Sopra il Problema del “Lacet”

GIUSEPPE COLOMBO

Memoria presentata da A. TONOLO.

In questo lavoro si tratta del problema tecnico, che ormai può annoverarsi tra quelli classici, del serpeggiamento di un carro, trainato in moto uniforme, viaggiante su rotaie. Molti sono stati i tentativi fatti per affrontare il problema con la maggiore precisione e generalità, restando al massimo aderenti al fenomeno reale che si presenta nel moto dei treni. Non si può certamente dire che dal punto di vista fisico matematico il problema sia stato affrontato sistematicamente e rigorosamente. La trattazione che mi sembra più efficace, restando nel campo lineare, continua ad essere quella, ormai ventennale, di Y. ROCARD.¹

Volendo proseguire nella via indicata da ROCARD, che credo la migliore, il primo passo in avanti mi sembra quello tentato in questo lavoro, che vuole portare un contributo, che mi sembra nuovo, alla ricerca. Il problema in oggetto è un vero problema meccanico e noi pensiamo, seguendo POINCARÉ, che esso, come tale, non possa essere che più o meno risolto.

La novità, se così può dirsi, della presente impostazione consiste in ciò. Assunto completamente rigido il sistema costituito dallo chassis, supposti gli assi dei carrelli rigidamente solidali con lo chassis stesso e infine le ruote rigide e rigidamente collegate con gli assi, per non dover affrontare difficoltà più gravi, come le discontinuità di contatto tra ruote e rotaie (discontinuità insorgenti dal fatto che cesserebbe, se si supponessero rigide anche le rotaie e l'armamento, la possibilità di simultaneo contatto di tutte e quattro le ruote con le rotaie), si è pensato di trasferire all'armamento tutte le elasticità del sistema nel modo che sarà appresso indicato. Si suppone inoltre che le sezioni della ruota e delle rotaie siano di forma parabolica anziché lineare come nella prima approssimazione, senza voler giungere però a considerare le possibilità di urto della parte inferiore delle ruote contro il fungo delle rotaie, cioè mantenendoci nei limiti di movimento di *lacet non violento*.

Essendoci posti inoltre nel caso semplice di completa simmetria del carico si perviene alla impostazione generale del problema che, nonostante tutte le ipotesi semplificative necessariamente assunte, si presenta tuttavia ancora molto complesso, rivelando, tra l'altro, che in questo ordine di approssimazione il moto di *lacet* del carro è accoppiato, diversamente che nell'approssimazione lineare, agli altri movimenti (rollio, beccheggio, *etc.*) ed inoltre naturalmente al moto delle rotaie e dell'armamento.

¹Y. ROCARD, *La stabilité de routes des locomotives*, Act. Sc. et Indus. Hermann, Paris (1935).

Se ci si mette nel caso, abbastanza conforme al caso reale, di facile cedevolezza dell'armamento sotto il carico, cioè di piccolo coefficiente di elasticità verticale di detto armamento, si giunge ad un sistema che non contiene che le variabili caratteristiche del moto di puro *lacet*. Questo sistema si presenta come una tra le possibili seconde approssimazioni di quello di ROCARD. In esso è tenuto conto della non-linearità dei profili e della non-linearità dei coefficienti di pseudostrisciamento in funzione delle componenti delle velocità di pseudostrisciamento, adottando una legge che è del tipo di quella di LÉVI.²

Assunto che le forze inerziali del carrello risultino trascurabili rispetto alle altre che intervengono nel moto, si può mostrare che la non-linearità dei profili non porta come conseguenza una non-linearità nelle equazioni dinamiche, almeno in questo ordine di approssimazione. Sicchè la suddetta non-linearità compare solo attraverso la legge di pseudostrisciamento sopra citata.

Un calcolo numerico, necessario per saggiare la bontà della schematizzazione comporta una notevole mole di lavoro che purtroppo non si può affrontare, se non si ha a disposizione, per un periodo sufficiente, una delle moderne calcolatrici.

In mancanza di meglio si è voluto dare un teorema di stabilità per le soluzioni di questo sistema che diremo sistema ridotto del moto di *lacet*. Questo teorema di stabilità, valevole sotto certe ipotesi, se non può dare la certezza della bontà della schematizzazione, può per lo meno, rappresentare un aspetto positivo della stessa, e dare assicurazioni sulla convergenza della soluzione, nel caso di una eventuale calcolazione numerica.

Ferma restando l'instabilità naturale del moto ideale di regime del carro, questo teorema di stabilità ci assicura la esistenza di moti asintotici (certamente in generale di tipo ergodico) del carro (supposto che questo e la via soddisfino ad opportune condizioni strutturali), in corrispondenza ai quali il carro stesso compirà oscillazioni di combinazione intorno al suddetto moto di regime.

Il teorema fornisce altresì degli estremi superiori per i massimi raggiunti, in corrispondenza a questi moti asintotici, dalle variabili interessate nel moto di *lacet* e dalle loro derivate.

1. Considerazioni preliminari sulla rotaia. Si consideri la sezione Σ della rotaia, destra rispetto al senso di marcia, fatta in corrispondenza al punto di contatto P'_1 della ruota R'_1 (avanti destra), quando il carro $\mathcal{C}$ è in una posizione generica e sia Σ^* la configurazione di Σ nella posizione che essa assume quando $\mathcal{C}$ è in posizione centrale rispetto alla strada ed in condizioni ideali di moto di puro rotolamento (per dire ciò in breve diremo che $\mathcal{C}$ è in $\mathcal{C}^*$) e la ruota R'_1 tocca la rotaia in un punto Q'_1 della stessa Σ . Quanto si è detto ha senso solo in quanto si supponga che ogni sezione della rotaia si sposti nel proprio piano in corrispondenza al generico moto di $\mathcal{C}$ ed al generico istante.

Se indichiamo inoltre con α l'inclinazione sull'orizzontale della tangente in

²M. R. LÉVI, *Note sur les interactions des rails et des roues. Passage graduel du roulement au glissement*, loc. cit. [1]; ROCARD, loc. cit. [1], I^{re} Partie, p. 53.

Q'_1 a Σ^* , quando $\mathcal{C}$ è in $\mathcal{C}^*$ la forza Φ'_1 esplicita da R'_1 su Σ^* ha componente verticale $\frac{1}{4}p$ se p è il peso del carro e componente orizzontale in modulo uguale ad $\frac{1}{4}\alpha p$; inoltre quest'ultima componente è orientata verso l'esterno della via mentre la prima è orientata verso il basso. Quando $\mathcal{C}$ si trova in $\mathcal{C}^*$ è invece nullo il componente della Φ'_1 lungo l'asse della via in quanto il moto, di puro rotolamento, di $\mathcal{C}$ avviene per inerzia qualora, come noi faremo, si trascurino la resistenza di mezzo e l'attrico volvente.

Assunto un sistema di riferimento cartesiano O, ξ, η, ζ , ortogonale destrorso, con l'origine sull'asse della strada al livello di Q'_1 , l'asse ξ diretto come l'asse della strada ed orientato nella direzione di avanzamento, l'asse ζ verticale orientato verso il basso, sarà

$$(1) \quad \eta_{Q'_1} = h, \quad \zeta_{Q'_1} = 0.$$

Porremo invece, indicando con P'_1 il punto di Σ^* che corrisponde a P'_1 su Σ ,

$$(2) \quad \eta_{P'_1} = h + \lambda'_1, \quad \zeta_{P'_1} = f(\lambda'_1) = f(\eta_{P'_1} - h),$$

assumendo per semplicità come equazione della sola parte di profilo che ci interessa la seguente

$$(3) \quad f(\lambda) = -\alpha\lambda + \beta\lambda^2,$$

ove β è scelto opportunamente in base alla forma della sezione della rotaia ed ove, si noti fin d'ora, i valori di λ che entrano in gioco sono tali per cui $\beta\lambda^2$ non è trascurabile rispetto ad $\alpha\lambda$ ma è da ritenersi dello stesso ordine.

Siano

$$(4) \quad X = X'_1, \quad Y = Y'_1 + \frac{1}{4}\alpha p, \quad Z = Z'_1 + \frac{1}{4}p$$

le componenti dell'incognita azione Φ'_1 esplicita da R'_1 su Σ in P'_1 quando $\mathcal{C}$ è nella generica condizione di posizione e di moto.

Trascureremo per ora la deformazione infinitesima locale della rotaia attorno al punto di contatto con la ruota e supporremo che lo spostamento di detta rotaia, corrispondente al passaggio dalla sollecitazione $\Phi'_1 \equiv (0, \frac{1}{4}\alpha p, \frac{1}{4}p)$ applicata in Q'_1 alla Φ'_1 di componenti (4) applicata in P'_1 , avvenga così lentamente da poter trascurare le forze inerziali della rotaia e di quella parte di armamento che ne è interessata, e che lo spostamento stesso sia, come detto sopra, uno spostamento rigido piano. Della deformazione locale terremo conto invece nella valutazione delle forze di pseudostrisciamento che intervengono quando $\mathcal{C}$ non è in $\mathcal{C}^*$.

Denotiamo con η'_1, ζ'_1 le coordinate di P'_1 e con u'_1, v'_1 le componenti dello spostamento $P'_1 P'_1$, infine con ϵ'_1 l'angolo della tangente in P'_1 a Σ con la tangente in P'_1 a Σ^* .

Per le ipotesi fatte più sopra si potrà ritenere che u'_1, v'_1, ϵ'_1 siano funzioni delle sole Y'_1, Z'_1, λ'_1 e scrivere quindi

$$(5) \quad u'_1 = f_1(y'_1, z'_1, \lambda'_1), \quad v'_1 = f_2(y'_1, z'_1, \lambda'_1), \quad \epsilon'_1 = \varphi(y'_1, z'_1, \lambda'_1).$$

La prima delle ipotesi semplificative, che occorrerà fare, consiste nel sostituire

alle (5), le seguenti

$$(6) \quad \begin{aligned} u'_1 &= c_{11}Y'_1 + c_{12}Z'_1 + \gamma_1\lambda'_1, & v'_1 &= c_{21}Y'_1 + c_{22}Z'_1 + \gamma_2\lambda'_2, \\ \epsilon'_1 &= \delta_1Y'_1 + \delta_2Z'_1 + \epsilon\lambda'_1, \end{aligned}$$

ove c_{rs} , γ_i , δ_i , ϵ , sono coefficienti caratteristici della rotaia e dell'armamento.

Il significato dei coefficienti risulta dalle seguenti considerazioni. Si ponga $\lambda'_1 = 0$, si supponga cioè che P'_1 coincida con Q'_1 , ed inoltre $Z_1 = 0$, allora si ha che $c_{11}Y'_1$, $c_{21}Y'_1$, dà le componenti dello spostamento di Q'_1 corrispondente al passaggio della sollecitazione da Φ'_1 applicato in Q'_1 , alla forza Φ'_1 applicata sempre in Q'_1 ; $\delta_1Y'_1$ dà la rotazione della tangente alla Σ in Q'_1 per effetto della stessa variazione di carico; analogamente per i coefficienti c_{12} , c_{22} , δ_2 . Si ponga invece $Y_1 = Z_1 = 0$ allora $\gamma_1\lambda'_1$, $\gamma_2\lambda'_1$ sono le componenti dello spostamento di P'_1 conseguente all'applicazione della coppia — Φ'_1 applicato in Q'_1 e Φ'_1 in P'_1 mentre $\epsilon\lambda'_1$ è la rotazione, conseguente alla applicazione della stessa coppia, della tangente in P'_1 a Σ .

Con le posizioni (6) in sostanza si trascurano i termini di secondo grado nelle variabili Y'_1 , Z'_1 , λ'_1 . Il significato meccanico dei primi termini trascurati lo si può individuare considerando che la forza Φ'_1 applicata in P'_1 è equivalente agli effetti dello spostamento rigido del fungo della rotaia alla stessa Φ'_1 applicata in Q'_1 e ad una opportuna coppia. Discende allora che con le posizioni (6) si trascurano gli effetti della coppia di forze Φ'_1 — Φ'_1 applicata in Q'_1 e Φ'_1 — Φ'_1 applicata in P'_1 , ed inoltre si trascura lo spostamento di P'_1 provocato dalla rotazione $\delta_1Y'_1 + \delta_2Z'_1$ intorno al punto Q'_1 .

Calcoliamoci, per finire queste considerazioni preliminari sulla rotaia, le coordinate di P'_1 in funzione di quelle di P'_1 e della deformazione (6). Si ha

$$(7) \quad \begin{cases} \eta'_1 = h + \lambda'_1 + c_{11}Y'_1 + c_{12}Z'_1 + \gamma_1\lambda'_1, \\ \zeta'_1 = -\alpha\lambda'_1 + \beta\lambda'^2_1 + c_{21}y'_1 + c_{22}Z'_1 + \gamma_1\lambda'_1, \end{cases}$$

mentre il coefficiente angolare della tangente in P'_1 al profilo del fungo, dopo la deformazione, è da ritenersi dato da

$$(8) \quad i'_1 = -\alpha + 2\beta\lambda'_1 + \delta_1y'_1 + \delta_2Z'_1 + \epsilon\lambda'_1.$$

In un ordine di approssimazione meno elevato, in base alla struttura della rotaia, si può ritenere sufficiente, ai fini dello studio che seguirà, sostituire le (7), (8) con le seguenti

$$(8') \quad \begin{cases} \eta'_1 = h + \lambda'_1 + c_1y'_1, & i'_1 = -\alpha + 2\beta\lambda'_1 + \delta y'_1 + \epsilon\lambda'_1. \\ \zeta'_1 = -\alpha\lambda'_1 + \beta\lambda'^2_1 + c_2Z'_1, \end{cases}$$

Anzi tenendo conto che, come risulterà in seguito, quando il punto di contatto corrisponde a valori di λ'_1 negativi (positivi), Y'_1 è di segno positivo (negativo), si può ritenere che $\delta Y'_1$ ed $\epsilon\lambda'_1$ si compensino a vicenda e sostituire la (8') con la

più semplice

$$(8'') \quad i'_1 = -\alpha + 2\beta\lambda'_1.$$

Ciò facendo si suppone tanto piccola la rotazione della sezione da poterla trascurare. Il valore dei coefficienti c_1 , c_2 , δ , ϵ si può ottenere sperimentalmente, ovvero calcolarlo in base alla ordinaria teoria della trave elastica, tenuto opportunamente conto dell'elasticità dell'armamento.

2. Considerazioni su $\mathcal{C}$. Condizioni di contatto ruote-rotaia. Componenti delle velocità dei punti delle ruote a contatto con le rotaie. Si considera in questa sede $\mathcal{C}$ costituito da una cassa rigida con cui sono solidali gli assi dei due carrelli; questi si suppongono anche rigidi assieme alle ruote, magari tenendo conto dell'elasticità delle ruote e degli assi, col trasferirla alle rotaie, modificando in relazione ad essa il valore dei coefficienti c_1 , c_2 , $\dots$.

Si assuma un sistema di riferimento Ω , x , y , z con l'origine in Ω , baricentro di $\mathcal{C}$, e gli assi coincidenti con gli assi centrali di $\mathcal{C}$, scelti in modo che quando $\mathcal{C}$ è in $\mathcal{C}^*$ risultino rispettivamente paralleli a ξ , η , ζ . Denoteremo con $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ξ , $\mathbf{n}$, ζ , i versori degli assi delle due terne. Sia in base alle posizioni fatte

$$(9) \quad \theta \mathbf{u} = \varphi \xi + \chi \mathbf{n} + \psi \zeta,$$

la rotazione che caratterizza lo spostamento infinitesimo necessario per portare la terna ξ , η , ζ in posizione parallela alla terna x , y , z . Siano inoltre ξ_0 , η_0 , $\zeta_0 - \delta$, le coordinate di Ω , rispetto alla terna fissata nel numero precedente ($-\delta$ è la coordinata di Ω quando $\mathcal{C}$ è in $\mathcal{C}^*$), r_0 il raggio del cerchio di rotolamento della generica ruota, per esempio R'_1 , quando $\mathcal{C}$ è in $\mathcal{C}^*$, e questo cerchio di rotolamento sia a distanza h dal piano (x , y). Supporremo che il raggio r della sezione della ruota R'_1 vari con la distanza y del piano di sezione dal piano (x , z) con la seguente legge

$$(10) \quad r - r_0 = -\alpha(y - h) + \gamma(y - h)^2,$$

ove anche qui γ è calcolato in base alla forma della ruota, ed è da notare che deve essere $\gamma < \beta$ se si vuole che sia possibile il contatto ruota rotaia. Riterremo ancora che $\gamma(y - h)^2$ non sia trascurabile rispetto al termine lineare.

Siano $(h + y'_1, r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y'^2_1, \mu)$ rispettivamente la coordinata y del punto P'_1 in cui R'_1 tocca la rotaia, il raggio del disco di rotolamento passante per P'_1 ed infine l'angolo tra il piano, del fascio che ha per sostegno l'asse y , che contiene P'_1 e il piano (y , z).

Le coordinate, relative alla terna solidale con $\mathcal{C}$, di P'_1 sono ovviamente

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{y}'_1 &= h + y'_1, & z'_1 &= (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y'^2_1) \cos \mu, \\ x'_1 &= l + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y'^2_1) \sin \mu, \end{aligned}$$

essendo l la semidistanza tra i due assi.

Ricaviamo ora le coordinate del punto P'_1 rispetto alla terna ξ , η , ζ . Si ha,

essendo $\delta = r_0$,

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + [l + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \sin \mu] \xi \times \mathbf{x} + (h + y'_1) \xi \times \mathbf{y} \\ \quad \quad \quad + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \cos \mu \xi \times \mathbf{z}, \\ \eta = \eta_0 + [l + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \sin \mu] \mathbf{n} \times \mathbf{x} + (h + y'_1) \mathbf{n} \times \mathbf{y} \\ \quad \quad \quad + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \cos \mu \mathbf{n} \times \mathbf{z}, \\ \zeta = \zeta_0 - r_0 + [l - (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \sin \mu] \zeta \times \mathbf{x} \\ \quad \quad \quad + (h + y'_1) \zeta \times \mathbf{y} + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \cos \mu \zeta \times \mathbf{z}. \end{cases}$$

Tenuto conto che a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo risulta

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi \times \mathbf{x} = \mathbf{n} \times \mathbf{y} = \zeta \times \mathbf{z} = 1, \quad \xi \times \mathbf{y} = -\psi = -\mathbf{n} \times \mathbf{x}, \\ \xi \times \mathbf{z} = \chi = -\zeta \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{z} = -\varphi = -\mathbf{y} \times \zeta, \end{aligned}$$

le (12) si scrivono

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + l + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \sin \mu - (h + y'_1) \psi \\ \quad \quad \quad + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \cos \mu \cdot \chi, \\ \eta = \eta_0 + [l + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \sin \mu] \psi + h + y'_1 \\ \quad \quad \quad - (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \cos \mu \cdot \varphi, \\ \zeta = \zeta_0 - r_0 - [l + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \sin \mu] \chi + (h + y'_1) \varphi \\ \quad \quad \quad + (r_0 - \alpha y'_1 + \gamma y_1'^2) \cos \mu. \end{cases}$$

Per ogni determinazione di $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varphi, \chi, \psi$, le (12) forniscono le equazioni parametriche nei parametri (y'_1, μ) della superficie della ruota, sempre nell'ordine di approssimazione corrispondente ad uno spostamento infinitesimo di $\mathcal{C}$ dalla posizione $\mathcal{C}^*$. I coseni direttori in un generico punto sono al solito forniti dai minori della matrice

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y'_1} & \frac{\partial \eta}{\partial y'_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial y'_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mu} & \frac{\partial \eta}{\partial \mu} & \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \end{vmatrix}.$$

Teniamo ora conto che detta $\mathbf{N}$ la normale alla rotaia nel punto P'_1 possiamo ritenere che risulti $\cos \mathbf{N} \xi = 0$. Con ciò si suppone che il piano tangente in P'_1 alla rotaia si mantenga parallelo all'asse della strada, e così si trascura la rotazione, dovuta alla forza esplicata dalla ruota posteriore destra sulla rotaia, della sezione della rotaia relativa al punto di contatto P' . Dovrà essere quindi

$$(16) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y'_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial y'_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mu} & \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0,$$

e da questa tenuto conto di (14) e ritenendo dello stesso ordine $\varphi, \psi, \chi, 2\gamma y'_1 - \alpha$ risulta allora

$$(17) \quad \mu = -\chi.$$

Nello stesso ordine di approssimazione la matrice (15) può, agli effetti del calcolo dei coseni direttori della normale, sostituirsi con la seguente

$$(18) \quad \begin{vmatrix} -\psi & 1 & \varphi - \alpha + 2\gamma y'_1 \\ 1 & \psi & 0 \end{vmatrix},$$

e quindi i coseni direttori di $\mathbf{N}$ sono proporzionali ai 3 numeri

$$(19) \quad 0, \varphi - \alpha + 2\gamma y'_1, 1.$$

Dalle (14) allora, tenuto conto di (17), ricaviamo le coordinate relative alla terna solidale, del punto di contatto di R'_1

$$(20) \quad \begin{cases} \xi'_1 = \xi_0 + l - h\varphi, \\ \eta'_1 = \eta_0 + l\psi + h + y'_1 - r_0\varphi, \\ \zeta'_1 = \zeta_0 - l\chi + h\varphi - \alpha y'_1 + \gamma y'^2_1. \end{cases}$$

Da (8'), (8''), (19) e (20) risaltano le seguenti condizioni di mutua tangenza delle due superficie ruota rotaia

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi + 2\gamma y'_1 = 2\beta\lambda'_1, \\ \lambda'_1 + c_1 Y'_1 = \eta_0 + l\psi + y'_1 - r_0\varphi, \\ -\alpha\lambda'_1 + \beta\lambda'^2_1 + c_2 Z'_1 = \zeta_0 - l\chi + h\varphi - \alpha y'_1 + \gamma y'^2_1. \end{cases}$$

Le (21) contengono le variabili $\eta_0, \zeta_0, \varphi, \chi, \psi$, caratteristiche della posizione di $\mathcal{C}$ ed inoltre le variabili $y'_1, \lambda'_1, Y'_1, z'_1$. Agli effetti dell'impostazione delle equazioni dinamiche che regolano il moto di $\mathcal{C}$ a noi occorre determinare queste ultime quattro variabili ed essenzialmente le tre y'_1, Y'_1, Z'_1 . Naturalmente questa determinazione è necessaria in relazione a tutte e quattro le ruote sempre in funzione dei cinque parametri $\eta_0, \zeta_0, \varphi, \chi, \psi$ ed eventualmente delle loro derivate prime e seconde. Sarà inoltre essenziale determinare la componente X'_1 della azione esplicata dalla ruota sulla rotaia, ma già le (21) da sole non bastano neppure per determinare Y'_1, Z'_1 oltre alle coordinate del punto di contatto. E per giungere a scrivere le relazioni mancanti che converrà passare ora alla determinazione della velocità del punto della ruota che è in P'_1 , cioè a contatto con la rotaia.

Poichè si suppone che si tratti di un moto di $\mathcal{C}$ prossimo a $\mathcal{C}^*$ possiamo supporre che la velocità angolare ω del carrello, relativa alla cassa di $\mathcal{C}$, sia

$$(22) \quad \omega = \left(-\frac{\xi_0}{r_0} + \epsilon \right) \mathbf{y}$$

ritenendo ϵ piccolo del primo ordine. Allora la velocità $\mathbf{v}_{P'}$, del punto considerato

della ruota sarà

$$(23) \quad \mathbf{v}_{P'_1} = \mathbf{v}_{P'_1}^{(r)} + \mathbf{v}_{P'_1}^{(s)} = (\xi_0 - h\psi)\xi + (\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi} - r_0\dot{\varphi})\mathbf{n} \\ + (\dot{\xi}_0 - l\dot{\chi} + h\dot{\varphi})\xi + \omega \wedge A'_1 P'_1,$$

dove i primi tre termini sono ottenuti dalla derivazione delle (20), ed A'_1 è, per semplicità, la proiezione di P'_1 sull'asse del carrello.

Tenuto conto di (22), (13), (14) le (23) porgono infine, per le componenti della velocità assoluta di P'_1 , le seguenti espressioni, qualora si trascurino le quantità infinitesime di ordine superiore al primo,

$$(24) \quad \begin{cases} v_\xi = -h\dot{\psi} + \frac{\dot{\xi}_0}{r_0}(\alpha y'_1 - \gamma y'^2_1) + \epsilon r_0, \\ v_\eta = \dot{\eta}_0 + l\dot{\psi} - r_0\dot{\varphi} - \dot{\xi}_0\psi, \\ v_\zeta = \dot{\xi}_0 - l\dot{\chi} + h\dot{\varphi} + \dot{\xi}_0\chi. \end{cases}$$

La ϵ è una nuova incognita, introdotta in corrispondenza all'ulteriore grado di libertà di $\mathcal{C}$, dovuto al fatto che il solo asse del carrello anteriore è solidale con $\mathcal{C}$. Essa ϵ è in diretta dipendenza del momento, rispetto all'asse del carrello, delle forze che si esplicano al contatto ruota-rotai, in generale rilevanti quando $\mathcal{C}$ non è in $\mathcal{C}^*$ e naturalmente dalle caratteristiche inerziali del carrello stesso.

Le forze sopramenzionate sono direttamente legate, in prima approssimazione, solo alla v_ξ data da (24₁) ed inoltre alla stessa componente della velocità del punto P'_1 di contatto della ruota R'_1 avanti-sinistra.

Al calcolo di ϵ provvederemo con le equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi, introducendo un'ulteriore ipotesi semplificativa riguardante le caratteristiche inerziali del carrello.

3. Determinazione della forza di pseudostrisciamento. Per la determinazione in funzione della posizione e dell'atto di moto delle forze che si esplicano al contatto ruota-rotai assumeremo che valga una legge di pseudostrisciamento intermedia tra quella proposta da R. LÉVI³ nel 1934 e quella proposta da CHARTET⁴ nel 1947.

Introduciamo le velocità ridotte di strisciamento (u_ξ , u_s) in direzione ξ ed in direzione della tangente $\mathbf{t}$ al profilo della rotaia nel punto di contatto, come rapporto tra le corrispondenti componenti della velocità di strisciamento e la velocità (media) di avanzamento di $\mathcal{C}$ (e quindi anche degli assi delle ruote, $\dot{\xi}_0$),

$$(25) \quad u_\xi = \frac{v_\xi}{\dot{\xi}_0}, \quad u_s = \frac{v_\eta \cos \mathbf{n}\mathbf{t} + v_\zeta \cos \boldsymbol{\zeta}\mathbf{t}}{\dot{\xi}_0}.$$

I coefficienti

$$(26) \quad \tau_\xi = \left| \frac{X'_1}{N'_1} \right|, \quad \tau_s = \left| \frac{Y'_1 \cos \mathbf{n}\mathbf{t} + Z'_1 \cos \boldsymbol{\zeta}\mathbf{t}}{N'_1} \right|,$$

³LÉVI, *loc. cit.* [2].

⁴A. CHARTET, *Propriétés générales des contacts de roulement*, C. R. Acad. Sc. Paris, 225 (1947).

ove N'_1 è la componente normale alla superficie di contatto della azione delle ruote sulle rotaie o *vice versa*, si assume dipendano dalle componenti u_ξ , u_s delle velocità di pseudostrisciamento nella seguente maniera,

$$(27) \quad \tau_\xi = \frac{\mu k |u_\xi|}{[\mu^{\frac{1}{2}} + (k u_\xi)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau_s = \frac{\mu k |u_s|}{[\mu^{\frac{1}{2}} + (k u_s)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{3}{2}}},$$

ove μ è un coefficiente numerico che nei casi concreti dei carri ferroviari vale 0,3 o 0,2 secondo che il contatto è secco oppure no ed è inoltre

$$(28) \quad k = \frac{Eab}{|N'_1|},$$

E essendo, al solito, il modulo di elasticità del materiale, ed a , b i semiassi dell'ellisse di contatto tra i due corpi.

Dalla teoria del contatto elastico⁵ si può ritenere che in prima approssimazione, nel caso di piccolo moto di *lacet*, risulti

$$(29) \quad k = \left(\frac{gE(1 - \nu^2)}{N'_1(2\beta - 2\gamma + r_0^{-1})^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

La (26) tenuto conto di (4), e (8'') dà

$$(30) \quad \left| \frac{Y'_1 + \frac{1}{2}\beta\lambda'_1 p}{\frac{1}{4}p + Z'_1} \right| = \tau_s,$$

e tenuto conto che τ_s non supera 0,3, possiamo, trascurando $\tau_s Z'_1$, scrivere in definitiva

$$(31) \quad Y'_1 = \frac{1}{4}(-2\beta\lambda'_1 + \tau_s \text{sign } u_s)p.$$

La (31) con le (21), tenuto conto della (27₂) per l'espressione di τ_s , ove k è calcolato in base a (29) con $N'_1 = \frac{1}{4}p + Z'_1$ ed u_s in base a (25₂) con v_η , v_ζ dati da (25₂), con $\cos \mathbf{nt}$ e $\cos \boldsymbol{\zeta t}$ calcolati in base alla inclinazione della rotaia data da (8''), darebbero y'_1 , λ'_1 , Y'_1 , Z'_1 in funzione di η_0 , ζ_0 , φ , ψ , χ , e delle loro derivate temporali, espressioni che conterrebbero come parametro anche ξ_0 attraverso u_s . Comunque formalmente si possono ricavare intanto y'_1 , λ'_1 , sostituendo Y'_1 nella (21₂) con il valore dato dalla (31), si ottiene così:

$$(32) \quad \begin{cases} \beta\lambda'_1 - \gamma y'_1 = \frac{1}{2}\varphi, \\ \lambda'_1(1 - \frac{1}{2}\beta c_1 p) - y'_1 = \eta_0 + l\psi - r_0\varphi - \frac{1}{4}c_1 \tau_s p \text{sign } u_s. \end{cases}$$

Le (32) determinano linearmente oramai λ'_1 ed y'_1 a patto che nell'espressione di u_s , che entra in τ_s si trascuri il termine $v_\zeta \cos \boldsymbol{\zeta t}$ rispetto al termine $v_\eta \cos \mathbf{nt}$ e si assuma $\cos \mathbf{nt} = 1$, in modo da poter confondere u_s con il rapporto $v_\eta/\dot{\xi}_0$. Altrimenti bisogna ancora esplicitare la dipendenza di τ_s da λ'_1 , cosichè la (32) non sarebbero più lineari in λ'_1 e y'_1 e ciò comporterebbe una ulteriore complicazione del problema, in quanto le (32) stesse non sarebbero risolvibili elementarmente in y'_1 , λ'_1 .

⁵S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York, (1934) p. 339.

Una volta ricavati λ'_1 , y'_1 dalla (32), la (31) ci fornisce Y'_1 , e la (21_a) Z'_1 . Resta da calcolare X'_1 ma qualora si schematizzi il problema nella forma detta e si trascurino le quantità da ritenersi piccole in moti di piccolo *lacet* la (26) ci fornisce senz'altro

$$(33) \quad X'_1 = \frac{1}{4} \tau_\xi(u_\xi) p \operatorname{sign} u_\xi.$$

L'espressione fornita da (33) per la X'_1 dipende, come risulta tenendo conto dell'espressione di τ_ξ e di u_ξ , v_ξ , oltre che dalle coordinate del sistema e dalle loro derivate, anche dalla incognita piccola variazione, indicata con ϵ , della velocità angolare del carrello, cui appartiene la ruota considerata.

Possiamo comunque dire di avere completamente espresse le forze di pseudostrisciamento — X'_1 , — Y'_1 , — Z'_1 e le coordinate del punto di contatto P'_1 in funzione delle cinque coordinate η_0 , ζ_0 , φ , ψ , χ , e delle loro derivate, nonché della variazione ϵ della velocità angolare del carrello anteriore. Nessuna difficoltà ulteriore, o diversa da quella fin qui incontrata, porge la determinazione delle analoghe componenti delle forze e delle coordinate dei punti di contatto relativamente alle altre ruote del carro.

Si potrebbe quindi direttamente passare alla scrittura delle equazioni dinamiche del sistema $\mathcal{C}$ a 8 gradi di libertà, che si riducono a 7 se si prescrive il moto della proiezione del baricentro Ω di $\mathcal{C}$ sull'asse ξ , assegnando a priori ξ_0 (costante), cioè pensando di agire sul baricentro con una forza parallela all'asse ξ , tale da rendere il moto di Ω uniforme con velocità ξ_0 .

Per una ulteriore semplificazione del problema è conveniente supporre che il momento d'inerzia del carrello rispetto al proprio asse sia così piccolo, che si possa trascurare nel calcolo della forza via del carrello la parte che lo contiene. In base a questa osservazione risulta, dato che le uniche forze a momento non nullo rispetto all'asse sono quelle di pseudostrisciamento, che si stabilirà istantaneamente quella velocità angolare per cui risulterà nullo il momento delle forze rispetto all'asse. Ora a meno di quantità trascurabili questa condizione si traduce nella relazione

$$(34) \quad M_a^{(1)} = (X'_1 + X'_1') r_0 = 0,$$

e, con ovvio significato dei simboli,

$$(35) \quad \tau_\xi(u'_{\xi,1}) \operatorname{sign} u'_{\xi,1} + \tau_\xi(u''_{\xi,1}) \operatorname{sign} u''_{\xi,1} = 0.$$

Da quest'ultima risulta ormai

$$(36) \quad u'_{\xi,1} = -u''_{\xi,1} \quad \text{e quindi} \quad v'_{\xi,1} = -v''_{\xi,1},$$

cioè si stabilisce quella velocità angolare $\omega + \epsilon$, in corrispondenza alla quale le componenti della velocità di pseudostrisciamento dei due punti, dello stesso carrello, a contatto con le due rotaie, risultano uguali ed opposte.

Una analoga relazione sussisterà per il carrello posteriore, così che la (35), e la corrispondente per il carrello posteriore, determinano completamente il valore di ϵ relative a ciascuno dei due carrelli.

4. Equazioni dinamiche che reggono il moto di $\mathcal{C}$ in generale. Si assuma come espressione della forza viva di $\mathcal{C}$ la seguente

$$(37) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\{C\dot{\psi}^2 + B\dot{\varphi}^2 + A\dot{\chi}^2 + M(\dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2)\},$$

allora, tenendo conto che $X'_i, Y'_i, Z'_i, X''_i, Y''_i, Z''_i$ sono le componenti delle azioni esplicate dalla ruota sulle rotaie, le equazioni dinamiche sono le seguenti

$$(38) \quad \begin{cases} M\ddot{\xi}_0 = -(Z'_1 + Z'_1') - (Z'_2 + Z'_2'), \\ M\ddot{\eta}_0 = -(Y'_1 + Y'_1') - (Y'_2 + Y'_2'), \\ C\ddot{\psi} = (X'_1 - X'_1')h + (X'_2 - X'_2')h - (Y'_1 + Y'_1')l + (Y'_2 + Y'_2')l, \\ A\ddot{\chi} = (Z'_1 + Z'_1')l - (Z'_1 - Z'_1')l, \\ B\ddot{\varphi} = -(Z'_1 - Z'_1')h - (Z'_1 - Z'_1')l - (Y'_1 + Y'_1' + Y'_2 + Y'_2')r_0. \end{cases}$$

A riguardo della (38) va osservato che nella scrittura di essa si è tenuto conto della (34) e dell'analogia per il carrello anteriore.

Un esame delle equazioni dinamiche e del sistema che determina le forze di pseudostrisciamento ci permette di asserire che in queste ipotesi i 5 *moti elementari*, due di traslazione parallela agli assi η, ζ , e i tre di rotazione, sono *mutuamente legati*. Ciò è dovuto ai termini non lineari che compaiono nelle espressioni delle componenti delle forze di pseudostrisciamento.

Per poter studiare il vero moto di *lacet* bisogna fare altre ipotesi semplificative su $\mathcal{C}$ e sulla rotaia. Precisamente le seguenti: c_2 tanto grande (cioè il ballast tanto cedevole in senso verticale) che le componenti Z'_i (Z'_i') ricavate dalla (21) siano piccole e B tanto grande che le oscillazioni di galoppo (rette da φ) siano trascurabili rispetto al moto di puro *lacet* (retto solo dalle due variabili η_0 e ψ). Altrimenti la presenza di una non trascurabile oscillazione di φ influirebbe direttamente sulla oscillazione di rollio (χ) e sulle oscillazioni verticali di traslazione (ζ_0) ed i 5 moti sarebbero, come abbiamo già detto sopra, tutti legati tra loro.

5. Moto di puro *lacet*. Riteniamo allora φ, χ, ζ_0 costantemente nulli, tenuto conto delle ipotesi fatte si ha, da (25₂), (24),

$$(39) \quad \mu'_{s,1} = \frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\dot{\xi}_0} - \psi, \quad \tau'_{s,1} = \frac{\mu k \left| \frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\dot{\xi}_0} - \psi \right|}{\left\{ \mu^{\frac{3}{2}} + \left[k \frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\dot{\xi}_0} - \psi \right]^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}},$$

ove abbiamo aggiunto a primo membro degli indici per ricordare che le quantità sono riferite alla ruota R'_1 ed ove k è dato da (vedi 29)

$$(40) \quad k = \left\{ \frac{gE(1 - \nu^2)}{\frac{1}{4}p(2\beta - 2\gamma + r_0^{-1})^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre dalla (32) si ha

$$(41) \quad \begin{cases} \beta \lambda'_1 = \gamma y'_1 \\ \lambda'_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta c_1 p - \frac{\beta}{\gamma} \right) = \eta_0 + l\psi - \frac{\frac{1}{4} c_1 p \mu k \left(\frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi \right)}{\left\{ \mu^{\frac{3}{2}} + \left[k \left(\frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\xi_0} \right) - \psi \right]^{\frac{3}{2}} \right\}} \end{cases}$$

e quindi denotando con $f(u'_{s,1})$ ciò che moltiplica $\frac{1}{4} c_1 p$ nell'ultimo termine del secondo membro di (41), si ha

$$(42) \quad \lambda'_1 = \frac{\eta_0 + l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,1})}{1 - \frac{1}{2} \beta c_1 p - \beta/\gamma} = -\frac{1}{\rho} [\eta_0 + l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,1})],$$

avendo posto

$$(43) \quad \rho = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{2} \beta c_1 p - 1,$$

mentre risulta

$$(44) \quad y'_1 = -\frac{\beta}{\rho \gamma} [\eta_0 + l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,1})].$$

Si ottiene così da (31) la componente

$$(45) \quad Y'_1 = \frac{1}{4} \left\{ 2 \frac{\beta}{\rho} (\eta_0 + l\psi) + f(u'_{s,1}) \left(1 - \frac{\beta}{2\rho} c_1 p \right) \right\} p.$$

È necessario prima di proseguire determinare $v'_{\xi,1}$, cioè la componente secondo ξ della velocità del punto P'_1 della ruota anteriore sinistra che è a contatto con la rotaia sinistra.

Considero all'uopo due carrelli simmetricamente disposti rispetto all'asse della via. Per passare dall'uno all'altro si cambia η_0 in $-\eta_0$, ψ in $-\psi$, $\dot{\eta}_0$ in $-\dot{\eta}_0$, $\dot{\psi}$ in $-\dot{\psi}$; così, determinando le coordinate dei due punti P'_1 relativi alle due posizioni considerate del carrello, si ottengono invece il punto P'_1 e il simmetrico, rispetto all'asse della via, del punto P'_1 .

La coordinata $y'_{1'}$ del punto $P'_{1'}$ sulla ruota è

$$(47) \quad y'_{1'} = -h + y'_1,$$

ed il raggio del cerchio di rotolamento passante per $P'_{1'}$ è

$$(48) \quad r_0 + \alpha y'_1 + \gamma y'^2_1,$$

mentre le coordinate del punto della rotaia a cui viene sovrapposto $P'_{1'}$, sono

$$(49) \quad \eta'_{1'} = -h + \lambda'_1, \quad \xi'_{1'} = \alpha \lambda'_1 + \beta \lambda'^2_1.$$

Ora risulta, sempre da (24), tenuto conto di quanto detto sopra,

$$(50) \quad v'_{\xi,1} = h\dot{\psi} - \frac{\xi_0}{r_0} (\alpha y'_1 + \gamma y'^2_1) + \epsilon r_0,$$

per modo che dall'uguaglianza (24) si ha

$$(51) \quad -\frac{\xi_0 \gamma y_1'^2}{r_0} + \epsilon r_0 = 0,$$

e quindi

$$(52) \quad v'_{\xi,1} = -h\psi + \frac{\xi_0 \alpha y_1'}{r_0}, \quad v'_{\xi,1} = h\psi - \frac{\xi_0 \alpha y_1'}{r_0}.$$

Ricerchiamo ora la componente Y_1'' della forza esplicita dalla ruota anteriore sinistra sulla relativa rotaia. Dalla (31) o dalla (45) si ha senz'altro che Y_1'' coincide con Y_1' e quindi risulta

$$(53) \quad Y_1' + Y_1'' = \frac{1}{2}p \left\{ 2 \frac{\beta}{\rho} [\eta_0 + l\psi] + f(u'_{s,1}) \left(1 - \frac{\beta}{2\rho} c_1 p \right) \right\}.$$

Analogamente, poichè risulta $X_1' = -X_1''$ otteniamo

$$(54) \quad X_1' - X_1'' = \frac{1}{2}f(u'_{\xi,1})p, \quad u'_{\xi,1} = -\frac{h\psi}{\xi_0} + \alpha \frac{y_1'}{r_0}.$$

Per avere le coordinate dei punti di contatto delle ruote posteriori e le componenti delle forze di pseudostrisciamento relative, basterà semplicemente cambiare l in $-l$ nelle espressioni che forniscono le analoghe quantità relative al carrello anteriore; si ottiene così

$$(55) \quad \begin{cases} Y_2' = -\frac{\beta}{\rho\gamma} [\eta_0 - l\psi - \frac{1}{4}c_1 p f(u'_{s,2})], \\ \lambda_2' = -\frac{1}{\rho} [\eta_0 - l\psi - \frac{1}{4}c_1 p f(u'_{s,2})], \end{cases}$$

ove

$$(56) \quad u'_{s,2} = \frac{\dot{\eta}_0 - l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi,$$

e quindi risulta in definitiva

$$(57) \quad Y_2' + Y_2'' = \frac{1}{2}p \left\{ 2 \frac{\beta}{\rho} (\eta_0 - l\psi) + f(u'_{s,2}) \left(1 - \frac{1}{2}c_1 p \frac{\beta}{\rho} \right) \right\}$$

mentre X_2' e X_2'' e quindi $Y_2' - Y_2''$ si determinano in base a (54), (55), ove al posto di Y_1' si sostituisca Y_2' .

Si ottengono così infine le equazioni non-lineari del moto di *lacet*, nella forma

$$(58) \quad \begin{cases} M\ddot{\eta}_0 + 2 \frac{\beta p}{\rho} \eta_0 = -\frac{1}{2}\{f(u'_{s,1}) + f(u'_{s,2})\} \left(1 - c_1 \frac{p\beta}{2\rho} \right) p, \\ C\ddot{\psi} + 2 \frac{l^2 p \beta}{\rho} \psi = -\frac{1}{2}h p [f(u'_{\xi,1}) + f(u'_{\xi,2}) - \frac{1}{2}l \left(1 - c_1 \frac{p\beta}{2\rho} \right) [f(u'_{s,1}) - f(u'_{s,2})]. \end{cases}$$

Se si pone

$$(59) \quad f_1^\pm = k \left\{ \frac{\frac{\dot{\eta}_0 + l\psi}{\xi_0} - \psi}{\left\{ 1 + \left[\frac{k}{\mu} \left(\frac{\dot{\eta}_0 + l\psi}{\xi_0} - \psi \right) \right]^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{2}{3}}} \pm \frac{\frac{\dot{\eta}_0 - l}{\xi_0} - \psi}{\left\{ 1 + \left[\frac{k}{\mu} \left(\frac{\dot{\eta}_0 - l}{\xi_0} - \psi \right) \right]^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{2}{3}}} \right\},$$

ed inoltre

$$(60) \quad f_2 = \frac{k \left\{ \frac{h\psi}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} [\eta_0 + l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,1})] \right\}}{\left\{ 1 + \left[\frac{k}{\mu} \left[\frac{h\psi}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} (\eta_0 + l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,1})) \right] \right]^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{2}{3}}} + \frac{k \left\{ \frac{h\psi}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} [\eta_0 - l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,2})] \right\}}{\left\{ 1 + \left[\frac{k}{\mu} \left[\frac{h\psi}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} (\eta_0 - l\psi - \frac{1}{4} c_1 p f(u'_{s,2})) \right] \right]^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{2}{3}}},$$

il sistema assume la forma

$$(61) \quad \begin{cases} M\ddot{\eta}_0 + 2\frac{\beta p}{\rho} \eta_0 = -\frac{1}{2}p \left(1 - \frac{c_1 \beta p}{2\rho} \right) f_1^+, \\ C\ddot{\psi} + 2\frac{\beta p l^2}{\rho} \psi = -\frac{1}{4}h f_2 p - \frac{1}{2}lp \left(1 - \frac{c_1 \beta p}{2\rho} \right) f_1^-. \end{cases}$$

Almeno per c_1 sufficientemente piccolo, la soluzione $\eta_0 = 0, \psi = 0$ è linearmente instabile, come lo conferma l'esame del sistema lineare della prima approssimazione. Infatti il sistema lineare equivalente a (61) nell'intorno della soluzione $\eta_0 = 0, \psi = 0$ è, per $c_1 = 0$,

$$(62) \quad \begin{cases} M\ddot{\eta}_0 + \frac{kp}{\xi_0} \dot{\eta}_0 - kp\psi + 2\frac{\beta p}{\rho} \eta_0 = 0, \\ C\ddot{\psi} + p\frac{k}{\xi_0} (h^2 + l^2)\psi + 2\frac{\beta p l^2}{\rho} \psi + p\frac{hk\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} \eta_0 = 0. \end{cases}$$

Se al posto di (62) si considera il sistema

$$(63) \quad \begin{cases} M\ddot{\eta}_0 + \frac{Kp}{\xi_0} \dot{\eta}_0 - kp\psi = 0, \\ C\ddot{\psi} + p\frac{k}{\xi_0} (h^2 + l^2)\psi + p\frac{hk\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} \eta_0 = 0, \end{cases}$$

si vede senz'altro che questo ha due esponenti caratteristici a parte reale positiva e quindi almeno per opportune condizioni strutturali anche il sistema (62) avrà due esponenti caratteristici a parte reale positive, cioè la soluzione $\eta_0 = 0, \psi = 0$ sarà linearmente instabile.

Una discussione completa del problema è indubbiamente malagevole per il grande numero di parametri che intervengono, ma deve risultare certamente

interessante nei casi concreti, qualora si assuma come parametro ξ_0 . È certo comunque che per il sistema (63), qualunque sia ξ_0 il moto di regime è linearmente instabile. Questo non è che il risultato di ROCARD.

Resta da vedere se la forma non lineare delle sezioni, che comporta l'aggiunta dei due termini omessi nel passaggio da (62) a (63) e l'elasticità trasversale della rotaia, che comporterebbe la presenza di altri termini omessi nella scrittura del sistema lineare (62), possano portare alla stabilità del moto di regime. Questa eventualità, almeno per condizioni strutturali opportune, e magari introducendo anche i termini relativi alla dissipazione di energia nella deformazione elastica della rotaia e del ballast, sembra non possa essere scartata in base a ragioni dinamiche, in quanto porterebbe crearsi proprio per effetto soprattutto della cedevolezza trasversale delle rotaie un ostacolo alla generazione delle forze di pseudostrisciamento.

Comunque essendo la discussione malagevole per l'eccessivo numero di parametri, ci accontenteremo di aver fatto presente questa possibilità.

È invece certo che, in un caso numerico concreto, assumendo come parametro la velocità ξ_0 di avanzamento, le (61) forniranno abbastanza agevolmente utili indicazioni, mediante l'integrazione numerica, sulla maggiore o minore aderenza della schematizzazione al fenomeno reale.

6. Un caso di stabilità del moto vibratorio in assenza di elasticità trasversale ($c_1 = 0$). Poniamo una volta per tutte

$$(64) \quad F(z) = \frac{k}{\mu} \frac{z}{\left[1 + \left(\frac{k}{\mu} z\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Il sistema (61), tenuto conto che $c_1 = 0$, diventa

$$(65) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_0 + 2 \frac{\beta g}{\rho} \eta_0 = -\frac{1}{2} \mu g \left[F\left(\frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi\right) + F\left(\frac{\dot{\eta}_0 - l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi\right) \right], \\ \delta^2 \ddot{\psi} + 2 \frac{l^2 \beta g}{\rho} \psi = -\frac{1}{2} \mu g h \left\{ F\left[\frac{h\dot{\psi}}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma\rho r_0} (\eta_0 + l\psi)\right] \right. \\ \quad \left. + F\left[\frac{h\dot{\psi}}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma\rho r_0} (\eta_0 - l\psi)\right] \right\} \\ \quad - \frac{1}{2} \mu g l \left\{ F\left(\frac{\dot{\eta}_0 + l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi\right) - F\left(\frac{\dot{\eta}_0 - l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi\right) \right\}. \end{cases}$$

Il sistema lineare della prima approssimazione è il seguente

$$(66) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_0 + 2 \frac{\beta g}{\rho} \eta_0 = -kg \left(\frac{\dot{\eta}_0}{\xi_0} - \psi\right), \\ \ddot{\psi} + 2 \frac{l^2 \beta g}{\delta^2 \rho} \psi = -\frac{kg h}{\delta^2} \left[\frac{h\dot{\psi}}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_0 \rho} (\eta_0 + l\psi)\right] - \frac{kg l^2}{\delta^2} \frac{\dot{\psi}}{\xi_0}. \end{cases}$$

Si noti che, sempre per il fatto che $c_1 = 0$, risulta

$$(67) \quad \rho = \frac{\beta}{\gamma} - 1, \quad \frac{\beta}{\rho\gamma} = \frac{\beta}{\beta - \gamma}, \quad \frac{\beta}{\rho} = \frac{\beta\gamma}{\beta - \gamma}.$$

Se β e γ sono molto piccoli può essere che i termini che contengono β/ρ siano trascurabili, mentre non lo sono quelli che contengono a fattore $\beta/\rho\gamma$. In questa ipotesi si ricade nel caso di ROCARD e due degli esponenti caratteristici del sistema (66) sono a parte reale positiva.

Vogliamo dimostrare qui di seguito che le soluzioni del sistema (65), relative a condizioni iniziali sufficientemente vicine a quelle della soluzione $\eta_0 \equiv \psi \equiv 0$, sono limitate in futuro. Inoltre sarà data una limitazione superiore per i massimi moduli di queste soluzioni.

Ciò naturalmente serve soltanto a fornire un ulteriore controllo, oltre a quello costituito dall'instabilità lineare confermata dall'esperienza del moto di regime di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}^*$, sulle equazioni (66), anche quello costituito dalla limitatezza della soluzioni corrispondenti ai piccoli moti di *lacet*, senza cioè che sia necessario fare intervenire gli urti delle faccie inferiori esterne delle ruote sui funghi delle rotaie.

Ponendoci dunque nel caso di piccolo *lacet* supponiamo, dapprima *a priori*, che per tutti i moti, corrispondenti a condizioni iniziali sufficientemente prossime a quelle relative alla soluzione $\eta_0 \equiv \psi \equiv 0$, sia, per ogni valore di t ,

$$(68) \quad F\left(\frac{\dot{\eta}_0 \pm l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi\right) = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\dot{\eta}_0 \pm l\dot{\psi}}{\xi_0} - \psi \right] + \epsilon_{\pm}(t),$$

con $|\epsilon_{\pm}(t)| \leq \frac{1}{2} \epsilon_0$. Il sistema (65) si potrà quindi scrivere

$$(69) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_0 + 2\frac{\beta g}{\rho} \eta_0 = -kg\left(\frac{\dot{\eta}_0}{\xi_0} - \psi\right) - \mu g \epsilon_1(t) \\ \ddot{\psi} + 2\frac{l^2 \beta g}{\delta^2 \rho} \psi = -kg\frac{l^2}{\delta^2} \frac{\dot{\psi}}{\xi_0} - \mu g \frac{l}{\delta^2} \epsilon_2(t) \\ \quad - \frac{1}{2} \mu g h \left\{ F\left[\frac{h\dot{\psi}}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_{0\rho}} (\eta_0 + l\psi)\right] + F\left[\frac{h\dot{\psi}}{\xi_0} + \frac{\alpha\beta}{\gamma r_{0\rho}} (\eta_0 - l\psi)\right] \right\}, \end{cases}$$

ove $\epsilon_1(t) \leq \epsilon_0$ ed $\epsilon_2(t) \leq \epsilon_0$.

La (69₂) si scrive anche

$$(70) \quad \ddot{\psi} + 2\frac{l^2 \beta p}{\delta^2 \rho} \psi + \frac{kg l^2}{\delta^2} \frac{\dot{\psi}}{\xi_0} = G(t)$$

con $G(t)$ soddisfacente a

$$(71) \quad |G(t)| \leq \frac{\mu g}{\delta^2} [l |\epsilon_2(t)| + h],$$

essendo certamente $|F(z)| \leq 1$ per qualunque valore di $z \geq 0$.

Supponiamo ancora che risulti, per ragioni di semplicità,

$$(72) \quad \frac{1}{4} \frac{k^2 g^2 l^4}{\delta^4 \xi_0^2} > 2\gamma\lambda \frac{gl^2}{\delta^2}, \quad \frac{1}{4} \frac{k^2 g}{\xi_0} > 2 \frac{\beta}{\rho},$$

e siano $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ i due esponenti caratteristici relativi alla equazione differenziale omogenea associata alla (70).

Si considerino ora nel piano $(\psi, \dot{\psi})$, che denoteremo con π_1 , le traiettorie γ_1^+ di equazioni parametriche $\psi = \psi_*(t)$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_*(t)$, ove ψ_* , $\dot{\psi}_*$ risolvono la equazione

$$(73) \quad \ddot{\psi} + \frac{kg l^2}{\xi_0 \delta^2} \dot{\psi} + 2\beta g \frac{l^2}{\delta^2} \psi = \frac{\mu g}{\delta^2} (l\epsilon_0 + h),$$

e soddisfano alle condizioni iniziali

$$(74) \quad \psi_*(0) = -\frac{\mu(h + l\epsilon_0)}{2\beta l^2} < 0, \quad \dot{\psi}_*(0) = 0.$$

La semitraiettoria γ_1^+ parte dal punto A di coordinate $\psi_*(0)$, $\dot{\psi}_*(0)$ e giunge per $t \rightarrow +\infty$ al suo simmetrico A' rispetto all'origine descrivendo un arco convesso tutto contenuto nel semipiano $\dot{\psi} > 0$. Consideriamo inoltre la curva γ_2^+ simmetrica di γ_1^+ rispetto all'origine O . Le due curve γ_1^+ , γ_2^+ delimitano una regione $\mathcal{C}_1$ del piano $(\psi, \dot{\psi})$ tale che la generica soluzione dell'equazione (70), con $G(t)$ soddisfacente a (71), relativa a condizioni iniziali tali che la corrispondente immagine sul piano $(\psi, \dot{\psi})$ appartenga a $\mathcal{C}_1$, è rappresentata tutta da una traiettoria contenuta in $\mathcal{C}_1$. Infatti si consideri un punto P qualunque di γ_2^+ e ivi si confrontino i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di componenti $(\psi, \dot{\psi})$ con ψ , $\dot{\psi}$ soddisfacenti al sistema

$$(75) \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \frac{d\dot{\psi}}{dt} = -\frac{kg l^2}{\xi_0 \delta^2} \dot{\psi} - 2 \frac{\beta g l^2}{\delta^2} \psi + \frac{\mu g}{\delta^2} (l\epsilon_0 + h),$$

per $\mathbf{u}$, mentre per $\mathbf{v}$ soddisfano al sistema

$$(76) \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \frac{d\dot{\psi}}{dt} = -\frac{K g l^2}{\xi_0 \delta^2} \dot{\psi} - 2 \frac{\beta g l^2}{\delta^2} \psi + G(t).$$

Si osserva allora senz'altro che mentre $\mathbf{u}$ è tangente a γ_1^+ , $\mathbf{v}$ è rivolto verso l'interno di $\mathcal{C}_1$.

Per tutte le soluzioni delle (70) e (71), tali che l'immagine delle condizioni iniziali appartenga a $\mathcal{C}_1$, è quindi soddisfatta in particolare la relazione

$$(77) \quad |\psi| \leq \frac{\mu(h + l\epsilon_0)}{2\beta l^2}.$$

Ci serve però inoltre stabilire una limitazione superiore per $|\dot{\psi}|$, relativa a queste soluzioni. Indicando come abbiamo fatto più sopra con $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ i due esponenti caratteristici negativi dell'equazione differenziale (70) si ha con facili calcoli

$$(78) \quad |\dot{\psi}_{max}| \leq \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\alpha_1 / (\alpha_1 - \alpha_2)} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2 / (\alpha_1 - \alpha_2)} \right\} \frac{\mu}{\beta l^2} (l\epsilon_0 + h).$$

Consideriamo ora la (69₁), che, tenuto conto della limitazione (77) a cui soddisfa ψ , si scrive

$$(79) \quad \ddot{\eta}_0 + \frac{Kg}{\xi_0} \dot{\eta}_0 + 2 \frac{\beta g}{\rho} \eta_0 = R(t),$$

con

$$(80) \quad |R(t)| \leq \mu g \left| \frac{K(h + l\epsilon_0)}{2\beta l^2} + \epsilon_0 \right|.$$

Si operi sull'equazione (79) analogamente a come si è fatto più sopra per l'equazione (70), e si determini (come si può fare, dato che è soddisfatta la condizione (72)), una regione $\mathcal{C}_2$ del piano $\pi_2 \equiv (\eta_0, \dot{\eta}_0)$ tale che la generica soluzione, corrispondente a condizioni iniziali il cui punto rappresentativo in π_2 appartenga a $\mathcal{C}_2$, è rappresentato da una curva γ tutta contenuta in $\mathcal{C}_2$.

Se $-\beta_1, -\beta_2$ sono gli esponenti caratteristici relativi alla equazione associata alla (79), in relazione alle soluzioni di questa, risulta

$$(81) \quad |\dot{\eta}_0| \leq \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\beta_1 / (\beta_1 - \beta_2)} - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\beta_2 / (\beta_1 - \beta_2)} \right\} \frac{\mu \rho}{\beta} \left| \frac{k(h + l\epsilon_0)}{2\beta l^2} + \epsilon_0 \right|.$$

In corrispondenza a questi movimenti sarà allora, tenuto conto di (77), (78), (81), e della (39₁)

$$(82) \quad \left| \frac{ku_s}{\mu} \right| \leq \frac{k}{\mu} \left\{ \frac{\mu(h + l\epsilon_0)}{2\beta l^2} + \frac{l\alpha_1\alpha_2}{\xi_0(\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \frac{\mu}{\beta l^2} (l\epsilon_0 + h) \left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\alpha_1 / (\alpha_1 - \alpha_2)} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2 / (\alpha_1 - \alpha_2)} \right] + \frac{\mu \rho}{\beta \xi_0} \left| \frac{k(h + l\epsilon_0)}{2\beta l^2} + \epsilon_0 \right| \cdot \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left[\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\beta_1 / (\beta_1 - \beta_2)} - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\beta_2 / (\beta_1 - \beta_2)} \right] \right\}.$$

Consideriamo ora la funzione $F(u_s)$ che nell'ordine di approssimazione in cui ci siamo posti, possiamo sostituire con la funzione

$$(83) \quad F'(u_s) = \frac{Ku_s}{\mu} + \frac{2}{3} \left(\frac{ku_s}{\mu} \right)^{5/2}$$

nell'ipotesi che sia

$$(84) \quad \frac{ku_s}{\mu} \leq \left(\frac{3}{5} \right)^{2/3}.$$

Si supponga che siano verificate quelle condizioni strutturali per cui esista un ϵ_0 , in relazione al quale risulti soddisfatta, oltre alla disuguaglianza (84), anche la seguente

$$(85) \quad \frac{2}{3}(A + B\epsilon_0)^{5/2} \leq \frac{1}{2}\epsilon_0$$

avendo indicato con $A + B\epsilon_0$ l'espressione lineare in ϵ_0 a secondo membro di

(82). Si determinino, in corrispondenza a questo valore di ϵ_0 , le regioni $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ dei piani π_1 , π_2 . Ogni soluzione del sistema (65), soddisfacente a condizioni iniziali i cui punti rappresentativi appartengono a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, sono rappresentati sui piani π_1 , π_2 , da una coppia di traiettorie tutte contenute in $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ rispettivamente. In tale eventualità le soluzioni, corrispondenti a condizioni iniziali sufficientemente prossime a quelle del moto ideale di regime, sono limitate, nonostante, che il moto suddetto possa essere linearmente instabile.

Si verifica facilmente, data la presenza di numerosi parametri, che pur potendo avere il sistema lineare della prima approssimazione due esponenti caratteristici a parte reale positiva, tuttavia possono essere contemporaneamente soddisfatte le condizioni (72), (84), (85) ed allora le soluzioni di regime sono soluzioni corrispondenti a moti del tipo delle oscillazioni di combinazione, caratteristici moti di regime dei sistemi vibranti autonomi in due gradi di libertà. Queste soluzioni hanno carattere, in generale, ergodico e quasi periodico. Nel caso che sussistano le condizioni di applicabilità del teorema enunciato si potranno ancora stabilire dei limiti superiori, per le ampiezze massime delle due variabili η_0 e ψ caratteristiche del moto di *lacet*, limitazioni fornite dalle formule date più sopra.

Istituto Matematico
Università di Modena