Sulla Mutua Azione fra Fenomeni Acustici ed Idromagnetici

RENATO NARDINI

Memoria presentata da D. GRAFFI

1. Introduzione. Nel presente lavoro si prosegue lo studio di casi che presentano mutua influenza fra fenomeni idromagnetici¹ e fenomeni di tipo acustico. Già in precedenza esaminando, in via teorica, la possibilità di propagazione di fenomeni ondosi [1] in fluidi compressibili, non viscosi e di conducibilità elettrica infinita, è stato rilevato che, per ottenere valori della velocità di propagazione che manifestano una fusione dei due tipi di fenomeni, appare necessario che sul fronte d'onda non sia nulla la componente tangenziale del campo magnetico.

In un successivo lavoro [2] il precedente risultato è stato confermato nello studio di un caso particolare; precisamente, considerando onde piane che si propagano nella direzione di un preesistente campo magnetico costante $\mathbf{H}_0$, in prima approssimazione (cioè considerando trascurabili le quantità di ordine superiore al primo) si è rilevata la presenza di comuni onde acustiche che si propagano con la nota velocità del suono u e di comuni onde idromagnetiche che si propagano con la nota velocità

$$w = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} H_0$$

(μ permeabilità magnetica, ρ densità): questi due tipi di onde sono del tutto indipendenti fra loro. Passando però alla seconda approssimazione si è, anche in via quantitativa, riscontrata mutua influenza fra i due tipi di fenomeni: in particolare nel caso in cui è $w > u$ si ha una specie di prolungamento dei fenomeni acustici fino al fronte d'onda idromagnetico, in accordo con il fatto che sul fronte d'onda, più arretrato, dei semplici fenomeni acustici, non è nulla generalmente la componente tangenziale del campo magnetico; per $w < u$ invece, i fenomeni idromagnetici si arrestano sul fronte d'onda, più arretrato, che è loro proprio quando non c'è mutua influenza, in accordo con il fatto che sul detto fronte è nulla la componente tangenziale del campo magnetico.

In ogni caso la mutua influenza, quando c'è, si manifesta con termini del secondo ordine.

¹ Adottiamo il termine "idromagnetico" al posto del termine magneto-idrodinamico, usato precedentemente, e ciò per uniformarci all'uso che sta diffondendosi sempre più ampiamente.

Giova anche rilevare che, nel problema qui riassunto, il campo magnetico primario $\mathbf{H}_0$, normale al fronte d'onda, non contribuisce, secondo quanto si è detto all'inizio, alla mutua azione fra i due tipi di fenomeni.

Quando invece si consideri un campo magnetico primario $\mathbf{H}_0$ che risulti normale alla direzione di propagazione (o che normalmente a tale direzione abbia componente diversa da zero), la mutua azione in discorso si manifesta subito in prima approssimazione. L'argomento è stato già trattato per le onde piane anzitutto, in via sintetica, da HERLOFSON [3], poi, sotto forma più generale, da VAN DE HULST [4] ed infine, più specificatamente, da ANDERSON [5].

Qui ci si propone invece di studiare, al riguardo, il caso di onde aventi simmetria cilindrica.

2. Schema del lavoro. Per lo scopo anzidetto si introducono per prima cosa (n. 3) le equazioni del problema relativo ad un fluido compressibile, perfetto, omogeneo, isotropo ed elettricamente conduttore, soggetto ad un campo magnetico primario assegnato che, rispetto ad un sistema di coordinate cilindriche, abbia solo componente trasversa e sia dotato di simmetria cilindrica: come caso particolare tale campo magnetico è ottenibile, notoriamente, mediante una corrente elettrica continua che percorra un filo illimitato disposto lungo l'asse delle coordinate. Si ricavano poi le corrispondenti equazioni linearizzate contenenti solo grandezze del prim'ordine.

Esaminando il caso in cui la conducibilità elettrica del mezzo possa ritenersi infinita (n. 4) e introducendo qualche semplificazione, che riguarda l'assenza di alcune delle componenti delle grandezze vettoriali in questione rispetto al detto sistema di coordinate, si rileva la possibilità di onde di tipo acustico che si propagano con velocità che è tanto superiore a quella delle comuni onde sonore, quanto più intenso è il campo magnetico primario; tali onde (longitudinali) sono accompagnate da onde idromagnetiche (trasversali) che si propagano con uguale velocità e che sono particolarmente semplici se la regione in cui si considera il fenomeno è costituita da un sottile strato compreso fra due cilindri coassiali illimitati. Si rileva, a tale riguardo, la possibilità (n. 5) che l'accennata variazione nella velocità del suono possa raggiungere un'entità sufficiente da far sperare in un controllo sperimentale. Tale controllo risulterebbe interessante anche per il fatto che, mentre, a quanto mi consta, mancano fin'ora risultati pratici che possano portar luce sul problema in questione, non mancano, dal lato teorico, pareri discordi: è infatti doveroso ricordare che KORNHAUSER [6], discutendo i risultati approssimati esposti da ANDERSON [5] sull'attenuazione che un'onda piana acustica subisce a causa di fenomeni idromagnetici in un mezzo di conducibilità elettrica finita, prospetta al riguardo la possibilità di spiegare tale attenuazione solamente in base a dissipazione dovuta all'effetto JOULE senza ricorrere all'ipotesi che il campo magnetico perturbi l'onda acustica.

Se si passa invece al caso della conducibilità elettrica finita (n. 6), non è possibile, come è stato dimostrato altrove [1], alcun fenomeno di propagazione ondosa, però, ricavate le opportune equazioni linearizzate, se ne considerano

delle soluzioni di tipo sinusoidale e si dimostra che sono possibili, in generale, due modi di propagazione della velocità di fase, accompagnati da assorbimento; poichè le dette equazioni sono sostanzialmente le stesse che si hanno nel caso di un fenomeno piano, i risultati ottenuti vengono così ad aggiungersi a quelli, già ricordati, di ANDERSON. In particolare, esaminando dei casi limite (n. 7), si rileva come, a bassa frequenza, le dette soluzioni sinusoidali tendano ad avvicinarsi a quelle ottenute nel caso della conducibilità infinita, mentre, ad alta frequenza, tendono ad avvicinarsi a quelle ottenute nel caso di conducibilità nulla e cioè ad una netta separazione fra fenomeni di tipo acustico e quelli di tipo elettromagnetico. Aumentando invece indefinitamente l'intensità del campo magnetico primario, c'è la tendenza ad un unico modo di propagazione di tipo elettromagnetico con totale assenza di fenomeni idrodinamici.

Da ultimo (n. 8) si rileva che, nell'ipotesi (sempre verificata nei casi pratici) in cui la velocità delle comuni onde sonore u è molto piccola nei confronti della velocità delle onde elettromagnetiche, si può trascurare l'apporto della corrente di spostamento anche per frequenze molto elevate. Se poi si tratta il caso particolare in cui la velocità u è dello stesso ordine di grandezza della velocità w delle comuni onde idromagnetiche, allora le formule si semplificano, in modo da permettere immediatamente il calcolo esplicito della velocità di fase e del coefficiente di attenuazione. Una verifica sperimentale del valore calcolato per quest'ultimo potrebbe portare chiarimenti sulla disparità d'idee a cui si è accennato più sopra.

3. Equazioni del problema. Partiamo dalle seguenti equazioni relative a fenomeni idromagnetici in un fluido compressibile, perfetto, omogeneo, isotropo ed elettricamente conduttore:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \\ \text{div } \mathbf{H} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} - U \right) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad p = f(\rho), \end{array} \right.$$

dove $\mathbf{H}$ è il campo magnetico, $\mathbf{E}$ il campo elettrico, $\mathbf{j}$ la densità di corrente di conduzione, $\mathbf{v}$ la velocità della generica particella del mezzo, p l'eccesso di pressione rispetto alla pressione p_0 del fluido in quiete e ρ è la densità; la funzione assegnata U rappresenti il potenziale delle forze esterne non elettromagnetiche che agiscono sull'unità di massa del fluido ed infine le costanti γ , μ ed ϵ siano

rispettivamente la conducibilità elettrica, la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del mezzo.

Supponiamo preesistente un campo magnetico stazionario $\mathbf{H}_0$ che, rispetto ad un sistema di coordinate cilindriche r , θ e z , sia dipendente solo dalla variabile r ed abbia componente solo parallelamente alle linee θ . Potremo allora porre nelle equazioni precedenti

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h},$$

dove con $\mathbf{h}$ si è indicato il campo magnetico indotto.

Come caso particolare il campo magnetico $\mathbf{H}_0$ può essere realizzato facilmente mediante una corrente continua stazionaria d'intensità i costante, che percorre un filo illimitato disposto secondo l'asse z e, in tale caso, come è noto, è

$$(2) \quad H_0 = \frac{i}{2\pi r}.$$

Quest'ultimo campo magnetico, per $r > 0$, soddisfa anche all'equazione

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{H}_0 = 0,$$

ciò che permette di semplificare alcuni calcoli: tenuto conto di ciò ci riferiremo in seguito, per semplicità, a tale caso particolare, riportando in nota le equazioni che si avrebbero con un campo magnetico più generale per il quale non vale la (3).

Per limitarci, come si è detto, ad effetti del prim'ordine, seguendo il procedimento mediante il quale nello studio dei piccoli moti dei fluidi compressibili si linearizzano le relative equazioni, introdurremo la concentrazione s espressa da

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

dove ρ_0 è la densità del fluido in condizioni di quiete; partendo dall'ultima equazione del sistema (1) si porrà

$$u^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0}$$

e ci si servirà delle abituali approssimazioni

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0(1+s)} \simeq \frac{1-s}{\rho_0}$$

$$\text{grad } p \simeq u^2 \text{ grad } \rho = u^2 \rho_0 \text{ grad } s;$$

trascureremo inoltre le forze esterne di natura non elettromagnetica ed infine considereremo valori molto piccoli per le grandezze incognite $\mathbf{h}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{v}$ ed s ,

trascurando i termini di grado superiore al primo nelle dette grandezze. Con ciò le equazioni di prima approssimazione dedotte dal sistema (1) sono²

$$(4) \quad \text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(5) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$$

$$(6) \quad \mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}_0)$$

$$(7) \quad \text{div } \mathbf{h} = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \mathbf{j} \times \mathbf{H}_0 - u^2 \text{ grad } s$$

$$(9) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

4. Caso dell'infinita conducibilità elettrica. Riservandoci di utilizzare più avanti tali equazioni al completo, consideriamo per ora il caso in cui la conducibilità elettrica γ sia molto grande in modo da poter essere ritenuta infinita. Segue dalla (6)

$$\mathbf{E} = -\mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}_0 ,$$

per cui l'equazione (5) diventa

$$(10) \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0),$$

mentre la (8), eliminando $\mathbf{j}$ per mezzo della (4), dà

$$(11) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \left(\text{rot } \mathbf{h} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right) \times \mathbf{H}_0 - u^2 \text{ grad } s;$$

Tali equazioni³ vanno considerate assieme alle equazioni (7) e (9).

$$(11') \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \left[\text{rot } (\mathbf{h} + \mathbf{H}_0) + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right] \times \mathbf{H}_0 + \frac{\mu}{\rho_0} \text{rot } \mathbf{H}_0 \times \mathbf{h} - u^2 \text{ grad } s.$$

² Osserviamo che tali equazioni linearizzate sono valide anche se nel sistema (1) si fosse tenuto conto degli effetti della densità di carica elettrica la quale, posto

$$\epsilon \text{div } \mathbf{E} = \eta,$$

completerebbe l'equazione (1₃) nel seguente modo

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \eta \mathbf{v},$$

introducendovi quindi un termine non lineare, trascurabile nel nostro procedimento.

³ Nel caso di un campo magnetico primario più generale, per il quale non valga la (3), l'equazione (11) andrebbe scritta così

Delle dette equazioni consideriamo una soluzione particolare che soddisfi alle due ulteriori condizioni:

- (a) la velocità $\mathbf{v}$ abbia solo componente v_z lungo l'asse z , mentre il campo magnetico indotto abbia solo componente h_θ lungo le linee θ ;
- (b) tutte le incognite scalari e cioè v_z , h_θ ed s siano indipendenti dalla variabile spaziale θ e dipendano quindi solo dal tempo t e dalle variabili spaziali z ed r .

Segue immediatamente che l'equazione (7) è soddisfatta.

Poniamo inoltre

$$(12) \quad \frac{1}{\epsilon\mu} = c^2, \quad \frac{\mu}{\rho_0} H_0^2 = w^2.$$

Se ora si proietta l'equazione (10) sulle linee θ , l'equazione (11) sull'asse z e si considera l'equazione (9) sotto forma scalare, si ottiene nell'ordine

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial h_\theta}{\partial t} = -H_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\mu}{\rho_0} H_0 \frac{\partial h_\theta}{\partial z} - u^2 \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{cases}$$

mentre, proiettando l'equazione (11) sulle linee r si ha l'equazione⁴

$$(14) \quad \frac{\mu H_0}{\rho_0 r} \frac{\partial r h_\theta}{\partial r} + u^2 \frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Consideriamo per ora il sistema (13): se ne deriviamo la seconda equazione rispetto al tempo t e vi sostituiamo i termini $\partial^2 h_\theta / \partial t \partial z$ e $\partial^2 s / \partial t \partial z$ con le relative espressioni ricavate dalle altre equazioni, si ottiene l'equazione nella sola incognita v_z

$$(15) \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = \frac{u^2 + w^2}{1 + w^2/c^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$

Posto

$$(16) \quad V = \sqrt{\frac{u^2 + w^2}{1 + w^2/c^2}} \quad \left(w^2 = \frac{\mu}{\rho_0} H_0^2 \right),$$

⁴ Se, in conformità a quanto è stato detto nella nota precedente, all'equazione (11) si sostituisce la (11'), le equazioni (13) rimangono inalterate, mentre la (14) va completata così

$$(14') \quad \frac{\mu H_0}{\rho_0 r} \frac{\partial r(h_\theta + H_0)}{\partial r} + \frac{\mu h_\theta}{\rho_0 r} \frac{\partial r H_0}{\partial r} + u^2 \frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Rileviamo anche che la proiezione dell'equazione (10) sulle linee r e z e dell'equazione (11) sulle linee θ dà luogo a delle identità.

l'integrale generale dell'equazione (15) si può scrivere sotto la forma

$$(17) \quad v_z(t, r, z) = F_1\left(t - \frac{z}{V}, r\right) + F_2\left(t + \frac{z}{V}, r\right)$$

dove le funzioni F_1 ed F_2 non sono arbitrarie ma soggette, come si vedrà, ad una relazione in conseguenza dell'equazione (14); esse, comunque, rappresentano nell'ordine un'onda progressiva ed un'onda regressiva, entrambe longitudinali, di tipo acustico, in generale non omogenee per la dipendenza da r , con velocità di propagazione V pure dipendente da r tramite H_0 e, in ogni caso, maggiore della velocità delle comuni onde sonore.

Introducendo il valore fornito per v_z dalla (17) nell'equazioni (13₁) e (13₂) e integrando rispetto al tempo si ottiene

$$(18) \quad \begin{cases} h_\theta = \frac{H_0}{V} \left\{ F_1\left(t - \frac{z}{V}, r\right) - F_2\left(t + \frac{z}{V}, r\right) \right\} + \varphi(r, z) \\ s = \frac{1}{v} \left\{ F_1\left(t - \frac{z}{V}, r\right) - F_2\left(t + \frac{z}{V}, r\right) \right\} + \psi(r, z), \end{cases}$$

dove le funzioni φ e ψ danno luogo ad un campo idromagnetico stazionario, da cui, d'ora innanzi, prescindiamo; l'espressione che dà s completa i due tipi di onde longitudinali forniti dalla (17), mentre l'espressione che dà h_θ fornisce una perturbazione magnetica indotta, che si propaga trasversalmente.

Introducendo i valori (18) nell'equazione (14), si ha la seguente relazione⁵

$$\begin{aligned} \frac{\mu H_0}{\rho_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{r H_0}{V} \left[F_1\left(t - \frac{z}{V}, r\right) - F_2\left(t + \frac{z}{V}, r\right) \right] \right\} \\ + u^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{V} \left[F_1\left(t - \frac{z}{V}, r\right) - F_2\left(t + \frac{z}{V}, r\right) \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

che, soprattutto nei riguardi della dipendenza da r , limita l'arbitrarietà delle funzioni F_1 ed F_2 . Purtroppo tale relazione appare abbastanza complicata, per cui non insisteremo ulteriormente su ciò.

Preferiamo piuttosto richiamare l'attenzione sul caso concreto in cui, essendo sempre $\mathbf{H}_0$ fornito da una corrente continua che percorre l'asse delle z , il fluido considerato sia contenuto in uno strato compreso fra due superfici cilindriche circolari illimitate, che abbiano come asse comune l'asse z ; se lo spessore dello strato è piccolo in confronto del raggio, praticamente si può considerare costante H_0 (e perciò V) e trascurare la dipendenza da r delle grandezze in questione e quindi l'apporto dell'equazione (14). Allora le funzioni F_1 ed F_2 , che contengono il solo argomento $t \mp z/V$, si possono considerare arbitrarie.

⁵ Nel caso di un campo magnetico primario $\mathbf{H}_0$ più generale, che non soddisfi all'equazione (3), si ha, in base alla nota precedente, che a primo membro di tale equazione va aggiunto il termine

$$\frac{\mu H_0}{\rho_0 r} \left\{ 1 + \frac{1}{V} F_1\left(t - \frac{z}{V}, r\right) - \frac{1}{V} F_2\left(t + \frac{z}{V}, r\right) \right\} \frac{\partial r H_0}{\partial r}.$$

Si ottengono così delle formule particolarmente semplici, soprattutto se si considera una sola delle due onde.

E'utile anche notare che tanto la velocità quanto il campo magnetico (primario e indotto) risultano tangenti alle due superfici cilindriche che formano il contorno dello strato, mentre il campo elettrico $\mathbf{E} = -\mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}_0$ è ad esse normale: di conseguenza le dette superfici si possono immaginare costituite praticamente di materiale da considerare come perfettamente conduttore, dal punto di vista elettrico, e come rigido, dal punto di vista meccanico.

5. Sulla possibilità di un controllo sperimentale. Per quanto si è detto al n. 2, sarebbe interessante un controllo sperimentale dei risultati ottenuti in via teorica. Anzitutto rileviamo che, nei casi pratici, si ha $w^2 \ll c^2$, per cui nell'equazione (13₂), e di conseguenza nella (16), si può trascurare il termine w^2/c^2 : ciò equivale a trascurare l'apporto della corrente di spostamento $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$, qualunque sia la pulsazione ω (il che, per pulsazioni molto elevate, non è garantito *a priori*). La velocità di propagazione del suono è allora espressa più semplicemente da

$$V = \sqrt{u^2 + w^2}$$

cioè, in accordo con i risultati di HERLOFSON e ANDERSON per il caso piano, risulta tanto maggiore del valore assunto in assenza di fenomeni idromagnetici quanto più intenso è il campo magnetico primario $\mathbf{H}_0$.

Per avere una valutazione sull'ordine di grandezza degli addendi che ivi compaiono sotto radice, si può, riferendoci ad un mezzo costituito da un gas biatomico, assumere

$$u^2 = 1,4 \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Si ha allora

$$(19) \quad V^2 = \frac{1,4}{\rho_0} \left(p_0 + \frac{\mu}{1,4} H_0^2 \right).$$

Ora ponendo (in unità MKS)

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ ohm sec m}^{-1}$$

ed esprimendo H_0 per mezzo della formula (2), in cui si faccia⁶

$$i = 2000 \text{ ampere}$$

$$r = 0,01 \text{ m},$$

è facile riscontrare che l'addendo $(\mu/1,4)H_0^2$ risulta circa 1/100 dell'ordinaria pressione atmosferica, per cui, in linea di massima, sembra possibile ottenere perfino che u e w abbiano lo stesso valore.

⁶ Eventualmente, per evitare il riscaldamento del filo percorso da corrente, si potrà sperimentare a bassa temperatura.

6. **Caso della conducibilità finita.** Se la conducibilità γ del mezzo non è sufficientemente grande da poter essere considerata infinita, non è possibile, come si è ricordato al n. 2, alcun fenomeno di propagazione ondosa; si può però considerare, per l'equazioni che reggono il fenomeno, delle soluzioni di tipo sinusoidale e studiare i vari valori che così si possono presentare per la velocità di fase e che corrispondono a *modi* diversi.

Riprendiamo a tale scopo l'equazioni (4), $\dots$, (9) al completo e consideriamo delle soluzioni che, sempre rispetto ad un sistema di coordinate cilindriche r, θ e z , soddisfino alle condizioni:

- (a') la velocità $\mathbf{v}$ abbia solo componente v_z lungo l'asse z , il campo magnetico indotto abbia solo componente h_θ lungo le linee θ ed il campo elettrico $\mathbf{E}$ abbia solo componente E_r lungo le linee r ;
- (b') il fenomeno si svolga in uno strato cilindrico indefinito di spessore sufficientemente piccolo in modo da poter trascurare la dipendenza delle grandezze considerate dalla variabile r ; si supponga inoltre che le dette grandezze siano indipendenti anche da θ e quindi dipendano solo da t e da z .

Con ciò la (7) è senz'altro soddisfatta ed inoltre, anche qui come al n. 4, la velocità $\mathbf{v}$ e il campo magnetico $\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ risultano tangenti al contorno che limita il detto strato, mentre il campo elettrico $\mathbf{E}$ risulta ad esso normale.

Nei riguardi del campo magnetico primario ammettiamo che la sua unica componente lungo le linee θ si possa, nelle presenti condizioni, ritenere costante.

Proiettando ora l'equazione (4) sulle linee r , dopo aver sostituito alla corrente di conduzione $\mathbf{j}$ l'espressione data dalla (6), l'equazione (5) sulle linee θ , l'equazione (8) sull'asse z ed esprimendo infine la (9) sotto forma scalare, si ottiene il sistema

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial h_\theta}{\partial z} = \gamma(E_r - \mu H_0 v_z) + \epsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_\theta}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \gamma H_0 E_r - \frac{\mu^2}{\rho_0} \gamma H_0^2 v_z - u^2 \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Giova qui rilevare che, se si introduce un sistema di coordinate cartesiane x, y, z e si suppone che il campo magnetico primario $\mathbf{H}_0$ sia costante e diretto come l'asse delle y , il campo magnetico indotto abbia pure componente solo lungo l'asse y , il campo elettrico $\mathbf{E}$ solo lungo l'asse x , mentre la velocità abbia solo componente v_z , proiettando sugli assi l'equazioni (4), $\dots$, (9), si ottiene un sistema identico al sistema (20), con la sola sostituzione di h_y al posto di h_θ .

ed E_x al posto di E_r : ne segue che tutto quello che si deduce dal sistema (20) per il particolare caso cilindrico trattato, sarà valido anche per il caso piano ora specificato.

Cerchiamo ora per il sistema (20) una soluzione sinusoidale del tipo

$$(21) \quad h_\theta = h_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad E_r = E_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad v_z = v_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad s = s_0 e^{i(\omega t - kz)},$$

dove i è l'unità immaginaria, ω è un numero reale positivo assegnato e rappresenta la pulsazione, mentre k è un numero complesso da determinarsi: ciascuno dei possibili valori di k dà luogo ad un modo di propagazione della fase e da esso si potranno ricavare la corrispondente velocità di fase, che è fornita dall'espressione $\omega/\Re(k)$ ($\Re$ simbolo della parte reale), ed il corrispondente coefficiente di attenuazione, che è fornito dal coefficiente della parte immaginaria di k . Infine i numeri h_0 , E_0 , v_0 ed s_0 sono costanti, delle quali una, per esempio h_0 , deve essere assegnata e, senza che sia restrittivo, può essere reale, le altre invece verranno espresse in funzione di k e di h_0 .

Dato che è

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -ik$$

dalle equazioni (20) si ricava il sistema

$$(22) \quad \begin{cases} ikh_0 - (\gamma + i\omega\epsilon)E_0 + \mu\gamma H_0 v_0 = 0 \\ \omega\mu h_0 - kE_0 = 0 \\ -\frac{\mu}{\rho_0}\gamma H_0 E_0 + \left(i\omega + \frac{\mu^2\gamma}{\rho_0}H_0^2\right)v_0 - ik\omega^2 s_0 = 0 \\ -kv_0 + \omega s_0 = 0; \end{cases}$$

dovendo tale sistema essere soddisfatto per valori non tutti nulli attribuiti ad h_0 , E_0 , v_0 ed s_0 , dovrà essere

$$\begin{vmatrix} ik & -(\gamma + i\omega\epsilon) & \mu\gamma H_0 & 0 \\ \omega\mu & -k & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\gamma H_0/\rho_0 & i\omega + \frac{\mu^2\gamma}{\rho_0}H_0^2 & -ik\omega^2 \\ 0 & 0 & -k & \omega \end{vmatrix} = 0;$$

sviluppando tale determinante e tenendo presenti le posizioni (12), si ottiene l'equazione⁷

⁷ E' utile rilevare che, più in generale, si può supporre che le grandezze incognite del sistema (20) h_θ , E_r , v_z ed s si presentino sotto la forma

$$(21') \quad f(z)e^{i\omega t}$$

dove $f(z)$ assume valori diversi per ognuna delle incognite; se allora si introducono tali espressioni nel sistema (20), si può facilmente ottenere che ciascun valore attribuito alla funzione $f(z)$ deve soddisfare ad un'equazione differenziale del quarto ordine, di cui la (23) è l'equazione caratteristica (di radici ik): con ciò è dimostrato che la soluzione di tipo (21') ha necessariamente l'espressione fornita dalla (21).

$$(23) \quad k^4 - \left[\omega^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{c^2} \right) - i\omega\mu\gamma \left(1 + \frac{w^2}{u^2} \right) \right] k^2 + \frac{\omega^4}{c^2 u^2} - i\omega\mu\gamma \frac{\omega^2}{u^2} \left(1 + \frac{w^2}{c^2} \right) = 0,$$

che, essendo biquadratica, ci dà, in corrispondenza delle radici $\pm k_1$ e $\pm k_2$, due differenti modi di propagazione della fase (in ciascuno dei due versi dell'asse z).

Posto

$$(24) \quad \Delta = \left[\omega^2 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} \right) + i\omega\mu\gamma \left(1 + \frac{w^2}{u^2} \right) \right]^2 - 4i\omega^3\mu\gamma \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{w^2}{u^2},$$

tali radici sono fornite da

$$(25) \quad k^2 = \frac{1}{2} \left[\omega^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{c^2} \right) - i\omega\mu\gamma \left(1 + \frac{w^2}{u^2} \right) \pm \sqrt{\Delta} \right]$$

e presentano mutua azione fra fenomeni acustici e fenomeni idromagnetici.

Per ciascun valore di k ottenuto dall'equazione (23), base al sistema (22) si ricava poi facilmente

$$(26) \quad \begin{cases} E_0 = \frac{\mu\omega}{k} h_0 \\ v_0 = \frac{\omega\mu^2\gamma H_0}{k\rho_0[i\omega(1 - u^2k^2/\omega^2) + \mu\gamma w^2]} h_0 \\ s_0 = \frac{k}{\omega} v_0. \end{cases}$$

7. Casi limite. Può essere utile esaminare alcuni casi limite; ricordando che $\omega/\mathfrak{R}(k)$ rappresenta la velocità di fase, notiamo che dalla (25) si ricava

$$(27) \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{2\omega}{\omega \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{c^2} \right) - i\mu\gamma \left(1 + \frac{w^2}{u^2} \right) \pm \sqrt{\left[\omega \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} \right) + i\mu\gamma \left(1 + \frac{w^2}{u^2} \right) \right]^2 - 4i\omega\mu\gamma \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{w^2}{u^2}}}.$$

Al limite per $\omega \rightarrow 0$ tale espressione tende a zero se vi si prende il segno $-$, mentre nel caso in cui si prende il segno $+$, si ottiene

$$(28) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{u^2 + w^2}{1 + w^2/c^2};$$

se ne deduce che i due modi, in generale possibili, tendono, a basse pulsazioni, a ridursi a quello solo che, privo di assorbimento, si è già riscontrato al n. 4 nel caso di conducibilità elettrica infinita.

D'altra parte si ha immediatamente dalla (27)

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{k^2} = \begin{cases} u^2 \\ c^2 \end{cases}$$

cioè, ad elevate pulsazioni, la mutua influenza, presente in generale nei due modi, tende a scomparire: si ottiene così lo stesso effetto che presenta il caso di conducibilità nulla e cioè un modo di tipo puramente elettromagnetico ed uno di tipo puramente acustico, entrambi senza assorbimento e completamente indipendenti.

Infine, analogamente a quanto si è fatto per ricavare la (28), si ottiene

$$\lim_{H_0 \rightarrow \infty} \frac{\omega^2}{k^2} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\omega^2}{k^2} = c^2$$

e quindi, per fortissimi campi magnetici primari, c'è la tendenza ad un unico modo puramente elettromagnetico: ciò è confermato anche dal fatto che si ha dalle (26)

$$\lim_{H_0 \rightarrow \infty} v_0 = 0, \quad \lim_{H_0 \rightarrow \infty} s_0 = 0,$$

cioè totale assenza di fenomeni idrodinamici.

Rileviamo che analoghi risultati sono stati ottenuti considerando gli stessi casi limite relativamente ad onde idromagnetiche puramente trasversali in fluidi incompressibili [7].

8. Studio di un caso particolare. Nei casi concreti si ha che la velocità di propagazione dei fenomeni acustici u è molto inferiore alla velocità di propagazione dei fenomeni elettromagnetici c e quindi, nella formula risolutiva (25), si può ovunque trascurare il termine $1/c^2$ nei confronti del termine $1/u^2$; anche qui, come al n. 5, risulta trascurabile l'apporto della corrente di spostamento $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ qualunque sia la pulsazione ω . La formula risolutiva resta però ancora abbastanza complicata per cui, soprattutto in vista di un caso particolare che sarà esaminato in seguito, preferiamo partire dall'equazione (23) e porvi

$$k = a - ib \quad (a \text{ e } b \text{ reali});$$

annullando separatamente la parte reale e il coefficiente di quella immaginaria, dopo facili calcoli, si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} (a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2 - \frac{\omega^2}{u^2}(a^2 - b^2) + 2\omega\mu\gamma \frac{V^2}{u^2}ab = 0 \\ -4ab(a^2 - b^2) + 2\frac{\omega^2}{u^2}ab + \omega\mu\gamma \frac{V^2}{u^2}(a^2 - b^2) - \frac{\omega^2}{u^2}\omega\mu\gamma = 0. \end{cases}$$

Tali equazioni si semplificano se si introducono le incognite x, y , espresse da

$$(29) \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y, \end{cases}$$

(di cui vanno presi in considerazione solo i valori reali), ed i coefficienti

$$\frac{\omega^2}{u^2} = l, \quad \omega\mu\gamma = m, \quad \frac{V^2}{u^2} = n \quad (V^2 = u^2 + w^2);$$

si ottiene allora il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - lx + mny = 0 \\ -2xy + mnx + ly - lm = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$(30) \quad x = \frac{l(m - y)}{-2y + mn}$$

e, di conseguenza, dalla prima si ha

$$(31) \quad 4y^4 - 8mny^3 + (l^2 + 5m^2n^2)y^2 - mn(l^2 + m^2n^2)y + l^2m^2(n - 1) = 0;$$

con procedimento inverso si ricava invece

$$(32) \quad y = \frac{m(l - nx)}{l - 2x}$$

$$(33) \quad 4x^4 - 8lx^3 + (5l^2 + m^2n^2)x^2 - l(l^2 + m^2n^2)x + l^2m^2(n - 1) = 0.$$

Notiamo che, essendo $n > 1$, tanto per l'equazione (31) quanto per l'equazione (33) sono escluse radici negative o nulle, per cui, se le dette equazioni ammettono radici reali, queste sono necessariamente positive. Segue, in base alla (29₂), che i valori fisicamente accettabili per a e b sono necessariamente dello stesso segno (ed è $a^2 > b^2$): non essendo restrittivo supporre che tale segno sia positivo, si conclude che, quando c'è propagazione, c'è anche assorbimento (come è da attendersi in un mezzo di conducibilità elettrica finita).

Un caso di facile soluzione si ha quando si può supporre⁸

$$u = w \quad \text{e cioè} \quad n = 2 \quad (V^2 = 2u^2).$$

Conviene allora porre

$$l = 2l' \quad \left(l' = \frac{\omega^2}{V^2} \right).$$

Con ciò le (30) e (31) diventano nell'ordine

$$\begin{aligned} (y - m)x &= (y - m)l' \\ (y - m)^2(y^2 - 2my + l'^2) &= 0, \end{aligned}$$

che, per $y \neq m$, danno le soluzioni

$$(34) \quad x = l', \quad y = m \pm \sqrt{m^2 - l'^2}.$$

Queste soluzioni sono accettabili solo se è $l' < m$ (cioè $\omega < \mu \gamma V^2$).

Invece per $l' > m$ si prenderanno in considerazione le (32) e (33), che diventano

⁸ Ciò, in linea di massima, si può realizzare anche praticamente, come è stato rilevato alla fine del n.5.

$$(x - l')y = (x - l')m$$

$$(x - l')^2(x^2 - 2l'x + m^2) = 0;$$

da qui, per $x \neq l'$, si ricavano le soluzioni

$$(35) \quad x = l' \pm \sqrt{l'^2 - m^2}, \quad y = m.$$

Nel caso in cui è $l' = m$ ($\omega = \mu\gamma V^2$), si ottiene, per entrambe le vie, l'unica soluzione

$$(36) \quad x = l', \quad y = m.$$

Se sono valide le soluzioni (34), esprimendo, mediante le (29), a e b in funzione dei detti valori di x e y , si può passare al calcolo della velocità di propagazione della fase V_f , ottenendone i due valori possibili

$$V_f = \frac{\omega}{a} = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{\sqrt{1 + [(\mu\gamma V^2/\omega) \pm \sqrt{(\mu\gamma V^2/\omega)^2 - 1}]^2 + 1}}},$$

entrambi minori di V (velocità del fronte d'onda per $\gamma = \infty$); i corrispondenti valori del coefficiente di attenuazione b sono

$$b = \frac{\omega}{\sqrt{2}V} \sqrt{\sqrt{1 + [(\mu\gamma V^2/\omega) \pm \sqrt{(\mu\gamma V^2/\omega)^2 - 1}]^2} - 1}.$$

Se invece le soluzioni sono fornite dalle (35), si hanno rispettivamente i valori

$$V_f = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{\sqrt{(1 \pm \sqrt{1 - \mu^2\gamma^2 V^4/\omega^2})^2 + \mu^2\gamma^2 V^4/\omega^2} + 1 \pm \sqrt{1 - \mu^2\gamma^2 V^4/\omega^2}}}$$

$$b = \frac{\omega}{\sqrt{2}V} \sqrt{\sqrt{(1 \pm \sqrt{1 - \mu^2\gamma^2 V^4/\omega^2})^2 + \mu^2\gamma^2 V^4/\omega^2} - (1 \pm \sqrt{1 - \mu^2\gamma^2 V^4/\omega^2})}.$$

dove la scelta del segno deve essere concorde.

Nel caso particolare della soluzione (36), i due modi, precedentemente distinti, si fondono in un modo unico, cui competono i valori

$$V_f = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}, \quad b = \frac{\omega\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}V}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. NARDINI, Sui fronti d'onda nella magneto-idrodinamica, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **7** (1956), 3-32.
- [2] ———, Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica, Note I e II, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **20** (1956), 457-462 e 591-596.
- [3] N. HERLOFSON, Magneto-hydrodynamic waves in a compressible fluid conductor, *Nature*, **165** (1950), 1020-1021.
- [4] H. C. VAN DE HULST, Interstellar Polarisation and magneto-hydrodynamic waves, *Proc. of the Symposium on the motion of gaseous masses*, Paris, 1949.

- [5] N. S. ANDERSON, Longitudinal magneto-hydrodynamic waves, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **25** (1953), 529–532.
- [6] E. T. KORNHAUSER, Magnetic Damping of Acoustic Waves in Conducting Media, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **25** (1953), 1011–1012.
- [7] R. NARDINI Su particolari campi alternativi della magneto-idrodinamica, *Atti Acc. Sci. Torino*, **89** (1954–55), 17–36.

Istituto Matematico dell'Università
Bologna