}}, S_1, S_2, \dots$ limités par les arcs donnés, dont les valeurs limites $\Phi^+(t)$ et $\Phi^-(t)$ en tout point intérieur t d'un arc dirigé arbitraire l_γ et relatives aux deux côtés de cet arc, vérifient la relation linéaire

$$(22) \quad \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Nous signalons que la position des deux côtés de tout arc ne dépend que de sa direction (voir la figure), abstraction faite que cet arc soit composant d'une courbe fermée ou non. Même dans le cas, où les arcs forment une courbe fermée, mais ne sont pas également dirigés par rapport à cette courbe, les valeurs limites $\Phi^+(t)$ peuvent correspondre aux côtés situés à l'intérieur ou à l'extérieur de cette courbe. C'est une différence essentielle relativement aux suppositions admises dans le problème continu de Hilbert pour les courbes fermées dans le travail [1].

En outre on demande que la solution $\Phi(z)$ vérifie l'inégalité à faible singularité

$$(23) \quad |\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_\nu|^\theta} \quad (0 < \theta < 1)$$

aux voisinages de tout point de discontinuité c_ν .

Résolvons d'abord le problème précédent dans le cas particulier d'une relation homogène

$$(24) \quad \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$$

en suivant la méthode analogue à celle, donnée pour la première fois par N. MUSKHELISHVILI (voir [1], p. 235). Considérons donc une intégrale du type de Cauchy

$$(25) \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(\tau) d\tau}{\tau - z} = \sum_{\gamma=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{l_\gamma} \frac{\log G(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

où l'on a choisi *arbitrairement* les branches continues du logarithme pour tout arc composant l_γ .

En tenant compte de la condition (21), nous pouvons affirmer que la fonction (25), holomorphe séparément dans les domaines S_{ext} , S_1 , $\dots$ a les valeurs limites vérifiant la relation

$$(26) \quad \Gamma^+(t) - \Gamma^-(t) = \log G(t)$$

en tout point *intérieur* t de tout arc l_r composant de L . Nous signalons que dans la formule (26) figure une telle branche continue du logarithme qu'on a fixé arbitrairement pour l'arc l_i sur lequel se trouve le point t et que les valeurs limites $\Gamma^+(t)$, $\Gamma^-(t)$ correspondent aux deux côtés de cet arc, dépendant uniquement de sa direction.

En tenant compte de la propriété (26), nous voyons que la fonction

$$(27) \quad F(z) = \exp \{ \Gamma(z) \},$$

holomorphe séparément dans les domaines S_{ext} , S_1 , S_2 , $\dots$, a les valeurs limites vérifiant la condition homogène

$$(27') \quad F^+(t) = G(t)F^-(t)$$

en tout point $t \neq c_r$ de l'ensemble L . Pour avoir une fonction vérifiant en outre la condition (23), remarquons que l'intégrale du type de Cauchy (25) le long d'un arc $\widehat{c_r c_{r'}}$, composant de L , s'exprime au voisinage du point c_r de la façon suivante:

$$(28) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{c_r c_{r'}}} \frac{\log G(\tau) d\tau}{\tau - z} = \pm \frac{\log G^i(c_r)}{2\pi i} \log(z - c_r) + \Psi^j(z)$$

($j = 1, 2, \dots, r_r$), où le signe $+$ concerne le cas d'un arc $\widehat{c_r c_{r'}}$, correspondant à la valeur limite $G^i(c_r)$, qui est dirigé vers le point c_r et le signe $-$ concerne le cas d'un arc issue du point c_r . La fonction $\Psi^j(z)$ est bornée au voisinage du point c_r ; l'indice j correspond à l'arc choisi $\widehat{c_r c_{r'}}$.

Étudions plus précisément la fonction $\Psi^j(z)$, donnée par la formule

$$(28') \quad \Psi^j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{c_r c_{r'}}} \frac{\log G(\tau) - \log G^i(c_r)}{\tau - z} d\tau \mp \frac{\log G^i(c_r)}{2\pi i} \log(z - c_r).$$

Le second terme logarithmique est régulier au voisinage du point c_r , quant au premier terme c'est l'intégrale du type de Cauchy de densité

$$\varphi(\tau) = \log G(\tau) - \log G^i(c_r)$$

vérifiant la condition de Hölder à l'exposant h_α et nulle si $\tau = c_r$. Il en résulte, en vertu des propriétés connues de l'intégrale du type de Cauchy, que la fonction (28') est holomorphe dans un voisinage suffisamment petit de l'extrémité c_r , coupé par l'arc $\widehat{c_r c_{r'}}$, admet les valeurs limites bornées des deux côtés de cette coupure et une valeur limite

$$(28'') \quad \Psi^j(c_r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{c_r c_{r'}}} \frac{\log G(\tau) - \log G^i(c_r)}{\tau - c_r} d\tau \mp \frac{\log G^i(c_r)}{2\pi i} \log(c_r - c_r)$$

si $z \rightarrow c_\nu$ (intégrale concerne une fonction à singularité faible). D'après le théorème de PRIVALOFF (voir [1], p. 50), ces valeurs limites vérifient une condition de Hölder à l'exposant h_σ et au coefficient borné. Donc la fonction $\Psi_\nu^j(z)$, avec ses valeurs limites des deux côtés de la coupure, est bornée et vérifie au voisinage du point c_ν une condition de Hölder

$$(28'') \quad |\Psi_\nu^j(z_1) - \Psi_\nu^j(z_2)| < \text{const.} |z_1 - z_2|^{h_\sigma}$$

au coefficient borné.

Posons maintenant

$$(29) \quad \pm \frac{1}{2\pi i} \log G^j(c_\nu) = \alpha_\nu^j + i\beta_\nu^j$$

($\nu = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, r_\nu$), α_ν^j et β_ν^j étant réels, et choisissons pour tout point de discontinuité c_ν un nombre entier λ_ν , tel qu'on ait

$$(30) \quad -1 < \lambda_\nu + \sum_{j=1}^{r_\nu} \alpha_\nu^j < +1.$$

Dans le cas où la somme, figurant dans ces inégalités, a une valeur entière, il n'en résulte qu'une valeur déterminée

$$(31) \quad \lambda_\nu = - \sum_{j=1}^{r_\nu} \alpha_\nu^j$$

de l'entier λ_ν . Un tel point de discontinuité c_ν sera dit *singulier*. Dans le cas contraire, la condition (30) fournit deux valeurs de l'entier λ_ν pour lesquelles on a

$$(32) \quad -1 < \lambda_\nu + \sum_{j=1}^{r_\nu} \alpha_\nu^j < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \lambda_\nu + \sum_{j=1}^{r_\nu} \alpha_\nu^j < 1.$$

En tenant compte des formules (27), (28), (29) et de la condition (30), nous en concluons que la fonction

$$(33) \quad X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma=1}^m \int_{l_\gamma} \frac{\log G(\tau) d\tau}{\tau - z} \right\} \prod_{\nu=1}^p (z - c_\nu)^{\lambda_\nu}$$

sera une solution du problème homogène de Hilbert, vérifiant la condition (23). En effet, la fonction (33) est holomorphe séparément dans les domaines S_{ext} , S_1 , S_2 , $\dots$ et, d'après (25) et le formules de PLEMELJ (4), admet les valeurs limites vérifiant la relation

$$(34) \quad X^+(t) = G(t)X^-(t)$$

en tout point $t \neq c_\nu$ de l'ensemble L . En outre, d'après (28), au voisinage du point c_ν elle s'exprime par la formule

$$(35) \quad X(z) = (z - c_\nu)^{\alpha_\nu^{*+\lambda_\nu+i\beta_\nu^{*}}} \Omega_\nu(z)$$

où l'on a posé

$$(35') \quad \Omega_\nu(z) = \exp \left(\sum_{j=1}^{r_\nu} \Psi_\nu^j(z) \right),$$

$$(35'') \quad \alpha_\nu^* = \sum_{j=1}^{r_\nu} \alpha_\nu^j; \quad \beta_\nu^* = \sum_{j=1}^{r_\nu} \beta_\nu^j.$$

D'après la formule (28'), la fonction (35'), bornée et différente de zéro au voisinage suffisamment petit du point c_ν , est holomorphe séparément à l'intérieur des domaines en lesquelles les arcs issus du point c_ν coupent le voisinage de ce point. La fonction $\Omega_\nu(z)$ admet les valeurs limites différentes de zéro des deux cotés de ces coupures et vérifie une condition de Hölder de la forme (28''') séparément en tout domaine partiel du voisinage du point c_ν . D'après le choix des entiers λ_ν , la fonction (35') vérifie donc la condition (23).

Nous signalons que, d'après l'existence de la limite (28'') de la fonction (28'), la fonction $\Omega_\nu(z)$, liée avec le point de discontinuité c_ν et définie par la formule (35'), tend vers la limite unique au point c_ν , différente de zéro:

$$(35''') \quad \lim_{z \rightarrow c_\nu} \Omega_\nu(z) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{r_\nu} \Psi_\nu^j(c_\nu) \right\},$$

si le point z , de l'intérieur des domaines partiels du voisinage du point c_ν , tend arbitrairement vers ce point.

En vertu de la formule (33) et des formules de PLEMEIJ, nous concluons que la fonction $X(z)$ tend vers les fonctions limites

$$X^+(t) = \sqrt{G(t)} X(t), \quad X^-(t) = (\sqrt{G(t)})^{-1} X(t),$$

si le point z tend vers un point $t \neq c_\nu$ de l'ensemble L . On a désigné

$$(36) \quad X(t) = \exp \{ \Gamma(t) \} \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\lambda_\nu},$$

$\Gamma(t)$ étant une valeur principale de Cauchy de l'intégrale (25). Cette valeur au voisinage du point c_ν s'exprime par la formule

$$\Gamma(t) = \log(t - c_\nu) \sum_{j=1}^{r_\nu} \frac{(\pm 1)}{2\pi i} \log G^j(c_\nu) + \Gamma^*(t)$$

où la fonction $\Gamma^*(t)$ est bornée et différente de zéro, vérifie au voisinage du point c_ν une condition de Hölder à l'exposant h_G en tout arc issu du point c_ν (séparément) et possède une limite $\Gamma^*(c_\nu) \neq 0$, si $t \rightarrow c_\nu$ le long d'un arc l_ν arbitraire.

En vertu des formules (35) et (35'), nous concluons que la fonction limite $X(t)$, définie par la formule (36), s'exprime par le produit

$$(36') \quad X(t) = \omega(t) \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\alpha_{\nu,*} + \lambda_\nu + i\beta_{\nu,*}}$$

en tout point $t \neq c_\nu$ de l'ensemble L , où l'on a choisi les branches déterminées des fonctions $(t - c_\nu)^{\alpha_\nu + \lambda_\nu + i\beta_\nu}$ sur tout arc l_j . La fonction $\omega(t)$, définie et différente de zéro dans l'ensemble L , vérifie une simple condition de Hölder

$$(36'') \quad |\omega(t) - \omega(t_1)| < \text{const.} |t - t_1|^{h_g}$$

au coefficient borné, dans tout arc l_j séparément. D'après la propriété (35''') la fonction $\omega(t)$ tend vers une limite déterminée et différente de zéro, si le point, t sur l'arc arbitraire l_j tend vers l'extrémité c_ν . En admettant cette limite comme la valeur $\omega(c_\nu) = \lim_{t \rightarrow c_\nu} \omega(t)$ de la fonction $\omega(t)$ au point c_ν nous pouvons affirmer, que la fonction $\omega(t)$ est définie, différente de zéro et continue en tout point de l'ensemble L , les extrémités c_ν comprises.

Une solution $\Phi(z)$ du problème de Hilbert (22) sera dite de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ (en accord avec la définition de MUSKHELISHVILI), si elle est bornée aux voisinages des points de discontinuité non singuliers $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ distingués ($0 \leq q \leq p$) et vérifie une condition (23) aux voisinages des autres extrémités. La valeur $q = 0$ correspond à l'ensemble vide de points distingués, nous désignerons alors la classe de solutions par h_0 .

On voit que la formule (33) présentera une solution du problème homogène de Hilbert de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, si nous choisissons les entiers λ_ν aux points $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ en accord avec la seconde condition (32) et pour les autres points de discontinuité c_ν en accord avec la première condition (32) ou l'égalité (31). La fonction $X(z)$ tellement déterminée sera dite *solution canonique* de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème homogène de Hilbert pour le système d'arcs L . On voit que cette fonction s'annule aux points $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$. Il est facile à montrer que toute solution de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème homogène de Hilbert sera donnée par la formule

$$(37) \quad \Phi(z) = X(z)P(z),$$

$P(z)$ étant une fonction entière arbitraire.

La somme des nombres entiers

$$(38) \quad \kappa = - \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu,$$

étendues aux tous les points de discontinuité c_ν , sera dite *indice* de la solution du problème de Hilbert de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$. Il est évident, d'après la formule (29), que la valeur de l'indice κ ne dépend pas du choix des branches continues de la fonction $\log G(t)$ sur les arcs l_γ et qu'elle dépend uniquement de la fonction $G(t)$ et du choix des points $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$. En effet, si l'on change d'une façon

arbitraire une branche de la fonction $\log G(t)$ sur un arc $l_\gamma = \widehat{c_s c_{s'}}$, alors, en vue de la formule (29), on diminue et on augmente simultanément d'un même nombre entier les deux composants de la somme (38), correspondant aux extrémités c_s et $c_{s'}$, par conséquent la somme (38) ne changera pas.

L'indice κ figure dans la propriété à l'infini de la fonction $X(z)$, nous avons notamment, d'après la formule (33),

$$(38') \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^\kappa X(z) = 1.$$

Passons à la détermination d'une solution $\Phi(z)$ de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème non homogène (22), en admettant que la fonction donnée $g(t)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$.

Remarquons donc, que la condition limite (22) peut être exprimée sous la forme équivalente

$$(39) \quad \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

en tout point $t \neq c_\nu$ sur L . Ensuite remarquons que si la fonction donnée $g(t)$ est de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, les points $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ étant non singuliers par rapport à la fonction $G(t)$, alors, d'après la formule (36), le quotient $g(t)/X^+(t)$ est de classe $\mathfrak{S}_\zeta^{\mu_1}$, où: $\mu_1 = \min(\mu, h_\alpha)$, $\zeta = \alpha$ si $\alpha \geq \beta = \max |\alpha_\nu^* + \lambda_\nu|$ ($\nu = c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$) et $\zeta = \beta$ si $\alpha < \beta$. Par conséquent l'intégrale

$$(39') \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)}$$

à un sens déterminé, présente une fonction holomorphe séparément dans les domaines S_{ext} , S_1 , S_2 , $\dots$ et admet les valeurs limites vérifiant l'égalité

$$(40) \quad \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

en tout point $t \neq c_\nu$ des arcs l_ν . En outre, d'après le théorème 4, la fonction (39') vérifie une inégalité à singularité faible

$$(40') \quad |\Psi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_\nu|^\zeta} \quad (0 < \zeta < 1)$$

au voisinage de tout point de discontinuité c_ν .

Donc, si $\Phi(z)$ est une solution de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, vérifiant la condition limite non homogène (22) ou (39), alors la différence des fonctions $\Psi(z)$ et $\Phi(z)/X(z)$ est une fonction entière $P(z)$, par conséquent nous pouvons écrire

$$(41) \quad \Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z)P(z).$$

Inversement, si $P(z)$ est une entière arbitraire, alors la fonction définie par la formule (41) est séparément holomorphe dans les domaines S_{ext} , S_1 , S_2 , $\dots$, admet les valeurs limites vérifiant les conditions (39) ou (22), en outre, en vertu du théorème 5, elle est bornée aux voisinages des extrémités distinguées $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ et vérifie une inégalité à singularité faible

$$(41') \quad |\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_\nu|^\rho} \quad (0 < \rho < 1)$$

aux voisinages des autres extrémités c_ν , où

$$(41'') \quad \begin{aligned} \rho &= \alpha, & \text{si } \alpha > \delta = \max |\alpha_\nu^* + \lambda_\nu|, & \quad \nu \neq k_1, \dots, k_q, \\ \rho &= \delta, & \text{si } \alpha < \delta, \end{aligned}$$

La formule (41) donne, par conséquent, la solution générale de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème non homogène (22) de Hilbert.

La formule obtenue pour le système d'arcs L et pour la fonction $g(t)$ de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ est identique formellement avec la formule donnée par MUSKHELISHVILI [1] dans le cas moins général. Nous remarquons que notre formule (25) diffère de la formule de MUSKHELISHVILI, s'il s'agit des courbes fermées. Notamment l'auteur cité pose dans sa monographie [1] (p. 253) dans le cas d'un contour fermé et pour le problème discontinu

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G_0(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

où $G_0(\tau) = \tau^{-\kappa} G(\tau)$. Or cette transformation, importante dans le cas du problème continu aux limites de Hilbert, est inutile dans le cas étudié par nous, où toutes les courbes fermées, faisant partie de l'ensemble L , contient au moins un point de discontinuité de la fonction $G(t)$.

Étude de la solution (41), si $z \rightarrow \infty$, est la même que dans l'ouvrage [1]. Notamment, si $\kappa \geq 0$, alors la formule (41) présente toutes les solutions s'annulant à l'infini, si l'on y substitue à la place de $P(t)$ un polynôme arbitraire de degré $\kappa - 1$ au plus, ou $P = 0$, dans le cas $\kappa = 0$. Dans le cas $\kappa < 0$, il existe la solution unique du problème s'annulant à l'infini, présentée par la formule (41), ou $P = 0$, sous la condition nécessaire et suffisante que la fonction donnée $g(t)$ vérifie les égalités

$$(42) \quad \int_L \frac{t^j g(t) dt}{X^+(t)} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, -\kappa - 1).$$

Nous remarquons encore que pour le système quelconque L des arcs l_ν on pourrait aussi poser et résoudre le problème discontinu de Hilbert généralisé, qui consiste en la détermination d'un système de fonctions $\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z)$, holomorphes séparément dans les domaines $S_1, S_2, \dots, S_{\text{ext}}$, dont les valeurs limites vérifiaient un système de relations

$$(42,) \quad \begin{aligned} \Phi_\nu^+(t) &= G_\nu(t) \Phi_\nu(t) + \lambda F_\nu[t, \Phi_1^+(t), \dots, \Phi_n^+(t), \Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t)] \\ & \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

en tout point t sur L différent des points de discontinuité c_ν . On admet pour les fonctions $G_\nu(t)$ les mêmes hypothèses que précédemment pour la fonction $G(t)$, on suppose ensuite que les fonctions $F_\nu(t, u_1, \dots, u_{2n})$ soient définies dans la région

$$t \in L, \quad u_\alpha \in \pi \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2n)$$

(π étant le plan entier de la variable complexe) et qu'elles vérifient la condition

de Hölder-Lipschitz

$$|F_\nu(t, u_1, \dots, u_{2n}) - F_\nu(t', u'_1, \dots, u'_{2n})| < k_F \left[|t - t'|^{h_F} + \sum_{\alpha=1}^n |u_\alpha - u'_\alpha| \right]$$

et l'inégalité

$$|F_\nu(t, u_1, \dots, u_{2n})| < m_F \sum_{i=1}^{2n} |u_i| + m'_F,$$

k_F, h_F, m_F, m'_F étant des constantes positives données.

L'étude du problème est analogue à celle présentée dans nos travaux [3] et [4] et nous ne donnerons ici qu'un court résumé du raisonnement. On montre notamment que la solution du problème est donnée par les formules

$$(42'') \quad \Phi_\nu(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu(z) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - z)} d\tau + X_\nu(z) P_\nu(z)$$

où $X_\nu(z)$ sont les solutions canoniques de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, correspondant aux fonctions $G_\nu(t) \neq 0, P_\nu(z)$ —les fonctions entières arbitraires. Les fonctions $\varphi_1(t), \dots, \varphi_{2n}(t)$ ($t \in L$) forment une solution du système d'équations intégrales singulières ($\nu = 1, 2, \dots, n$)

$$(42''') \quad \begin{aligned} \varphi_\nu(t) &= \frac{1}{2}\lambda F_\nu[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_{2n}(t)] + X_\nu^+(t) P_\nu(t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau, \\ \varphi_{\nu+n}(t) &= -\frac{1}{2}\lambda \frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} F_\nu[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_{2n}(t)] + X_\nu^-(t) P_\nu(t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau. \end{aligned}$$

D'une façon analogue, que dans le travail [4], on démontre l'existence au moins d'une solution du système (42''') formée par les fonctions $\varphi_1(t), \dots, \varphi_{2n}(t)$ de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, si le module du paramètre λ est suffisamment petit; la constante positive A est choisie arbitrairement dans l'intervalle

$$\max_{(\nu=1, \dots, n)} |\lambda_\sigma^{(\nu)} + \sum_{i=1}^{r_\sigma} \alpha_\sigma^{(\nu)i}| < A < 1$$

où les constantes $\lambda_\sigma^{(\nu)}$ et $\alpha_\sigma^{(\nu)i}$ concernent les points de discontinuité c_σ pour les fonctions $G_\nu(t)$, si $\sigma \neq k_1, \dots, k_q$ (voir la formule (36)). l'exposant μ est choisi conformément aux inégalités

$$0 < \mu + \tilde{A} < 1; \quad \mu \leq \min(h_a, h_F); \quad A + \mu < 1,$$

$\tilde{A}$ étant le plus grand de tous les nombres

$$|\lambda_\sigma^{(\nu)} + \sum_{i=1}^{r_\sigma} \alpha_\sigma^{(\nu)i}|.$$

4. Inversion d'une intégrale de Cauchy. Résolvons l'équation intégrale singulière

$$(43) \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t)$$

dans le cas général de l'ensemble L formé par les arcs l_j et dans l'hypothèse plus générale que la fonction donnée $f(t)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$. Nous allons suivre une méthode analogue à celle de N. I. MUSKHELISHVILI [1].

Supposons donc qu'il existe une fonction $\varphi(\tau) \in \mathfrak{S}(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ qui vérifie l'équation (43) en tout point $t \neq c_\nu$ de L et considérons une fonction auxiliaire

$$(44) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

holomorphe séparément dans les domaines $S_{\text{ext}}, S_1, S_2, \dots$. La fonction (44) admet les valeurs limites qui, d'après les formules (4), vérifient les égalités

$$(45) \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t); \quad \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

en tout point $t \neq c_\nu$ de l'ensemble L . La fonction (44) est alors une solution du problème particulier de Hilbert

$$(46) \quad \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t)$$

qui est nulle à l'infini et qui admet une limitation à singularité faible aux voisinages de c_ν . Cherchons toutes les solutions de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème particulier de Hilbert (46) qui sont nulles à l'infini. Déterminons donc une solution canonique de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ qui vérifie la condition limite

$$(46') \quad X^+(t) + X^-(t) = 0.$$

En substituant $G(t) = -1$ dans les formules (25), (29), (33) et en tenant compte de la condition (30), nous concluons que ceux parmi les points de discontinuité c_ν seront singuliers, pour lesquels la différence entre le nombre des arcs divergents et convergents est paire. Pour les autres points c_ν la somme $\lambda_\nu + \sum_{j=1}^{r_\nu} \alpha_j^\nu$ prend la valeur $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$. Nous admettons que les points $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$, liés avec la fonction $f(t)$, ne sont pas singuliers.

La solution canonique de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, vérifiant la condition (46'), aura donc la forme

$$(47) \quad X(z) = \prod_{\nu=1}^p (z - c_\nu)^{\gamma_\nu}$$

où: $\gamma_\nu = 0$, si c_ν est un point singulier, $\gamma_\nu = \frac{1}{2}$ pour tout point distingué $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ non singulier, $\gamma_\nu = -\frac{1}{2}$ pour les points de discontinuité restant. En outre on a fixé les branches holomorphes des facteurs en dehors des coupures l_α . D'après la propriété (38'), l'indice de la solution (47) aura une valeur $\kappa = -\sum_{\nu=1}^r \gamma_\nu$.

La solution générale de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème non homogène (46), qui est nulle à l'infini, aura donc la forme suivante

$$(48) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \prod_{\nu=1}^p (z - c_\nu)^{\gamma_\nu} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\prod_{\nu=1}^p (\tau - c_\nu)^{\gamma_\nu} (\tau - z)} + P(z) \prod_{\nu=1}^p (z - c_\nu)^{\gamma_\nu}$$

en supposant que la fonction donnée $f(\tau)$ appartienne à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$; $P(z)$ désigne un polynôme arbitraire de degré $\kappa - 1$ au plus, si $\kappa > 0$ (ou $P = 0$, si $\kappa = 0$); dans le cas $\kappa < 0$ on substitue $P = 0$ et l'on obtient la solution unique (48) nulle à l'infini, sous la condition nécessaire et suffisante que la fonction donnée $f(t)$ vérifie les conditions

$$(48') \quad \int_L \frac{t^\beta f(t) dt}{\prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu}} = 0 \quad (\beta = 0, 1, \dots, -\kappa - 1).$$

En s'appuyant sur la solution (48), nous déterminerons toutes les solutions de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ de l'équation (43). D'après les formules (4), on aura pour les valeurs limites de la fonction (48) les expressions suivantes

$$(49) \quad \begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i} \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu} \\ &\quad \cdot \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\prod_{\nu=1}^p (\tau - c_\nu)^{\gamma_\nu} (\tau - t)} + P(t) \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu}, \\ \Phi^-(t) &= \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2\pi i} \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu} \\ &\quad \cdot \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\prod_{\nu=1}^p (\tau - c_\nu)^{\gamma_\nu} (\tau - t)} - P(t) \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu}, \end{aligned}$$

où l'on a admis les branches $(t - c_\nu)^{\gamma_\nu}$ correspondant aux côtés positifs des arcs et l'on tenait compte de la relation (46'). Posons

$$\psi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$$

et considérons la fonction

$$(50) \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

holomorphe séparément dans les domaines S_{ext} , S_1 , S_2 , $\dots$ et nulle à l'infini; d'après le théorème 3, la fonction $\psi(t)$ est de classe $\mathfrak{S}_\rho^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ où: $\rho = \alpha$, si $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\rho = \frac{1}{2}$, si $\alpha < \frac{1}{2}$. Nous avons ensuite

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \psi(t) \quad (t \neq c_\nu)$$

done

$$[\Phi(t) - \Psi(t)]^+ = [\Phi(t) - \Psi(t)]^-, \quad \text{pour } t \neq c_\nu$$

et, par conséquent, on a l'égalité $\psi(z) = \Phi(z)$ dans les domaines $S_{\text{ext}}, S_1, S_2, \dots$. Il en résulte

$$\Psi^+(t) + \Psi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t),$$

donc la fonction

$$(51) \quad \begin{aligned} \psi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = & \frac{1}{\pi i} \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu} \\ & \cdot \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\prod_{\nu=1}^p (\tau - c_\nu)^{\gamma_\nu} (\tau - t)} + 2P(t) \prod_{\nu=1}^p (t - c_\nu)^{\gamma_\nu} \end{aligned}$$

dans le cas $\kappa \geq 0$ est une solution de classe $\mathfrak{S}_\rho^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$ de l'équation intégrale (43) ($\rho = \alpha$, si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$, si $\alpha < \frac{1}{2}$), alors $P(t)$ désigne un polynôme arbitraire de degré $\kappa - 1$ (ou $P = 0$, si $\kappa = 0$). Dans le cas $\kappa < 0$, la formule (51) avec $P = 0$ présente la solution unique, sous la condition (48'). Les études précédentes nous apprennent que la formule (51) donne toutes les solutions de l'équation (43) dans l'ensemble $\mathfrak{S}(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$, si $\kappa \geq 0$, et la solution unique dans $\mathfrak{S}(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$ sous la condition nécessaire et suffisante (48'). La formule (51) coïncide avec celle donnée par N. I. MUSKHELISHVILI dans le cas plus particulier.

Considérons maintenant le cas particulier, où L est une ligne fermée de Jordan composée des arcs l , dirigés conformément à la circulation positive sur la courbe L . La ligne L présente donc les points anguleux ou de rebroussement $c_1, \dots, c_p$ rangés en accord avec la direction positive de la ligne L . Soit $f(t)$ une fonction donnée de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ sur L . Dans ce cas tous les points de discontinuité c_ν sont singuliers et nous aurons $\gamma_\nu = 0$. En substituant donc $P = 0$ dans la formule (51), nous aurons la solution de l'équation (33), unique dans la classe $\mathfrak{S}$, sous la forme

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} \quad (t \neq c_\nu).$$

Cette fonction, d'après le théorème 3, appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$, si $\alpha > 0$, et à la classe $\mathfrak{S}_\epsilon^\mu$, si $\alpha = 0$, où ϵ est un nombre positif arbitrairement petit. On peut aussi établir la formule précédente directement, en s'appuyant sur les formules de PLEMELJ et sur les nos théorèmes 2 et 3.

5. Problème aux limites discontinu de Riemann. Problème aux limites de Riemann consiste en la recherche d'une fonction $\Phi(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un domaine S^+ limité par la ligne fermée L , dont les valeurs limites $\Phi^+(t) = u(t) + iv(t)$ en tout point $t \in L$ vérifient une relation

$$(52) \quad \operatorname{Re} [(a + ib)\Phi^+(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = f(t),$$

$a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ étant des fonctions réelles données sur L . MUSKHELISHVILI a résolu explicitement ce problème dans le cas du cercle en le ramenant au problème de Hilbert. Ensuite l'auteur cité a généralisé et résolu explicitement ce problème dans le cas où les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ sont discontinues sur la circonférence L . Nous donnerons cette solution d'une façon un peu modifiée et en admettant une hypothèse plus générale, que la fonction réelle $f(t)$ est de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$.

Supposons donc que les fonctions réelles $a(t)$, et $b(t)$, définies sur la circonférence L ($|z| = 1$), ont les points de discontinuité de première espèce $c_1, c_2, \dots, c_p$ rangés conformément à la direction positive du circonférence L . Nous désignons les limites du côté gauche et droit en ces points par $a(c_\nu - 0)$, $b(c_\nu - 0)$ resp. $a(c_\nu + 0)$ et $b(c_\nu + 0)$. Nous supposons que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ vérifient une condition de Hölder

$$|a(t) - a(t_1)| < \text{const.} |t - t_1|^h,$$

$$|b(t) - b(t_1)| < \text{const.} |t - t_1|^h$$

à l'intérieur de tout arc $\widehat{c_\nu c_{\nu+1}}$ ($c_{p+1} = c_1$) et qu'on a $a^2 + b^2 \neq 0$ en tout point t , même aux limites. Nous admettons ensuite que la fonction $f(t)$ est de classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu$ relativement aux points de discontinuité $c_1, c_2, \dots, c_p$.

Problème discontinu de Riemann consiste en la détermination d'une fonction $\Phi(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un cercle S^+ limité par L , dont les valeurs limites $\Phi^+(t)$ vérifient la relation (52) en tout point $t \neq c_\nu$ de la circonférence L et qui satisfait à l'inégalité à singularité faible

$$(53) \quad |\Phi(z)| < \frac{\text{const.}}{|z - c_\nu|^\rho} \quad (0 \leq \rho < 1)$$

aux voisinages des points de discontinuités c_ν . En particulier la solution $\Phi(z)$ du problème de Riemann sera dite de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, si elle est bornée aux voisinages de points de discontinuité distingués $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ et vérifie la condition (53) aux voisinages des autres points de discontinuité. Nous résoudrons ce problème en le ramenant au problème discontinu de Hilbert par la méthode de MUSKHELISHVILI.

Soit une fonction $\Psi(z)$ holomorphe séparément à l'intérieur S^+ et à l'extérieur S^- du circonférence L ; on admet qu'elle est *régulière à l'infini*. On appelle la fonction $\Psi_*(z)$ associée à la fonction $\Psi(z)$ si elle est définie par l'égalité

$$(54) \quad \Psi_*(z) = \overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

pour $z \in S^+ + S^-$ (le trait au dessus désigne une valeur conjuguée). La fonction $\Psi_*(z)$ est donc aussi holomorphe séparément dans les domaines S^+ et S^- et elle est régulière à l'infini. La fonction $\Phi(z)$, définie en S^+ , étant une solution du problème discontinu de Riemann (52) de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, prolongeons cette fonction dans le domaine S^- par la relation

$$(55) \quad \Phi(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad \text{si } z \in S^-.$$

On obtient de telle façon une fonction qui est identique avec son associée: $\Phi_*(z) = \Phi(z)$.

On voit que cette fonction est une solution du problème discontinu de Hilbert

$$(56) \quad (a + ib)\Phi^+(t) + (a - ib)\Phi^-(t) = 2f(t)$$

($t \neq c_v$) régulière à l'infini. Inversement, une solution du problème de Hilbert (56), qui est régulière à l'infini, fournit dans S^+ une solution du problème (52) de Riemann. D'après les études précédentes, nous pouvons déterminer toutes les solutions du problème discontinu de Hilbert (56) de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$.

Nous avons maintenant

$$(57) \quad G(t) = \frac{a - ib}{a + ib}; \quad g(t) = \frac{2f(t)}{a + ib},$$

done, en désignant

$$(58) \quad \alpha_v^+ = -\frac{1}{2\pi i} \log G(c_v + 0); \quad \alpha_v^- = +\frac{1}{2\pi i} \log G(c_v - 0)$$

nous choisissons

$$\lambda_v = -(\alpha_v^+ + \alpha_v^-)$$

au point c_v singulier, c.-à-d. tels où le quotient $G(c_v + 0)/G(c_v - 0)$ est positif; ensuite aux points de discontinuité distingués $c_{k_1}, \dots, c_{k_a}$, supposés non singuliers, nous choisirons les entiers λ_v tels qu'on ait

$$0 < \lambda_v + (\alpha_v^+ + \alpha_v^-) < 1$$

et pour les autres points de discontinuité on prend λ_v tels que

$$-1 < \lambda_v + (\alpha_v^+ + \alpha_v^-) < 0.$$

Les constantes entières λ_v , étant déterminées, on calcule l'indice du problème

$$(59) \quad \kappa = -\sum_{v=1}^p \lambda_v$$

qui est indépendant du choix des branches continues de la fonction $\log G(t)$ sur les arcs $\widehat{c_v c_{v+1}}$. La solution canonique $X(z)$ de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$, correspondant au problème homogène (56), sera alors donnée par les formules (25) et (33). Admettons maintenant que la fonction $f(t)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$, alors, d'après la formule (41), la solution générale de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_a})$ du problème de Hilbert (56) aura la forme

$$(60) \quad \Psi(z) = \frac{1}{\pi i} X(z) \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(a + ib)(\tau - z)} + X(z)P(z),$$

la valeur limite $X^+(t)$ étant donnée par la formule (36).

L'intégrale (60) a le sens, grâce aux singularités faibles aux points $c_1, c_2, \dots, c_p$. Considérons d'abord le cas $\kappa \geq 0$; on obtient alors toutes les solutions régulières à l'infini en posant dans (60)

$$P^*(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_\kappa z^\kappa$$

où $C_0, C_1, \dots, C_\kappa$ sont des constantes arbitraires. Il en résulte que la formule

$$(61) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2} \left[\Psi(z) + \overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right]$$

présente pour $z \in S^+ + S^-$ toutes les solutions de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème de Hilbert (56) qui sont identiques avec ses associés: $\Phi_*(z) = \Phi(z)$. Donc la formule (61) donne la solution générale de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème discontinu de Riemann (56) dans le cas $\kappa \geq 0$. Cette solution dépend de $\kappa + 1$ constantes arbitraires. En faisant le calcul, on trouve

$$(62) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Z(z, \tau) f(\tau) d\tau}{[a^2(\tau) + b^2(\tau)](\tau - z)} + \frac{1}{2} X(z) P^*(z) + \frac{1}{2} X_*(z) P_*^*(z)$$

où l'on a désigné

$$(63) \quad Z(z, \tau) = \frac{X(z)[a(\tau) - ib(\tau)]}{X^+(\tau)} - \frac{z X_*(z)[a(\tau) + ib(\tau)]}{\tau X^+(\tau)}.$$

Dans le cas $\kappa < 0$ le problème de Hilbert (56) n'a pas, en général, des solutions de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ régulières à l'infini. Dans ce cas le problème de Riemann (52) n'a pas aussi la solution, en général. Il y a cependant la solution unique du problème de Hilbert

$$(64) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi i} X(z) \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(a + ib)(\tau - z)}$$

de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, régulière à L l'infini, sous la condition nécessaire et suffisante que la fonction donnée $f(\tau)$ de classe $\mathfrak{S}_a^\mu(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ vérifie les égalités

$$(65) \quad \int_L \frac{\tau^j f(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(a + ib)} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, -\kappa - 2).$$

La fonction (64) est alors la solution unique de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ du problème discontinu de Riemann (52) dans le domaine S^+ .

Le problème de Riemann a été généralisé par GOUSSÉINOV [5] dans le cas d'une condition limite continue non linéaire. A la fin de notre travail nous présenterons l'étude d'un problème discontinu généralisé de Riemann par la méthode différente de la méthode de l'auteur cité.

Soit à déterminer un système de n fonctions

$$\Phi_\nu(z) = u_\nu(x, y) + i v_\nu(x, y)$$

($\nu = 1, 2, \dots, n$) holomorphes à l'intérieur d'un cercle S^+ , dont les valeurs

limites $\Phi_i^+(t) = u_\nu(t) + i v_\nu(t)$ vérifient le système de n équations

$$(66) \quad \begin{aligned} &\operatorname{Re} [\Phi_\nu(t)(a_\nu + i b_\nu)] \\ &= a_\nu(t)u_\nu(t) - b_\nu(t)v_\nu(t) = f_\nu(t) + \lambda F_\nu(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

en tout point $t \neq c_1, c_2, \dots, c_p$ du circonférence L , où $c_1, \dots, c_p$ sont les points de discontinuité des fonctions a_ν, b_ν, f_ν . On demande que ces fonctions soient de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ c-à-d. qu'elles soient bornées aux voisinages de points non singuliers $c_{k_1}, \dots, c_{k_q}$ et qu'elles vérifient une inégalité de la forme (53) aux voisinages des autres points de discontinuité.

Nous admettons pour les fonctions $a_\nu(t), b_\nu(t), f_\nu(t)$ les mêmes hypothèses que précédemment. Quant aux fonctions réelles $F_\nu(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$, nous supposons qu'elles soient déterminées dans la région

$$(67) \quad t \in L; \quad u_\nu + i v_\nu \in \Pi$$

(Π désignant le plan entier de la variable complexe), qu'elles vérifient une condition de Hölder-Lipschitz

$$(68) \quad \begin{aligned} &|F_\nu(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) - F_\nu(t', u'_1, \dots, u'_n, v'_1, \dots, v'_n)| \\ &< k_F \left[|t - t'|^{h_F} + \sum_{\alpha=1}^n |u_\alpha - u'_\alpha| + \sum_{\alpha=1}^n |v_\alpha - v'_\alpha| \right], \end{aligned}$$

donc aussi l'inégalité de la forme

$$(69) \quad |F_\nu(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)| < k_F \left(\sum_{\alpha=1}^n |u_\alpha| + \sum_{\alpha=1}^n |v_\alpha| \right) + m_F,$$

m_F étant une constante positive. Soient $X_\nu(z)$ les solutions canoniques de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$ des problèmes homogènes de Hilbert:

$$(70) \quad (a_\nu + i b_\nu) X_\nu^+(t) + (a_\nu - i b_\nu) X_\nu^-(t) = 0$$

($\nu = 1, 2, \dots, n$). Nous désignons par $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ les indices correspondant et nous supposons qu'ils soient tous positifs ou nuls.

D'après les études précédentes, nous pouvons affirmer que, si le problème proposé (66) a une solution $\Phi_i(z), \dots, \Phi_n(z)$ et si les fonctions limites correspondant $\Phi^+(t), \dots, \Phi_n^+(t)$ sur la circonférence L sont de classe $\mathfrak{S}(c_{k_1}, \dots, c_{k_q})$, alors les fonctions $\Phi_\nu(z)$ vérifient les relations ($\nu = 1, 2, \dots, n$)

$$(71) \quad \begin{aligned} \Phi_\nu(z) &= \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \frac{Z_\nu(z, t) \tilde{F}_\nu[(\tau, \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n)]}{[a_\nu^2(\tau) + b_\nu^2(\tau)](\tau - z)} d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Z_\nu(z, \tau) f_\nu(\tau) d\tau}{[a_\nu^2(\tau) + b_\nu^2(\tau)](\tau - z)} + \frac{1}{2} X_\nu(z) P_\nu^{\kappa_\nu}(z) + \frac{1}{2} X_\nu\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) P_\nu^{\kappa_\nu}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{aligned}$$

où $\varphi_\nu(\tau)$ désignent les fonctions limites

$$\varphi_\nu(\tau) = \Phi_\nu^+(\tau), \quad \tau \neq c_\nu,$$

$P_{\nu}^{*'}(z)$ certains polynômes des degrés κ , au plus, Z_{ν} les fonctions connues suivantes:

$$(72) \quad Z_{\nu}(z, \tau) = \frac{X_{\nu}(z)[a_{\nu}(\tau) - ib_{\nu}(\tau)]}{X_{\nu}^{*'}(\tau)} - \frac{\overline{zX_{\nu}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)[a_{\nu}(\tau) + ib_{\nu}(\tau)]}}{\tau \overline{X_{\nu}^{*'}(\tau)}},$$

et $\tilde{F}_{\nu}$ les fonctions des variables complexes définies par les relations

$$(73) \quad \begin{aligned} & \tilde{F}_{\nu}(\tau, w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= F_{\nu}\left(\tau, \frac{w_1 + \bar{w}_1}{2}, \dots, \frac{w_n + \bar{w}_n}{2}, \frac{w_1 - \bar{w}_1}{2i}, \dots, \frac{w_n - \bar{w}_n}{2i}\right) \end{aligned}$$

dans la région

$$\tau \in L, \quad w_1 \in \Pi, \quad w_2 \in \Pi, \quad \dots, \quad w_n \in \Pi.$$

En faisant tendre le point intérieur $z \in S^+$ vers un point arbitraire t à l'intérieur des arcs $c_{\nu}c_{\nu+1}$ et en appliquant les formules de PLEMELJ aux fonctions (71), nous constatons que les fonctions limites $\varphi_{\nu}(t)$ des fonctions (71) vérifient le système suivant d'équations intégrales ($\nu = 1, 2, \dots, n$):

$$(74) \quad \begin{aligned} \varphi_{\nu}(t) = & \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{Z_{\nu}(t, t)}{a_{\nu}^2(t) + b_{\nu}^2(t)} \tilde{F}_{\nu}[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] \\ & + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \frac{Z_{\nu}(t, \tau) \tilde{F}_{\nu}[\tau, \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)] d\tau}{[a_{\nu}^2(\tau) + b_{\nu}^2(\tau)](\tau - t)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{Z_{\nu}(t, t) f_{\nu}(t)}{a_{\nu}^2(t) + b_{\nu}^2(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Z_{\nu}(t, \tau) f_{\nu}(\tau) d\tau}{[a_{\nu}^2(\tau) + b_{\nu}^2(\tau)](\tau - t)} \\ & + \frac{1}{2} X_{\nu}^{+}(t) P_{\nu}^{*'}(t) + \overline{\frac{1}{2} X_{\nu}^{-}(t) P_{\nu}^{*'}(t)} \end{aligned}$$

où l'on a posé $Z_{\nu}(t, \tau) = \lim_{z \rightarrow t} Z_{\nu}(z, \tau)$ donc

$$Z_{\nu}(t, t) = a_{\nu}(t) - ib_{\nu}(t) - \frac{\overline{X_{\nu}^{-}(t)}}{X_{\nu}^{+}(t)} [a_{\nu}(t) + ib_{\nu}(t)].$$

Traisons maintenant dans le système (74) les fonctions $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ comme inconnues et $P_{\nu}^{*'}(t)$ comme les polynômes arbitraires des degrés κ . Le système (74) est un système d'équations intégrales aux fortes singularités, irrésoluble par les méthodes de l'analyse classique. Ce système est tout à fait analogue au système d'équation intégrales que nous avons étudié par la méthode topologique dans nos travaux [3] et [4].

En suivant le même raisonnement, que nous ne reproduirons pas, on prouve l'existence au moins d'un système de fonctions $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ de classe $\mathfrak{S}(c_{k_1}, \dots, c_{k_n})$ qui vérifie les équations (74) en tout point $t \neq c_{\nu}$ du cercle L , sous la condition que le module du paramètre λ est suffisamment petit. En

substituant les fonctions trouvées $\varphi_\nu(t)$ dans les formules (71), on reçoit un système de fonctions holomorphes $\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z)$ vérifiant les conditions limites (66) en tout point $t \neq c_\nu$ du cercle L . En s'appuyant sur notre théorème 5, nous en concluons que ces fonctions sont de classe $h(c_{k_1}, \dots, c_{k_n})$, donc elle forme une solution demandée du problème généralisé discontinu de Riemann.

Si les indices $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ du problème n'étaient pas tous positifs ou nuls, on pourrait de même faire la discussion du système (74) et en conclure l'existence d'une solution $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ si $|\lambda|$ est suffisamment petit. Mais cette solution, substituée dans les formules (71), ne fournit pas une solution du problème (66) que sous la condition nécessaire et suffisante que les membres droits des équations (66) vérifient les égalités intégrales connues de la forme (65).

OUVRAGES CITÉS

- [1] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff N, V., Gröningen, Holland, 1953.
- [2] W. POGORZELSKI, Sur certaines classes de fonctions complexes définies sur les arcs non fermés, *Bulletin de l'Ac. Pol. des Sciences*, 1958.
- [3] W. POGORZELSKI, Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 7, 1958.
- [4] W. POGORZELSKI, Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Paris, 1959.
- [5] A. I. GOUSSÉINOV, Sur un problème aux limites dans la théorie des fonctions analytiques (en russe). *Matematicheski Sbornik*, 26 (68), 1950.
- [6] W. POGORZELSKI, Sur une propriété principale des fonctions de class $\mathfrak{S}$, *Bulletin de l'Ac. Pol. des Sciences*, 1960.

Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences