Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés

W. POGORZELSKI

Mémoire transmis par A. ZYGMUND

1. Introduction. Les équations intégrales non linéaires à forte singularité de première et de seconde espèce ont les formes

$$(1) \quad \int_L \frac{F[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau = f(t)$$

$$(2) \quad \varphi(t) = \int_L \frac{F[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau$$

où t et τ désignent deux points variables sur l'ensemble L de lignes d'intégration dans le plan de la variable complexe, $F(t, \tau, u)$ est une fonction déterminée dans la région

$$t \in L; \quad \tau \in L; \quad u \in \Pi_0$$

où Π_0 désigne un domaine dans le plan de la variable complexe, φ désigne la fonction inconnue, les intégrales ont le sens de la valeur principale de Cauchy.

L'équation intégrale (2) était étudiée récemment par A. Gousseïnov. [1] dans le cas particulier où la ligne d'intégration L est un segment d'axe réel.

Les équations (1) et (2) étaient aussi l'objet des études de l'auteur de cet article depuis 1924 dans les travaux [4], [5], [6], [7]. Les travaux concernent le cas où L est un ensemble de *lignes fermées* dans le plan de la variable complexe. Sous la même hypothèse à étudiée J. WOLSKA et récemment D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ le système d'équations intégrales non linéaires à la forte singularité dans les travaux [8], [9], [10].

Dans le travail présent nous étudierons l'équation de seconde espèce dans le cas où L est un ensemble fini des arcs simples *non fermés* et ne se coupant pas dans le plan de variable complexe.

Ce cas fournit de difficulté nouvelle, puisque alors les intégrales du type de Cauchy ne restent pas bornées en général, si le point variable t tend vers les extrémités des arcs d'intégration.

2. Énoncé du problème. Nous démontrerons l'existence d'une solution de l'équation intégrale de seconde espèce, que nous écrirons de la façon suivante

$$(3) \quad \varphi(t) = \lambda \int_L \frac{F[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau$$

en introduisant le paramètre λ , pour faciliter la discussion.

Nous admettons les hypothèses suivantes.

I. La région d'intégration L est une somme fini

$$L = \sum_{\nu=1}^p a_\nu b_\nu$$

des p arcs dirigés $a_\nu b_\nu$, non fermés et n'ayant des points communs. Ces arcs ont les tangentes continues en tout point. En outre nous admettons que l'angle $\vartheta(t_1, t_2)$ entre les tangentes aux deux points arbitraires t_1 et t_2 des arcs L vérifie l'inégalité

$$(4) \quad \vartheta(t_1, t_2) < \text{const.} \cdot |t_1 - t_2|^h$$

où l'exposant h est une constante positive donnée, non supérieure à l'unité.

II. $F(t, \tau, u)$ est une fonction complexe continue, déterminée dans la région

$$(5) \quad t \in L; \quad \tau \in L; \quad u \in \Pi$$

(Π désigne tout le plan de la variable complexe) vérifiant l'inégalité

$$(5') \quad |F(t, \tau, u)| < m_F |u|^r + m'_F$$

et en outre vérifiant la condition de Hölder de la forme

$$(6) \quad |F(t, \tau, u) - F(t_1, \tau_1, u_1)| < k_F [|t - t_1|^{\mu_1} + |\tau - \tau_1|^\mu + |u - u_1|].$$

m_F, m'_F, k_F sont des constantes positives déterminées, r, μ_1, μ — les constantes positives, satisfaisant aux inégalités suivantes:

$$(6') \quad 0 < \mu < \mu_1 \leq 1; \quad 0 < r < 1; \quad \mu + r < 1; \quad \mu < h \leq 1.$$

Pour donner la preuve d'existence d'une solution de l'équation (3), nous nous appuierons sur le théorème topologique de J. SCHAUDER [2] sur le point invariant d'une transformation: "Si dans un espace linéaire, normé et complet (c. à d. l'espace de Banach) une transformation continue fait correspondre à un ensemble E de points, convexe et fermé, son sous-ensemble compact, alors il existe dans l'ensemble E au moins un point invariant de la transformation."

Tout d'abord nous démontrerons deux théorèmes sur les intégrales de Cauchy que nous aurons besoin dans les considérations ultérieures.

3. Théorèmes fondamentaux sur l'intégrale singulière du type de Cauchy pour les arcs non fermés.

Théorème 1. Si la fonction complexe $f(t, \tau)$, continue, pas nécessairement

bornée, est déterminée dans la région

$$t \in L; \quad \tau \in L$$

(excepté les extrémités des arcs $a_\nu b_\nu$), vérifie l'inégalité

$$(7) \quad |f(t, \tau)| < \frac{M_f}{\left[\prod_{\nu=1}^p |\tau - a_\nu| |\tau - b_\nu| \right]^\beta}$$

et en outre la condition de Hölder sous la forme

$$(7') \quad |f(t, \tau) - f(t_1, \tau_1)| < k_f \frac{|t - t_1|^{\mu_1} + |\tau - \tau_1|^\mu}{\left[\prod_{\nu=1}^p |\tau - a_\nu| |\tau_1 - b_\nu| \right]^{\alpha + \mu}}$$

où les constantes positives $\alpha, \beta, \mu, \mu_1$ vérifient les inégalités

$$(7'') \quad 0 < \mu < \mu_1 \leq 1; \quad 0 < \beta < \alpha < 1; \quad \alpha + \mu < 1$$

et M_f, k_f sont des constantes positives déterminées, alors la fonction, déterminée par l'intégrale singulière au sens de Cauchy

$$(8) \quad F(t) = \int_L \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L-\epsilon} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t}$$

(ϵ désigne un arc sur L qui se trouve à l'intérieur du cercle de centre t et de rayon ϵ) vérifie en tout point $t \in L$, différent des extrémités a_ν, b_ν , l'inégalité

$$(9) \quad |F(t)| < \frac{CM_f + C'k_f}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| |t - b_\nu| \right]^\alpha}$$

où C, C' sont des constantes positives, ne dépendant que de la forme des arcs L . Quant à l'inégalité (7'), on a supposé, sans restreindre la généralité, que dans le cas où les points τ, τ_1 sont situés sur le même arc $a_\nu b_\nu$, le point τ_1 suit le point τ dans la direction positive de l'arc $a_\nu b_\nu$.

Démonstration. Supposons que le point t est situé à l'intérieur d'un arc dirigé $a_\gamma b_\gamma$, arbitrairement choisi. Nous avons

$$(10) \quad F(t) = \int_{a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{L-a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t}.$$

Il suffit d'étudier la première intégrale, puisque la seconde est régulière et bornée. Dans l'étude de cette intégrale il suffit de se borner au cas où le point t est situé à l'intérieur de l'arc $a_\gamma T$ de longueur égale à un quart de la longueur de l'arc $a_\gamma b_\gamma$. Nous écrivons

$$(11) \quad \int_{a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} = \int_{a_\gamma t_0} \frac{f(t, \tau) - f(t, t)}{\tau - t} d\tau \\ + f(t, t) \int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{t_0 b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t}$$

où les arcs $a_\gamma t$ et tt_0 ont la même longueur. Nous décomposons la première $I(t)$ des intégrales du membre droit (11) en somme des intégrales étendues aux arcs $a_\gamma t$ et tt_0 et, en appliquant l'inégalité (7'), nous aurons

$$(12) \quad |I(t)| < k_f \int_{a_\gamma t} \frac{|\tau - t|^{\mu-1} d\tau}{\left[\prod_{\nu=1}^p |\tau - a_\nu| |t - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}} + k_f \int_{tt_0} \frac{|\tau - t|^{\mu-1} d\tau}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| |\tau - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}}.$$

Nous en concluons qu'il existe une telle constante positive C_γ qu'on a l'inégalité

$$(13) \quad |I(t)| < \frac{C_\gamma k_f}{[|t - a_\gamma| |t - b_\gamma|]^\alpha}$$

si $t \in a_\gamma T$. L'étude de la deuxième et troisième des intégrales (11) est évidente et donne une limitation de la forme

$$(14) \quad \left| f(t, t) \int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{t_0 b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} \right| < \frac{\text{const. } M_f}{[|t - a_\gamma| |t - b_\gamma|]^\alpha}$$

Par raison de symétrie, on obtient les limitations des mêmes formes, si $t \in T'b_\gamma$, où l'arc $T'b_\gamma$ a une longueur égale à un quart de la longueur $a_\gamma b_\gamma$. En réunissant les limitations obtenues, on arrive à la thèse (9) du théorème 1.

Théorème 2. Si les conditions (4), (7), (7'), (7'') sont vérifiées, l'intégrale (8) satisfait à la condition de Hölder suivante

$$(16) \quad |F(t) - F(t_1)| < \frac{C_1 M_f + C'_1 k_f}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| |t_1 - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}} |t - t_1|^\mu,$$

C_1 et C'_1 désignent les constantes positives, ne dépendant que des arcs L ; t et t_1 sont les deux points arbitraires à l'intérieur des arcs L . Dans les cas, où les points t, t_1 sont situés sur le même arc $a_\nu b_\nu$, on admet que le point t_1 suit le point t dans la direction positive de l'arc $a_\nu b_\nu$.

Démonstration. Si les points t et t_1 sont situés sur les arcs $a_\nu b_\nu$, différents, alors le module de la différence $t - t_1$ a une borne inférieure non nulle et, d'après la limitation (9), la propriété (16) est évidente *a priori*. Supposons donc que les points t et t_1 soient situés sur le même arc $a_\gamma b_\gamma$ et que la longueur de l'arc $a_\gamma t$ est plus petite ou au plus égale à un quart de la longueur de l'arc $a_\gamma b_\gamma$; conformément à la notre supposition antérieure, le point t_1 se trouve sur l'arc tb_γ .

Désignons par s et s_1 les longueurs des arcs $a_\gamma t$ et $a_\gamma t_1$. On sait qu'il existe telle constante positive χ , inférieure à l'unité, qu'on a les inégalités

$$(17) \quad \chi \leq \frac{|t - t_1|}{|s - s_1|} \leq 1,$$

quel que soient les points t et t_1 sur le même arc $a_\gamma b_\gamma$.

D'après notre supposition, nous avons

$$(18) \quad s < s_1; \quad 4s \leq l_\gamma,$$

où l_γ désigne la longueur de l'arc $a_\gamma b_\gamma$.

Nous admettons que la longueur de l'arc (t, t_1) est au plus égale à un quart de la longueur s :

$$(19) \quad s_1 - s \leq \frac{1}{4}s.$$

Il suffit se borner à l'étude du cas (19), puisque dans le cas contraire, d'après les inégalités (9) et (17), la propriété (16) est évidente immédiatement.

Nous nous appuyerons maintenant de même sur la décomposition (10). La seconde des intégrales (10) est régulière (si $t \notin a_\gamma b_\gamma$, $t_1 \notin a_\gamma b_\gamma$) et, d'après les conditions (7), (7'), vérifie évidemment l'inégalité de Hölder de la forme

$$(20) \quad \left| \int_{L-a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} - \int_{L-a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t_1, \tau) d\tau}{\tau - t_1} \right| \\ < \left| \int_{L-a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t, \tau) - f(t_1, \tau)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int_{L-a_\gamma b_\gamma} f(t_1, \tau) \frac{t - t_1}{(\tau - t)(\tau - t_1)} d\tau \right| \\ < (c_1 M_f + c'_1 k_f) |t - t_1|^{\mu_1},$$

où les constantes positives c_1 , c'_1 ne dépendent que des arcs L .

Pour étudier la première des intégrales (10), que nous désignerons par $I(t)$, nous la décomposons de la façon suivante

$$(21) \quad I(t) = \int_{a_\gamma b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} = I_1(t) + I_2(t),$$

où

$$(22) \quad I_1(t) = \int_{a_\gamma t_0} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t}; \quad I_2(t) = \int_{t_0 b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t}.$$

t_0 est un point sur l'arc $t_1 b_\gamma$, tel que la longueur de l'arc $t_1 t_0$ est égale à la longueur de l'arc $a_\gamma t$. En désignant par s_0 la longueur de l'arc $a_\gamma t_0$, nous avons donc

$$(23) \quad s_0 = s_1 + s \leq \frac{9}{16} l_\gamma.$$

Pour étudier l'intégrale $I_1(t)$, écrivons

$$(24) \quad I_1(t) = \int_{a_\gamma t_0} \frac{f(t, \tau) - f(t, t)}{\tau - t} d\tau + f(t, t) \int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t}$$

et désignons ces deux termes par $J_1(t)$ et $J_2(t)$. Pour le point t_1 nous aurons

$$(24') \quad I_1(t_1) = J_1(t_1) + J_2(t_1).$$

Pour étudier la différence des intégrales $J_1(t) - J_1(t_1)$ à la faible singularité, considérons un cercle Γ de centre t et de rayon $2|t - t_1|$. Outre la supposition (19), on admet que la distance $|t - t_1|$ est moindre que le plus petit des deux nombres

$$(25) \quad |t - t_1| < \min \left[\frac{1}{4} |t - a_\gamma|; \delta \right],$$

où la constante positive δ est suffisamment petite, pour que la circonférence Γ coupait l'arc $a_\gamma t_0$ en deux points intérieurs t' et t'' . Il suffit se borner à l'étude du cas (19), (25), puisque dans le cas contraire, d'après les inégalités (9) et (17), la propriété (16) résulte immédiatement. Écrivons maintenant

$$(26) \quad \begin{cases} J_1(t) = \int_{t', t''} \frac{f(t, \tau) - f(t, t)}{\tau - t} d\tau + \int_{a_\gamma t' + t'', t_0} \frac{f(t, \tau) - f(t, t)}{\tau - t} d\tau, \\ J_1(t_1) = \int_{t', t''} \frac{f(t_1, \tau) - f(t_1, t_1)}{\tau - t_1} d\tau + \int_{a_\gamma t' + t'', t_0} \frac{f(t_1, \tau) - f(t_1, t_1)}{\tau - t_1} d\tau. \end{cases}$$

La première sommande, $J'_1(t)$, concernant le point t , d'après l'inégalité admise (7'), vérifie l'inégalité

$$(27) \quad |J'_1(t)| < k_f \int_{s'}^s \frac{|\tau - t|^{\mu-1} d\tau}{\left[\prod_{\nu=1}^p |\tau - a_\nu| |t - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}} + k_f \int_s^{s''} \frac{|\tau - t|^{\mu-1} d\tau}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| \cdot |\tau - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}},$$

où s' et s'' désignent les longueurs des arcs $a_\gamma t'$ et $a_\gamma t''$. Il en résulte, d'après (17), pour l'intégrale (27) l'inégalité

$$(28) \quad |J'_1(t)| < \text{const. } k_f \left[\int_{s'}^s \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu} (s - \sigma)^{1-\mu}} + \int_s^{s''} \frac{d\sigma}{|t - a_\gamma|^{\alpha+\mu} (\sigma - s)^{1-\mu}} \right],$$

σ désignant la longueur de l'arc variable $a_\gamma \tau$.

D'après l'égalité

$$|t - t'| = |t'' - t| = 2|t - t_1|$$

et les inégalités (17), (19), (25) nous aurons ensuite

$$\int_{s'}^s \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu}(s-\sigma)^{1-\mu}} < \frac{(s-s')^\mu}{\mu s'^{\alpha+\mu}} < \frac{\text{const.}}{|t-a_\gamma|^{\alpha+\mu}} |t-t_1|^\mu,$$

$$\int_s^{s''} \frac{d\sigma}{(\sigma-s)^{1-\mu}} = \frac{(s''-s)^\mu}{\mu} < \text{const.} |t-t_1|^\mu.$$

Nous en concluons que l'intégrale (27) vérifie l'inégalité

$$(29) \quad |J_1'(t)| < \frac{c_3 k_f |t-t_1|^\mu}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t-a_\nu| \cdot |t_1-b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}},$$

c_3 étant une constante positive, ne dépendant que des arcs L . L'inégalité de la même forme on obtient pour l'intégrale analogique, concernant le point t_1 . Passons à l'étude de la différence des intégrales régulières $J_1''(t)$ et $J_1''(t_1)$ dans les sommes (26)

$$(30) \quad J_1''(t) - J_1''(t_1) = \int_{a_\gamma t' + t'' t_0} \frac{[f(t, \tau) - f(t_1, \tau)] - [f(t, t) - f(t_1, t_1)]}{\tau - t} d\tau$$

$$+ \int_{a_\gamma t' + t'' t_0} \frac{t - t_1}{(\tau - t)(\tau - t_1)} [f(t_1, \tau) - f(t_1, t_1)] d\tau.$$

La première, D_1 , des intégrales du membre droit, d'après (7'), vérifie l'inégalité

$$(31) \quad |D_1| < \text{const.} \int_{a_\gamma t' + t'' t_0} \frac{k_f |t-t_1|^{\mu_1} dl_\tau}{|\tau - a_\gamma|^{\alpha+\mu} |\tau - b_\gamma|^{\alpha+\mu} |\tau - t|}$$

$$+ \text{const.} \frac{k_f [|t-t_1|^{\mu_1} + |t-t_1|^\mu]}{|a_\gamma - t|^{\alpha+\mu} |b_\gamma - t_1|^{\alpha+\mu}} \left| \int_{a_\gamma t' + t'' t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} \right|.$$

La première sommande, D_1' , du membre droit de (31), d'après l'inégalité

$$|\tau - t| \geq 2 |t - t_1|, \quad \text{si} \quad \tau \in t't_0' + t_0''t'',$$

admet la limitation

$$(32) \quad |D_1'| < \text{const.} k_f |t-t_1|^{\mu_1-\beta} \left[\int_0^s \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu} |\sigma-s|^{1-\beta}} + \frac{1}{s^{\alpha+\mu}} \int_s^{s_0} \frac{d\sigma}{(\sigma-s)^{1-\beta}} \right]$$

$$< \frac{\text{const.} k_f |t-t_1|^{\mu_1-\beta}}{|t-a_\gamma|^{\alpha+\mu} |t_1-b_\gamma|^{\alpha+\mu}},$$

β étant une constante positive arbitrairement choisi, inférieure à μ_1 . Quant à l'intégrale, figurant dans la seconde sommande (30), son module reste borné,

si $|t - t_1| \rightarrow 0$ et même si $t_0 \rightarrow 0$, à cause de l'égalité des longueurs des arcs $a_\gamma t, t_1 t_0$. En remarquant maintenant qu'on a supposé $\mu < \mu_1$, nous aurons, en somme, pour la première, D_1 , des intégrales (30) l'inégalité

$$(33) \quad |D_1| < \frac{c'_3 k_f |t - t_1|^\mu}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| \cdot |t_1 - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}},$$

où la constante positive c'_3 ne dépend que des arcs L .

Pour la seconde, D_2 , des intégrales dans la somme (30), nous aurons, d'après (7'), la limitation suivante

$$(34) \quad |D_2| < k_f \int_{a_\gamma t'} \frac{\text{const. } |t - t_1| dl_\tau}{|t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu} |\tau - a_\gamma|^{\alpha+\mu} |\tau - t_1|^{1-\mu} |\tau - t|} \\ + k_f \int_{t' t_0} \frac{\text{const. } |t - t_1| dl_\tau}{|t_1 - a_\gamma|^{\alpha+\mu} |\tau - b_\gamma|^{\alpha+\mu} |\tau - t_1|^{1-\mu} |\tau - t|}.$$

En remarquant que tout point à l'extérieur du cercle Γ vérifie les inégalités

$$\frac{1}{2} < \frac{|\tau - t_1|}{|\tau - t|} < \frac{3}{2}$$

et en faisant l'usage des inégalités (25), nous voyons que la première intégrale, D'_2 , dans le membre droit de l'inégalité (34) satisfait à l'inégalité

$$(35) \quad |D'_2| < \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|}{|t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu}} \int_0^{s'} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu} (s - \sigma)^{2-\mu}} \\ = \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|}{|t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu}} \left[\int_0^{\frac{3}{2}s'} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu} (s - \sigma)^{2-\mu}} + \int_{\frac{3}{2}s'}^{s'} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu} (s - \sigma)^{2-\mu}} \right] \\ < \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|}{|t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu}} \left[\frac{1}{s'^{\alpha+1}} + \frac{1}{s'^{\alpha+\mu} (s - s')^{1-\mu}} \right].$$

En profitant des inégalités

$$s' \geq 2 |t - t_1|; \quad 2s' \geq |t - a_\gamma|; \quad s - s' \geq 2 |t - t_1|,$$

nous aurons donc

$$(36) \quad D'_2 < \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|^\mu}{|t - a_\gamma|^{\alpha+\mu} |t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu}}.$$

La seconde intégrale, D''_2 , dans l'inégalité (34) admet la limitation

$$|D''_2| < \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|}{|t - a_\gamma|^{\alpha+\mu} |t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu}} \int_{s''}^{s_0} \frac{d\sigma}{(\sigma - s)^{2-\mu}}$$

d'où, remarque faite des inégalités

$$s_0 - s > s'' - s > |t - t_1|,$$

nous aurons

$$(37) \quad |D_2'| < \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|^\mu}{|t - a_\gamma|^{\alpha+\mu} |t_1 - b_\gamma|^{\alpha+\mu}}.$$

En réunissant les résultats (29), (33), (36), (37), nous aurons la propriété de la première des intégrales (24)

$$(38) \quad |J_1(t) - J_1(t_1)| < \frac{\text{const. } k_f |t - t_1|^\mu}{\left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t_1 - b_v| \right]^{\alpha+\mu}},$$

où la constante positive ne dépend que des arcs L .

Il reste à étudier la différence des secondes intégrales dans les sommes (24), que nous décomposons de la façon suivante

$$(39) \quad \begin{aligned} J_2(t) - J_2(t_1) &= f(t, t) \int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} - f(t_1, t_1) \int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t_1} \\ &= [f(t, t) - f(t_1, t_1)] \int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} \\ &\quad + f(t_1, t_1) \{ [\log(t_0 - t) - \log(t_0 - t_1)] - [\log(t - a_\gamma) - \log(t_1 - a_\gamma)] \}, \end{aligned}$$

la branche continue du logarithme étant fixée.

Or, le module de l'intégrale

$$\int_{a_\gamma t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} = \log \frac{t_0 - t}{t - a_\gamma}$$

reste borné, si $|t - a_\gamma| \rightarrow 0$, à cause de l'égalité des longueurs $s_0 - s_1 = s'$ ensuite on démontre (voir (3) p. 21-25) que les parties réelles et imaginaires de la branche fixée du logarithme

$$\log(t - t_0) = \log|t - t_0| + i \arg(t - t_0)$$

vérifient sur l'arc $a_\gamma b_\gamma$ les inégalités de Hölder sous les formes

$$(40) \quad |\log|t - t_0| - \log|t_1 - t_0|| < \frac{\text{const.}}{|t - t_0|^{\xi+\mu}} |t - t_1|^\mu,$$

$$|\arg(t - t_0) - \arg(t_1 - t_0)| < \text{const. } |t - t_1|^h,$$

ξ et μ étant deux constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité ($\xi + \mu < 1$) et h —exposant dans la propriété admise [4] des arcs L . On suppose que les points arbitraires t et t_1 sont situés sur l'arc $a_\gamma b_\gamma$ du même côté du point t_0 et que $|t - t_0| < |t_1 - t_0|$. Nous concluons donc, d'après (7) et (7'), que la différence (39) vérifie l'inégalité

$$(41) \quad |J_2(t) - J_2(t_1)| < \frac{c_4 M_f + c'_4 k_f}{\left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t_1 - b_v| \right]^{\alpha+\mu}} |t - t_1|^\mu$$

sous l'hypothèse: $\mu < h$; c_4 , c'_4 sont des constantes positives ne dépendant que de L .

Il reste enfin à étudier la deuxième, $I_2(t)$, intégrale régulière (22). Nous avons

$$\begin{aligned} I_2(t) - I_2(t_1) &= \int_{t_0 b_\gamma} \frac{f(t, \tau) d\tau}{\tau - t} - \int_{t_0 b_\gamma} \frac{f(t_1, \tau) d\tau}{\tau - t_1} \\ &= \int_{t_0 b_\gamma} \frac{f(t, \tau) - f(t_1, \tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{t_0 b_\gamma} \frac{t - t_1}{(\tau - t)(\tau - t_1)} f(t_1, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après (7) et (7'),

$$\begin{aligned} (42) \quad |I_2(t) - I_2(t_1)| &< \text{const. } k_f \int_{s_0}^{l_\gamma} \frac{|t - t_1|^{\mu_1} d\sigma}{\sigma^{\alpha+\mu}(l_\gamma - \sigma)^{\alpha+\mu}(\sigma - s)} \\ &\quad + \frac{\text{const.}}{s^\beta} M_f \int_{s_0}^{l_\gamma} \frac{|t - t_1| d\sigma}{(\sigma - s)^2(l_\gamma - \sigma)^\beta} \\ &< \text{const. } k_f \frac{|t - t_1|^\mu}{s^{\alpha+\mu}} \int_{s_0}^{l_\gamma} \frac{d\sigma}{(l_\gamma - \sigma)^{\alpha+\mu}(\sigma - s_0)^{1-\mu_1+\mu}} \\ &\quad + \frac{\text{const.}}{s^\beta} M_f |t - t_1|^\mu \int_{s_0}^{l_\gamma} \frac{d\sigma}{(\sigma - s)^{1+\mu}(l_\gamma - \sigma)^\beta}. \end{aligned}$$

Nous en concluons, par la méthode utilisée dans (35), la limitation de la même forme que (38). En réunissant les résultats (20), (38), (41), (42), nous arrivons à l'inégalité (16) pour la fonction $F(t)$.

Le résultat obtenu est vrai, si la longueur de l'arc $a_\gamma t$ est moindre qu'un quart de l'arc $a_\gamma b_\gamma$ et le point t_1 occupe une position quelconque sur l'arc tb_γ . Par raison de symétrie, étude analogue prouve que l'inégalité de la forme (16) est vraie, si la longueur de l'arc $t_1 b_\gamma$ est plus petite qu'un quart de l'arc $a_\gamma b_\gamma$ et le point t occupe une position quelconque sur l'arc $a_\gamma t_1$. Il reste le cas où les points t et t_1 sont situés sur l'arc $T_1 T_2 \subset a_\gamma b_\gamma$, où les longueurs des arcs $a_\gamma T_1$ et $T_2 b_\gamma$ sont égales à un quart de l'arc $a_\gamma b_\gamma$. Mais dans ce cas le coefficient de Hölder dans la propriété (7') de la fonction $f(t, \tau)$ est borné et on arrive à l'inégalité de la forme (16), en répétant d'une façon analogue, mais plus simple, les raisonnements précédents. Nous en concluons donc la thèse (16) du théorème 2, quelque soit la position des points t, t_1 sur l'ensemble des arcs L .

Le théorème démontré est une généralisation du théorème de PLEMELJ-PRIVALOV sur l'intégrale du type de Cauchy (voir (3) p. 51-55).

Remarque. La thèse (16) du théorème 2 reste vraie, si nous n'admettons pas la propriété (4) pour les arcs L entiers, mais seulement pour les arcs $a_\nu t'_\nu$ et $b_\nu t''_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$) situés sur les arcs $a_\nu b_\nu$ au voisinage arbitrairement petit de chaque des extrémités a_ν et b_ν .

En effet, d'après les études antérieures, la propriété (4) est alors vraie si un au moins des points t, t_1 est situé sur les arcs $a_\nu t'_\nu$ et $b_\nu t''_\nu$. Dans le cas, où les deux points t, t_1 sont situés sur l'arc intérieur $t'_\nu t''_\nu$, on démontrera d'une façon analogue au précédente, mais plus simple, la propriété sous la forme de l'in-

égalité

$$|F(t) - F(t_1)| < \text{const.} \cdot |t - t_1|^\mu,$$

étant le cas particulier de l'inégalité (16). On utilise dans ce but la décomposition (11), en remarquant que maintenant le coefficient de Hölder pour la fonction $f(t, \tau)$ est borné et que les fonctions logarithmiques $\log(t - a_\gamma)$, $\log(t - b_\gamma)$ vérifient sur les arcs $t'_\nu t''_\nu$ la condition de Lipschitz, les dérivées de ces fonctions étant bornées sur $t'_\nu t''_\nu$.

L'usage des propriétés (40) des fonctions logarithmiques, basé sur la propriété (4), n'est donc nécessaire pour les arcs intérieurs $t'_\nu t''_\nu$.

4. Résolution du problème. L'équation intégrale (3) étant irrésoluble par les méthodes de l'analyse classique, nous donnerons la preuve d'existence de la solution par l'application du théorème topologique de J. SCHAUDER [2] sur le point invariant d'une transformation, déjà cité.

Soit donc un espace fonctionnel Λ composé des toutes les fonctions complexes $\varphi(t)$, définie dans l'ensemble des points intérieures des arcs L sur le plan de la variable complexe, continues en tout point t des arcs L , non coïncidant avec les extrémités a_ν , b_ν et vérifiant relativement à ces points les limitations faibles de la forme

$$(43) \quad |\varphi(t)| < \frac{\text{const.}}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| \cdot |t - b_\nu| \right]^\alpha}.$$

La constante α est fixée arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle

$$(43') \quad \frac{\mu r}{1 - r} < \alpha < 1 - \mu,$$

ce qui est possible, d'après la supposition: $\mu + r > 1$. Nous rappelons que les constantes μ et r sont données par les propriétés (5') et (6) de la fonction F . La constante fixée α a la valeur unique pour tout espace Λ . La constante dans le numérateur de la limitation (43) prend toutes les valeurs positives possibles.

On définit la somme de deux points $[\varphi_1(t)]$, $[\varphi_2(t)]$ par la formule

$$[\varphi_1(t)] + [\varphi_2(t)] = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]$$

et le produit du point $[\varphi(t)]$ par un nombre réel λ par la formule

$$\lambda[\varphi(t)] = [\lambda\varphi(t)].$$

Ensuite on définit la norme du point $[\varphi(t)]$ par la borne supérieure du produit

$$(44) \quad ||\varphi(t)|| = \sup_{t \in L} \left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu|^{\alpha+\mu} |t - b_\nu|^{\alpha+\mu} |\varphi(t)| \right]$$

et la distance $\delta(\varphi_1, \varphi_2)$ des deux points $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ par la formule

$$(45) \quad \delta(\varphi_1, \varphi_2) = ||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

L'espace Λ est *linéaire* et *normé*, en outre on voit qu'il est *complet*, puisque la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence

d'une suite de points $\{\varphi_n(t)\}$ dans l'espace Λ , au sens de la norme (44). L'espace Λ est donc un espace de *Banach*.

Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble E de tous les points $[\varphi(t)]$, ayant les propriétés suivantes

$$(46) \quad \|\varphi(t)\| \leq \rho, \quad \left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t_1 - b_v| \right]^{\alpha+\mu} \cdot |\varphi(t) - \varphi(t_1)| \leq \kappa |t - t_1|^\mu,$$

ρ et κ étant des nombres positifs, fixés arbitrairement, $\mu < 1$ est l'exposant positif, fixé par la propriété admise (6) de la fonction F . On a supposé, comme toujours, que le point t_1 suit le point t , si t et t_1 sont situés sur le même arc.

L'ensemble E est évidemment *fermé*, puisque le point limite d'une suite arbitraire de points, vérifiant les conditions (46), vérifie aussi ces conditions. En outre l'ensemble E est *convexe*, en effet, si les deux points $[\varphi_1(t)]$ et $[\varphi_2(t)]$ vérifient (46), alors leur combinaison linéaire $[\gamma\varphi_1 + (1 - \gamma)\varphi_2]$ vérifie aussi les conditions (46), lorsque γ varie de 0 à 1.

D'après la forme de l'équation intégrale proposée (3), transformons l'ensemble E par la relation

$$(47) \quad \psi(t) = \lambda \int_L \frac{F[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau$$

qui à tout point $[\varphi(t)]$ de l'ensemble E fait correspondre un point $[\psi(t)]$ de l'espace Λ . Cherchons la conditions pour que tout point transformé $[\psi(t)]$ de l'ensemble E fasse partie de cet ensemble. Remarquons donc que, d'après la supposition (5'), nous avons pour l'ensemble E l'inégalité suivante

$$(48) \quad |F[t, \tau, \varphi(\tau)]| < m_F |\varphi(\tau)|^r + m'_F < \frac{m_F \rho^r + C_2 m'_F}{\left[\prod_{v=1}^p |\tau - a_v| |\tau - b_v| \right]^{(\alpha+\mu)r}},$$

où l'on a désigné

$$(49) \quad C_2 = \sup_{t \in L} \left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| |t - b_v| \right]^{(\alpha+\mu)r}.$$

C_2 est une constante, qui ne dépend que de la forme des arcs L .

Ensuite, d'après les suppositions (7), (7') et la propriété (46), nous concluons que la fonction F vérifie la condition de Hölder suivante

$$(50) \quad \begin{aligned} & |F[t, \tau, \varphi(\tau) - F[t_1, \tau_1, \varphi(\tau_1)]| \\ & < k_f \left[|t - t_1|^{\mu_1} + |\tau - \tau_1|^\mu + \frac{\kappa |\tau - \tau_1|^\mu}{\left[\prod_{v=1}^p |\tau - a_v| |\tau_1 - b_v| \right]^{\alpha+\mu}} \right] \\ & < \frac{k_F(\kappa + C_3)}{\left[\prod_{v=1}^p |\tau - a_v| |\tau_1 - b_v| \right]^{\alpha+\mu}} [|t - t_1|^{\mu_1} + |\tau - \tau_1|^\mu], \end{aligned}$$

où $C_3 = \max(1, C_2)$ et τ_1 suit τ dans le cas du même arc.

En s'appuyant maintenant sur les théorème 1, nous concluons, d'après (48) et (50), que le point transformé (47) vérifie l'inégalité suivante

$$(51) \quad |\psi(t)| < |\lambda| \frac{C(m_F \rho^r + C_2 m_F') + C' k_F(\kappa + C_3)}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| |t - b_\nu| \right]^\alpha},$$

remarque faite encore qu'on a $(\alpha + \mu)r < \alpha$, d'après le choix de la constante α dans l'intervalle (43'). D'après le théorème 2, nous concluons ensuite que la fonction transformée vérifie la condition de Hölder sous la forme

$$(52) \quad |\psi(t) - \psi(t_1)| < |\lambda| \frac{C(m_F \rho^r + C_2 m_F') + C' k_F(\kappa + C_3)}{\left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| \cdot |t_1 - b_\nu| \right]^{\alpha+\mu}} |t - t_1|^\mu.$$

En comparant les inégalités (51), (52) avec les inégalités (46), nous en concluons que l'ensemble E' de points transformés $[\psi(t)]$ ferait partie de l'ensemble E , si les constantes du problème vérifient les conditions suivantes

$$(53) \quad \begin{aligned} |\lambda| [C(m_F \rho^r + C_2 m_F') + C' k_F(\kappa + C_3)] C_4 &\leq \rho, \\ |\lambda| [C_1(m_F \rho^r + C_2 m_F') + C'_1 k_F(\kappa + C_3)] &\leq \kappa, \end{aligned}$$

où

$$C_4 = \sup_{t \in L} \left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| \cdot |t - b_\nu| \right]^\mu.$$

Nous ajoutons que la propriété admise: $\mu < \mu_1$, $\mu + r < 1$, $\mu < h$, ne restreint pas la généralité du raisonnement, puisque dans le cas, où cette condition n'était pas vérifiée, on peut toujours abaisser la valeur μ , les valeurs μ_1 , r , h étant fixées, pour que l'on ait à la fois; $\mu < \mu_1$, $\mu + r < 1$, $\mu < h$.

Avant d'appliquer le théorème de SCHAUDER, nous démontrerons encore les deux théorèmes suivants.

Théorème 3. *La transformation de l'ensemble E par la relation (47) est continue dans l'espace Λ .*

Démonstration. Soit une suite arbitraire $\{\varphi_n(t)\}$ de points de l'ensemble E convergente vers le point $\varphi(t)$ de cet ensemble, c. à d. on a

$$(54) \quad \delta(\varphi_n, \varphi) = \sup_{t \in L} \left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu|^{\alpha+\mu} |t - b_\nu|^{\alpha+\mu} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \right] \rightarrow 0.$$

Pour démontrer le théorème, il faut et il suffit démontrer que la suite $\{\psi_n(t)\}$ de points transformés par la relation (47) converge vers le point $\psi(t)$, qui correspond au point limite $\varphi(t)$ aussi par la relation (47).

Étudions la différence

$$(55) \quad \psi_n(t) - \psi(t) = \int_L \frac{F[t, \tau, \varphi_n(\tau)]}{\tau - t} d\tau - \int_L \frac{F[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Considérons donc un arc l , étant une portion d'un arc $a_\gamma b_\gamma$ contenant le point t , dont l'une des extrémités peut coïncider avec les extrémités a_γ où b_γ . Sans restreindre la généralité, nous supposons que le point t soit situé au milieu de l'arc l , si cet arc avec ses extrémités l' , l'' est situé à l'intérieur de l'arc $a_\gamma b_\gamma$, où bien que le point t est situé sur telle partie de l'arc l que la longueur de l'arc $l't$ est moindre où égale à la longueur tl'' , si l'extrémité l' coïncide avec l'extrémité a_γ où b_γ .

Décomposons chaque des intégrales (55) en somme des intégrales

$$(56) \quad \begin{aligned} \psi_n(t) &= \psi_n^I(t) + \psi_n^{L-I}(t), \\ \psi(t) &= \psi^I(t) + \psi^{L-I}(t), \end{aligned}$$

étendues à l'arc l et à la partie extérieure $L - l$. Nous écrivons maintenant

$$(57) \quad \begin{aligned} \psi_n^I(t) &= \int_l \frac{F[t, \tau, \varphi_n(\tau)] - F[t, t, \varphi_n(t)]}{\tau - t} d\tau + F[t, t, \varphi_n(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t}, \\ \psi^I(t) &= \int_l \frac{F[t, \tau, \varphi(\tau)] - F[t, t, \varphi(t)]}{\tau - t} d\tau + F[t, t, \varphi(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t}. \end{aligned}$$

La première des intégrales, $I_n(t)$, de la première somme admet la faible singularité et, d'après la limitation (50), vérifie l'inégalité

$$(58) \quad \begin{aligned} |I_n(t)| &< \int_{l', l''} \frac{k_F(\kappa + C_3) |\tau - t|^{\mu-1}}{\left[\prod_{v=1}^p |\tau - a_v| \cdot |t - b_v| \right]^{\alpha+\mu}} dl_\tau \\ &+ \int_{l, l'''} \frac{k_F(\kappa + C_3) |\tau - t|^{\mu-1}}{\left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |\tau - b_v| \right]^{\alpha+\mu}} dl_\tau. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre un tel nombre positif η_ϵ , suffisamment petit, que pour tout arc l sur L de longueur η_ϵ sera vraie l'inégalité

$$(59) \quad \sup_{l \in L} \left\{ \left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t - b_v| \right]^{\alpha+\mu} |I_n(t)| \right\} < \frac{\epsilon}{3}$$

quelque soit n , donc aussi pour la fonction limite $\varphi(t)$.

La seconde des intégrales dans la première formule (57) vérifie, d'après la limitation (48), l'inégalité

$$(60) \quad \left| F[t, t, \varphi_n(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t} \right| < \frac{m_F \rho^r + C_2 m'_F}{\left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| |t - b_v| \right]^{(\alpha+\mu)r}} \left| \log \frac{t - a_\gamma}{t - b_\gamma} \right|$$

où $(\alpha + \mu)r < \alpha$. Il en résulte qu'à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre un tel nombre positif η'_ϵ , que pour tout arc l sur L de longueur η'_ϵ sera

vraie l'inégalité

$$(61) \quad \sup_{t \in L} \left\{ \left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t - b_v| \right]^{\alpha+\mu} \left| F[t, t, \varphi_n(t)] \int_t \frac{d\tau}{\tau - t} \right| \right\} < \frac{\epsilon}{3}$$

quelque soit n , donc aussi pour la fonction limite $\varphi(t)$. Les intégrales (56) étendues à la partie extérieure $L - l$ sont régulières et, d'après la supposition (6), vérifient l'inégalité

$$(62) \quad |\psi_n^{L-l}(t) - \psi^{L-l}(t)| < \int_{L-l} \frac{2k_F |\varphi_n(\tau) - \varphi(\tau)| d\tau}{\tau - t}.$$

Mais, d'après la supposition sur la situation du point t à l'intérieur de l'arc l , la distance $|\tau - t|$ admet une borne inférieure positive, si $t \in L - l$. Donc, en fixant pour l'arc l la longueur égale au plus petit des deux nombres η_ϵ , η'_ϵ , nous pouvons, d'après (54), au nombre ϵ faire correspondre un tel indice N_ϵ qu'on ait

$$(63) \quad \sup_{t \in L} \left\{ \left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t - b_v| \right]^{\alpha+\mu} |\psi_n^{L-l}(t) - \psi^{L-l}(t)| \right\} < \frac{\epsilon}{3},$$

si $n \geq N_\epsilon$. En rapprochant les résultats (53), (55) et (57), nous concluons que

$$(64) \quad \delta(\psi_n, \psi) < \epsilon, \quad \text{si } n \geq N_\epsilon,$$

ce qui confirme la thèse du théorème 3.

Théorème 4. *L'ensemble E' , transformé de l'ensemble E par la relation (47), est compact.*

Démonstration. Conformément à la définition, l'ensemble E' est compact, si de toute suite $\{\psi_n(t)\}$ de ses points on peut extraire une sous-suite $\{\psi_{k_n}(t)\}$ convergente.

Considérons donc sur tout arc $a_v b_v$ deux arcs $a_v t_v$ et $t'_v b_v$ de longueur suffisamment petite, pour que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$(65) \quad \sup_{t \in L_0} \left\{ \left[\prod_{v=1}^p |t - a_v| \cdot |t - b_v| \right]^{\alpha+\mu} |\psi_n(t)| \right\} < \epsilon$$

pour tous les termes d'une suite $|\psi_n(t)|$ de points de l'ensemble E' , arbitrairement choisie. On a désigné par L_0 l'ensemble de points des tous les arcs $a_v t_v$ et $t'_v b_v$. Nous signalons qu'il est possible à réussir l'inégalité (65), grâce à la limitation (51), vérifiée par tous les points de l'ensemble E' .

Remarquons maintenant, que sur l'ensemble des arcs $t_v t'_v$, les fonctions $\psi_n(t)$ sont bornées et, d'après (46), vérifient la condition de Hölder

$$|\psi_n(t) - \psi_n(t_1)| < k_\psi |t - t_1|^\mu$$

avec le même coefficient de Hölder fixé. Donc les fonctions de la suite $\{\psi_n(t)\}$ sont également continues et bornées sur l'ensemble des arcs $t_v t'_v$, par conséquent, d'après le théorème connu d'ARZELÀ, de la suite fonctionnelle $\{\psi_n(t)\}$ on peut

extraire une sous-suite $\{\psi_{k_n}(t)\}$ uniformément convergente dans l'ensemble des arcs t_ν, t'_ν .

Il en résulte, qu'à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre un tel indice N_ϵ , pour quel'on ait

$$(66) \quad \sup_{t \in L - L_0} \left\{ \left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| |t - b_\nu| \right]^{\alpha + \mu} |\psi_{k_n}(t) - \psi_{k_m}(t)| \right\} < \epsilon,$$

si $n > N_\epsilon$, $m > N_\epsilon$. L'inégalité (65) étant vérifiée par tous les éléments de la suite $\{\psi_n(t)\}$, nous en concluons que la suite de points $\{\psi_{k_n}(t)\}$ vérifie la condition de Cauchy:

$$(67) \quad \sup_{t \in L} \left\{ \left[\prod_{\nu=1}^p |t - a_\nu| |t - b_\nu| \right]^{\alpha + \mu} |\psi_{k_n}(t) - \psi_{k_m}(t)| \right\} \\ = ||\psi_{k_n}(t) - \psi_{k_m}(t)|| < \epsilon \quad (n, m > N_\epsilon),$$

conformément à la définition de la norme (44).

Or, l'espace Λ est complet, donc la condition (67) de Cauchy est suffisante, pour que la suite de points $\{\psi_{k_n}(t)\}$ soit convergente dans l'espace Λ , par conséquent l'ensemble transformé E' est compact, c.q.f.d.

Les théorèmes démontrés, nous permettent de conclure, d'après le théorème cité de J. SCHAUDER (si les inégalités (53) sont satisfaites), l'existence dans l'ensemble E d'un point $\varphi^*(t)$, invariant relativement à la transformation (47), c. à d. l'existence de la solution $\varphi^*(t)$ de l'équation intégrale (3) proposée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 5. *Si les conditions I, II, (53) sont satisfaites, alors il existe au moins une solution de l'équation intégrale singulière (3) pour les arcs non fermés.*

En terminant notre travail, nous ferons encore l'analyse des conditions (53) d'existence de la solution $\varphi(t)$ de l'équation intégrale proposée. Nous voyons que la solution existe toujours, si le module du paramètre λ est suffisamment petit, notamment si l'on a à la fois

$$(68) \quad |\lambda| \leq \frac{C_1^{-1}}{C(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + C' k_F (\kappa + C_3)}, \\ |\lambda| \leq \frac{\kappa}{C_1 (m_F \rho^r + C_2 m'_F) + C'_1 k_F (\kappa + C_3)}.$$

Nous rappelons que le choix des constantes positives κ et ρ est arbitraire. Il est donc naturel de profiter de cette circonstance et de choisir tellement les valeurs des constantes κ et ρ , pour que l'intervalle du paramètre λ , assurant l'existence de la solution, soit le plus grand possible.

Étudions donc l'intervalle pour $|\lambda|$ en faisant varier dans les expressions (68) les valeurs de κ et ρ de zéro à l'infini. En fixant d'abord la valeur positive ρ ,

on voit que la valeur du premier quotient (68) *diminue* de $\rho C_4^{-1}[C(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + C' k_F C_3]^{-1}$ jusqu'à zéro et la valeur du second quotient augmente de zéro jusqu'à $1/C'_1 k_F$, lorsque la valeur de κ varie de zéro à l'infini.

Il en résulte que l'intervalle pour $|\lambda|$ aura la plus grande mesure $\lambda_0(\rho)$, si κ a une valeur κ_0 vérifiant l'équation

$$\frac{C_4^{-1}}{C(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + C' k_F (\kappa_0 + C_3)} = \frac{\kappa_0}{C_1(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + C'_1 k_F (\kappa_0 + C_3)},$$

d'où résulte

$$\kappa_0(\rho) = \frac{(\rho C_4^{-1} C'_1 - C' C_3) k_F - C(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + \sqrt{\Delta}}{2C' k_F}$$

où

$$\Delta = [C(m_F \rho^r + C_2 m'_F) - (\rho C_4^{-1} C'_1 - C' C_3) k_F]^2 + 4C' k_F C_4^{-1} [C_1(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + C'_1 k_F C_3]$$

et ensuite

$$\lambda_0(\rho) = \frac{2C_4^{-1}}{C(m_F \rho^r + C_2 m'_F) + (\rho C_4^{-1} C'_1 + C' C_3) k_F + \sqrt{\Delta}}.$$

Si ρ croît de zéro à l'infini, la valeur correspondante $\lambda_0(\rho)$ croît de zéro vers la limite

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_0(\rho) = \frac{C_1^2 C_4}{(1 + C^2 C'_1 C_4) k_F}.$$

Nous en concluons que, si le paramètre λ vérifie l'inégalité

$$(69) \quad |\lambda| < \frac{C_1^2 C_4}{(1 + C_1^2 C'_1 C_4) k_F},$$

alors il existe des valeurs positives κ , ρ vérifiant les inégalités (53) et, par conséquent, il existe au moins une solution de l'équation intégrale proposée (3). Nous rappelons que les constantes positives C_1 , C'_1 , C_4 ne dépend que de la forme géométrique des arcs L et de r . Nous signalons que l'existence de la solution ne dépend que du produit $|\lambda| k_F$ et est indépendante des constantes m_F et m'_F .

D'une façon tout à fait analogue on peut étudier le système d'équations intégrales singulières de la forme

$$\varphi_\nu(t) = \int_L \frac{F_\nu[t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)]}{\tau - t} d\tau$$

($\nu = 1, 2, \dots, n$) aux n fonctions inconnues $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_n(t)$.

TRAVAUX CITÉS

- [1] A. I. GOUSSÉÏNOV, Sur une équation intégrale (en russe). *Izvestia AN SSSR*, **12** (1948), 193.
- [2] J. SCHAUDER, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Mathematica*, 1930.
- [3] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equation*. P. Noordhoff N. V., Gröningen, Holland, 1953.
- [4] W. POGORZELSKI, Sur les équations intégrales à singularité polaire. *Comptes Rendus de la Soc. Politechnique Varsovie*, 1924.
- [5] W. POGORZELSKI, Sur l'équation intégral-différentielle non linéaire à singularité polaire. *Annales de la Société Pol. d. Mathém.*, 1952.
- [6] W. POGORZELSKI, Sur l'équation intégrale non linéaire de seconde espèce à forte singularité. *Annales Polonici Mathematici*, 1954.
- [7] W. POGORZELSKI, Problème aux limites d'Hilbert généralisé. *Annales Polonici Mathematici*, 1955.
- [8] J. WOLSKA, Sur les équations intégrales et intégral-différentielles à singularité polaire. *Prace Matem.-Fiz.*, **48**, Varsovie (1952).
- [9] D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ, Sur un système d'équations intégrales non linéaires de seconde espèce à une infinité de fonctions inconnues à singularité forte. *Bull. de l'Ac. Pol. d.Sc.* **5**(1957).
- [10] D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ, Sur l'application de la méthode des approximations successives à l'équation intégrale à forte singularité. *Annales Polonici Mathematici* (sous presse).

Institute Mathématique
de l'Académie Polonaise des Sciences
Varsovie