Über ein Iterationsverfahren von Komatu zur konformen Abbildung von Ringgebieten

DIETER GAIER

Vorgelegt von C. LOEWNER

Einleitung. Um die konforme Abbildung eines von zwei JORDANKURVEN berandeten Gebiets G_z der z -Ebene auf ein von zwei Kreisen berandetes Gebiet G_w der w -Ebene praktisch herzustellen, hat man im wesentlichen zwei verschiedene Möglichkeiten.

Einmal kann man zunächst versuchen, G_z durch elementare Operationen auf ein Hilfsgebiet abzubilden, dessen beide Randkurven nahezu kreisförmig sind. Die Zuordnung dieser nahezu kreisförmigen Kurven auf die Randkreise von G_w wird dann durch ein Paar von Integralgleichungen bestimmt, deren Lösung durch Iteration gefunden werden kann, ganz in Analogie zum THEODORSEN-Verfahren beim einfach zusammenhängenden Fall, wo lediglich eine Integralgleichung iterativ zu lösen ist. Dieses Verfahren ist z.B. von GARRICK ([7]; vgl. auch [8], S. 137–147) benützt worden.

Eine zweite Abbildungsmethode gründet sich auf ein von KOEBE ([10], [11]) eingeführtes "iterierendes Verfahren" zur konformen Abbildung eines allgemein n -fach zusammenhängenden Gebiets auf ein von n Vollkreisen berandetes Gebiet, wobei das Problem durch Reduktion auf lauter konforme Abbildungen einfach zusammenhängender Gebiete gelöst wird. Dieses Verfahren wird für $n = 2$ besonders instruktiv; es wird dann zu einem *alternierenden Verfahren*, und man geht dabei so vor. Die Ränder von G_z seien $C_1^{(0)}$ und $C_2^{(0)}$ (jeweils nicht punktförmig), und $z = \infty$ liege in G_z . Zuerst werde das gesamte Äußere von $C_1^{(0)}$ mittels einer Funktion von der Form $z + a_1^{(1)}z^{-1} + \dots$ auf das Äußere eines Kreises $C_1^{(1)}$ abgebildet, wobei $C_2^{(0)}$ in $C_2^{(1)}$ übergehe; $C_1^{(1)}$ und $C_2^{(1)}$ beranden $G_z^{(1)}$. Beim zweiten Iterationsschritt bilde man sodann das gesamte Äußere von $C_2^{(1)}$ mittels einer Funktion der Form $z + a_1^{(2)}z^{-1} + \dots$ auf das Äußere eines Kreises $C_2^{(2)}$ ab, wobei $C_1^{(1)}$ in $C_1^{(2)}$ übergehe; $C_1^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$ beranden $G_z^{(2)}$. U.s.w. Die so gewonnenen Funktionen $f_n(z)$, die G_z in $G_z^{(n)}$ überführen, konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gegen die (normierte) Abbildungsfunktion von G_z auf G_w , gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil von G_z . Auch dieses Verfahren hat praktische Anwendung gefunden; man vgl. z.B. LÖSCH ([14]; auch [16], S. 108).

Den Grundgedanken dieses KOEBESchen alternierenden Verfahrens hat nun KOMATU¹ durch Abänderung der Normierungsvorschriften etwas modifiziert, wodurch ein Iterationsverfahren entsteht, das in der Praxis (z.B. für Fragen der Elektrotechnik) von Nutzen sein kann, und das überdies genaue Konvergenzbetrachtungen erlaubt. In dieser Hinsicht hat KOMATU schon einiges bewiesen; wir werden seine Betrachtungen verfeinern und *genaue Aussagen über die Güte der Approximation der Abbildungsfunktion durch die Näherungsfunktionen* gewinnen (Satz 9 in § 7). Wenn auch in der Praxis die aufgestellten Näherungsfunktionen wieder nur angenähert ermittelt werden können, so werden durch unsere Untersuchungen doch einige Anhaltspunkte für die Konvergenz im praktischen Falle gegeben.

Zum Beweis unserer Sätze werden (in §5) einige Ergebnisse über die konforme Abbildung von nahezu kreisringförmigen Ringgebieten abgeleitet, die auch unabhängig von der speziellen Fragestellung der Arbeit von Interesse sein dürften.

1. Darstellung des Verfahrens von Komatu; einfache Aussagen. Wir gehen aus von einem Ringgebiet G_{z_0} der z_0 -Ebene, das außen von $|z_0| = 1$ und innen von einer den Nullpunkt umlaufenden JORDANKurve C_0 berandet ist; jedes zweifach zusammenhängende Gebiet mit zwei nicht punktförmigen Randkontinuen kann auf diese Form gebracht werden. Unsere Aufgabe ist es, G_{z_0} eindeutig und konform auf einen Kreisring $G_w : M < |w| < 1$ abzubilden, daß sich die Randpunkte $z_0 = 1$ und $w = 1$ dabei entsprechen. (Es ist also M^{-1} der Modul von G_{z_0} .)

KOMATU schlägt dazu ein Iterationsverfahren vor, bei dem der erste Iterationsschritt wie folgt in zwei Teilschritten durchgeführt wird. Zunächst werde das gesamte Äußere von C_0 vermöge $t_0 = h_0(z_0)$ auf $|t_0| > 1$ einer t_0 -Hilfsebene konform abgebildet, wobei $h_0(\infty) = \infty$ und $\Re(h_0(1)) > 0$ sein soll; dies legt h_0 eindeutig fest. Die Kurve C_0 geht dabei in $|t_0| = 1$ und $|z_0| = 1$ in eine Kurve Γ_0 über, die in $|t_0| > 1$ liegt und den Nullpunkt umläuft. Sodann werde beim zweiten Teilschritt das gesamte Innere von Γ_0 vermöge $z_1 = g_0(t_0)$ auf $|z_1| < 1$ einer z_1 -Ebene konform abgebildet, wobei $g_0(0) = 0$ und $g_0(h_0(1)) = 1$ sein soll; dies legt g_0 eindeutig fest. Die Kurve Γ_0 geht dabei in $|z_1| = 1$ und $|t_0| = 1$ in eine Kurve C_1 über, die in $|z_1| < 1$ liegt und den Nullpunkt umläuft, sodaß das von C_1 und $|z_1| = 1$ berandete Gebiet G_{z_1} wieder von derselben Art wie G_{z_0} ist.

Allgemein wird beim $n + 1^{\text{ten}}$ Iterationsschritt zunächst das gesamte Äußere von C_n vermöge $t_n = h_n(z_n)$ auf $|t_n| > 1$ konform abgebildet, mit $h_n(\infty) = \infty$ und $\Re(h_n(1)) > 0$, wobei C_n in $|t_n| = 1$ und $|z_n| = 1$ in eine Kurve Γ_n übergeht, die in $|t_n| > 1$ liegt und den Nullpunkt umläuft. Sodann werde das gesamte Innere von Γ_n vermöge $z_{n+1} = g_n(t_n)$ auf $|z_{n+1}| < 1$ konform abgebildet, mit

¹ Vgl. [13]; bei ALBRECHT [1] wird das Verfahren in eine Klasse von Schmiegunungsverfahren eingeordnet.

$g_n(0) = 0$ und $g_n(h_n(1)) = 1$, wobei Γ_n in $|z_{n+1}| = 1$ und $|t_n| = 1$ in eine Kurve C_{n+1} übergeht, die in $|z_{n+1}| < 1$ liegt und den Nullpunkt umläuft, sodaß das von C_{n+1} und $|z_{n+1}| = 1$ berandete Gebiet G_{n+1} wieder von derselben Art wie G_{z_0} ist.

Wir setzen für $n = 0, 1, 2, \dots$ ²

$$\Phi_n(z_n) = g_n(h_n(z_n)) \quad \text{und} \quad f_n(z_0) = \Phi_{n-1}(\dots \Phi_1(\Phi_0(z_0)) \dots) \quad (z_0 \in G_{z_0}),$$

so daß also $f_n(z_0)$ das Gebiet G_{z_0} in G_{z_n} überführt. Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, die Approximation der Funktion $f_\infty(z_0)$, die G_{z_0} konform auf G_w abbildet ($f_\infty(1) = 1$), durch unsere Näherungsfunktionen $f_p(z_0)$ festzustellen, beziehungsweise die Güte dieser Approximation zu beurteilen.

Wir bemerken, daß Γ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) und C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) analytische JORDANKURVEN sind, die sämtlich bezüglich $t_n = 0$ bzw. $z_n = 0$ sternig sind (d.h. jede Verbindungsgerade eines Kurvenpunkts mit dem Nullpunkt trifft keinen weiteren Kurvenpunkt). Daß Γ_n und C_n analytische JORDANKURVEN sind, ist klar; die Aussage über die Sternigkeit dieser Kurven folgt unmittelbar durch Anwendung eines Satzes von CHEPELEV und LAVRENTIEFF ([5], S. 322; vgl. auch den einfacheren Beweis bei GRUNSKY [9]).³

Folgende Bezeichnungen seien eingeführt:

$$m_n = \min_{z_n \in C_n} |z_n|, \quad d_n = \min_{t_n \in \Gamma_n} |t_n|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$M_n = \max_{z_n \in C_n} |z_n|, \quad D_n = \max_{t_n \in \Gamma_n} |t_n|.$$

Im Anschluß an KOMATU verwenden wir das SCHWARZSche Lemma in folgenden Formen.

Schwarzsches Lemma. (a) Die Funktion $f(z)$ sei in $|z| < R$ regulär; es sei ferner $|f(z)| \leq M < \infty$ in $|z| < R$ und $f(0) = 0$. Dann ist $|f(z)| \leq MR^{-1}|z|$ ($0 < |z| < R$), und das Gleichheitszeichen steht hierin für ein z aus $0 < |z| < R$ nur dann, wenn $f(z) = \epsilon MR^{-1}z$ ist ($|\epsilon| = 1$).

(b) Die Funktion $f(z)$ sei in $|z| > R$ regulär; es sei ferner $|f(z)| \geq M > 0$ in $|z| > R$ und $f(\infty) = \infty$. Dann ist $|f(z)| \geq MR^{-1}|z|$ ($R < |z| < \infty$), und das Gleichheitszeichen steht hierin für ein z aus $R < |z| < \infty$ nur dann, wenn $f(z) = \epsilon MR^{-1}z$ ist ($|\epsilon| = 1$).

Beim Übergang von der z_n -Ebene zur t_n -Ebene können wir nun das SCHWARZSche Lemma auf zweierlei Weise anwenden:

(α) auf die Funktion

$$t_n = h_n(z_n) \quad \text{für} \quad |z_n| > M_n : \quad |h_n(z_n)| \geq \frac{1}{M_n} |z_n| \quad (M_n < |z_n| < \infty),$$

² Man setze $f_0(z_0) \equiv z_0$.

³ Bezüglich der Konvexität der Kurven C_n vgl. §6.

(β) auf die Funktion

$$z_n = h_n^{-1}(t_n) \quad \text{für} \quad |t_n| > 1: \quad |h_n^{-1}(t_n)| \geq \frac{m_n}{1} |t_n| \quad (1 < |t_n| < \infty).$$

Entsprechend erhält man beim Übergang von der t_n -Ebene auf die z_{n+1} -Ebene durch Anwendung des SCHWARZschen Lemmas

(γ) auf die Funktion

$$z_{n+1} = g_n(t_n) \quad \text{für} \quad |t_n| < d_n: \quad |g_n(t_n)| \leq \frac{1}{d_n} |t_n| \quad (0 < |t_n| < d_n),$$

(δ) auf die Funktion

$$t_n = g_n^{-1}(z_{n+1}) \quad \text{für} \quad |z_{n+1}| < 1: \quad |g_n^{-1}(z_{n+1})| \leq \frac{D_n}{1} |z_{n+1}| \quad (0 < |z_{n+1}| < 1).$$

Setzt man in (α) einen Punkt z_n auf $|z_n| = 1$ ein, für den $|h_n(z_n)| = d_n$ ist, so erhält man $d_n \geq M_n^{-1}$; setzt man in (β) einen Punkt t_n auf $|t_n| = D_n$ ein, für den $|h_n^{-1}(t_n)| = 1$ ist, so erhält man $1 \geq m_n D_n$. Entsprechend folgt aus (γ) $M_{n+1} \leq d_n^{-1}$ und aus (δ) $1 \leq D_n m_{n+1}$. Diese vier Beziehungen lassen sich zusammenfassen:

$$(1.1) \quad M_n \geq \frac{1}{d_n} \geq M_{n+1}, \quad m_n \leq \frac{1}{D_n} \leq m_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

sie finden sich auch bei KOMATU und bedeuten insbesondere die Monotonieaussagen

$$(1.2) \quad m_n \nearrow, \quad M_n \searrow, \quad d_n \nearrow, \quad D_n \searrow.$$

Hieran anschließend beweist nun KOMATU mit Hilfe der allgemeinen Theorie der konformen Abbildung veränderlicher Gebiete, daß gilt:

$$M_n \rightarrow M \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f_\infty(z_0),$$

letzteres gilt gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil von G_{z_0} . Dies schließt aber noch nicht aus, daß $\lim_n m_n < M$ sein könnte; die Kurven C_n könnten etwa immer spitzere Keile auf $|z_n| = m_n$ mit $\lim_n m_n < M$ vorschicken, und dies würde die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z_0)\}$ für z_0 in ganz G_{z_0} unmöglich machen. In §2 werden wir aber sehen, daß $M_n - m_n \rightarrow 0$ strebt für $n \rightarrow \infty$, und daraus folgt dann in §3 die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_n(z_0)\}$ für z_0 in G_{z_0} .

2. Ein Schwankungssatz. Zunächst beweisen wir den folgenden

Satz 1. Es sei $w = f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und schlicht, und $f(0) = 0$. Ferner sei $\sup_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \leq 1$, $\inf_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \geq 1 - \epsilon$ [d.h. die Randpunkte des Bildgebiets von $|z| < 1$ unter der Abbildung $w = f(z)$ liegen im Kreisring $1 - \epsilon \leq |w| \leq 1$]. Dann ist

$$(2.1) \quad \max_{|z|=r} |f(z)| - \min_{|z|=r} |f(z)| \leq K(r, \epsilon) \cdot \epsilon r \quad (0 < r < 1),$$

wobei $K(r, \epsilon)$ für festes r und ϵ des Quadrats Q : $0 < r < 1$, $0 < \epsilon < 1$ eine von f unabhängige Konstante < 1 ist.

Dieser Satz schätzt also die radiale Schwankung einer Niveaulinie durch die radiale Schwankung des Randes des Bildgebiets von $|z| < 1$ ab.

Beweis. Wir wählen feste r, ϵ aus Q und bezeichnen mit F_ϵ die Klasse aller Funktionen f , die den Voraussetzungen von Satz 1 genügen. Diese Klasse F_ϵ ist kompakt in dem Sinne, daß es zu jeder Folge von Funktionen $f_m \in F_\epsilon$ eine Teilfolge $\{f_{m_k}\}$ und eine Funktion $f_0 \in F_\epsilon$ gibt derart, daß $f_{m_k}(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq \rho < 1$; $k \rightarrow \infty$) gilt. Denn erstens ist $|f(z)| \leq 1$ ($|z| < 1$) für jedes $f \in F_\epsilon$, d.h. F_ϵ ist eine normale Funktionenfamilie, also besitzt $\{f_m\}$ eine in $|z| \leq \rho < 1$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{m_k}\}$. Zweitens ist die Grenzfunktion f_0 von $\{f_{m_k}\}$ ein Mitglied von F_ϵ . Das ist sofort ersichtlich, wenn man beachtet, daß wegen $\inf_{|z|=1} |f_{m_k}(z)| \geq 1 - \epsilon$ stets $|f'_{m_k}(0)| \geq 1 - \epsilon$, also $f'_0(0) \neq 0$ ist. Demnach ist $f_0(z)$ sicher keine Konstante, also nach bekannten Sätzen schlicht in $|z| < 1$.

Nun setzen wir für jedes $f \in F_\epsilon$

$$\sigma_f = \max_{|z|=r} |f(z)| - \min_{|z|=r} |f(z)|$$

und bilden dann

$$\sigma(r, \epsilon) = \sup_{f \in F_\epsilon} \sigma_f.$$

Wählt man $f_m \in F_\epsilon$ so, daß $\sigma_{f_m} \rightarrow \sigma(r, \epsilon)$ strebt für $m \rightarrow \infty$, so sieht man sofort, daß es wegen der Kompaktheit von F_ϵ eine Funktion $f_{r,\epsilon} \in F_\epsilon$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\sigma(r, \epsilon) = \sigma_{f_{r,\epsilon}}$ ist.

Es ist somit $\max_{|z|=r} |f(z)| - \min_{|z|=r} |f(z)| \leq \sigma_{f_{r,\epsilon}}$ für alle $f \in F_\epsilon$, mit dem Gleichheitszeichen für $f = f_{r,\epsilon}$, und es bleibt noch übrig, $\sigma_{f_{r,\epsilon}}$ abzuschätzen. Nun ist aber infolge des SCHWARZschen Lemmas $\max_{|z|=r} |f_{r,\epsilon}(z)| \leq r$, $\min_{|z|=r} |f_{r,\epsilon}(z)| \geq (1 - \epsilon)r$, also $\sigma_{f_{r,\epsilon}} \leq \epsilon r$. Hierin steht sogar das $<$ -Zeichen, falls $f_{r,\epsilon}(z)$ von $C \cdot z$ verschieden ist. Ist aber $f_{r,\epsilon}(z) = C \cdot z$, so ist $\sigma_{f_{r,\epsilon}} = 0$; in beiden Fällen hat man also $\sigma_{f_{r,\epsilon}} < \epsilon r$, und Satz 1 ist damit bewiesen.

Die Konstante $K(r, \epsilon)$ wird für unsere folgenden Konvergenzbetrachtungen von Bedeutung sein, da die Geschwindigkeit der Konvergenz unseres Iterationsverfahrens von der Größe von $K(r, \epsilon)$ abhängt. Über ihr Verhalten als Funktion von r und ϵ ist zu sagen, daß sowohl $K(r, \epsilon) \leq K < 1$ (alle r, ϵ aus Q) als auch $K(r, \epsilon) \leq K(\epsilon) < 1$ (r, ϵ aus Q , ϵ fest) unmöglich ist. Denn für $r \rightarrow 1$ wäre sonst die rechte Seite von (2.1) durch $K \cdot \epsilon < \epsilon$ bzw. $K(\epsilon) \cdot \epsilon < \epsilon$ abschätzbar, während doch die linke Seite gegen ϵ streben kann. Wir werden aber weiter unten sehen, daß $K(r, \epsilon) \leq K(r) < 1$ ausgesagt werden kann, für festes r in $0 < r < 1$ und alle ϵ in $0 < \epsilon < 1$.

Vorläufig genügt es uns, festzustellen:

Zusatz. Die bestmögliche Konstante $K(r, \epsilon)$ in (2.1) ist in jedem abgeschlossenen Teil T von Q unterhalb einer Konstanten $K(T) < 1$.

Man kann sogar unschwer zeigen, daß das bestmögliche $K(r, \epsilon)$ eine in Q stetige Funktion von r und ϵ ist.

Beweis des Zusatzes. Es genügt zu zeigen: Ist $(r_0, \epsilon_0) \in Q$ und $(r_n, \epsilon_n) \rightarrow (r_0, \epsilon_0)$, so ist

$$\overline{\lim}_{r_n \rightarrow r_0, \epsilon_n \rightarrow \epsilon_0} K(r_n, \epsilon_n) \leq K(r_0, \epsilon_0)$$

für die bestmögliche Konstante $K(r, \epsilon)$, die nach den obigen Ausführungen $= \sigma_{f_{r, \epsilon}}(\epsilon r)^{-1}$ ist. Also zeigen wir

$$\overline{\lim}_{r_n \rightarrow r_0, \epsilon_n \rightarrow \epsilon_0} \sigma(r_n, \epsilon_n) = \overline{\lim}_{r_n \rightarrow r_0, \epsilon_n \rightarrow \epsilon_0} \sigma_{f_{r_n, \epsilon_n}} \leq \sigma(r_0, \epsilon_0).$$

Nun ist ähnlich wie oben leicht zu sehen, daß die Klasse der Funktionen f_{r_n, ϵ_n} ($n = 1, 2, \dots$) eine normale Funktionenfamilie bildet, wobei jede Grenzfunktion f_0 zur Klasse F_{ϵ_0} gehört. Für jede solche Funktion f_0 ist aber $\max_{|z|=r_0} |f_0(z)| - \min_{|z|=r_0} |f_0(z)| \leq \sigma(r_0, \epsilon_0)$, woraus die Behauptung folgt.

Mit Hilfe von Satz 1 und seines Zusatzes beweisen wir nun

Satz 2. *Es gilt $M_n - m_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und also $D_n - d_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).*

Beweis. Wir schätzen $M_{n+1} - m_{n+1}$ durch $M_n - m_n$ rekursiv ab, und betrachten zunächst den Übergang von z_n nach t_n . Vermöge der Ungleichung (β) von §1 ist das Bild von $|z_n| = M_n$ bei der Abbildung $t_n = h_n(z_n)$ im Kreisring $1 \leq |t_n| \leq M_n m_n^{-1}$ gelegen. Für die Hilfsfunktion

$$\psi_1(z) = \frac{1}{h_n\left(\frac{M_n}{z}\right)} \quad (|z| < 1)$$

sind daher die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt mit $\epsilon = 1 - m_n M_n^{-1}$. Eine Anwendung von (2.1) auf $\psi_1(z)$ für $|z| = r = M_n$ liefert daher

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \max_{|z|=M_n} |\psi_1(z)| - \min_{|z|=M_n} |\psi_1(z)| &= \frac{1}{d_n} - \frac{1}{D_n} \\ &\leq K\left(M_n, 1 - \frac{m_n}{M_n}\right) \cdot \left(1 - \frac{m_n}{M_n}\right) M_n. \end{aligned}$$

Beim Übergang von t_n nach z_{n+1} ergibt die Ungleichung (δ) von §1, daß das Bild des Kreises $|t_n| = d_n$ bei der Abbildung $z_{n+1} = g_n(t_n)$ im Kreisring $d_n D_n^{-1} \leq |z_{n+1}| \leq 1$ liegt. Satz 1 liefert dann, angewandt auf

$$\psi_2(z) = g_n(d_n z) \quad (|z| < 1)$$

für $|z| = r = d_n^{-1}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \max_{|z|=1/d_n} |\psi_2(z)| - \min_{|z|=1/d_n} |\psi_2(z)| &= M_{n+1} - m_{n+1} \\ &\leq K\left(\frac{1}{d_n}, 1 - \frac{d_n}{D_n}\right) \cdot \left(1 - \frac{d_n}{D_n}\right) \frac{1}{d_n}; \end{aligned}$$

aus (2.2) und (2.3) folgt die rekursive Abschätzung der radialen Schwankung von C_n :

$$(2.4) \quad M_{n+1} - m_{n+1} \leq K\left(\frac{1}{d_n}, 1 - \frac{d_n}{D_n}\right) \cdot K\left(M_n, 1 - \frac{m_n}{M_n}\right) \cdot (M_n - m_n) \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Wäre nun für alle n etwa $M_n - m_n \geq \alpha > 0$, also wegen (1.1) auch $D_n - d_n \geq \beta > 0$, so wäre nach dem Zusatz zu Satz 1 der Koeffizient von $(M_n - m_n)$ in (2.4) unterhalb einer Schranke $\gamma < 1$, d.h.

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq \gamma \cdot (M_n - m_n), \quad \text{also} \quad M_{n+1} - m_{n+1} \leq \gamma^{n+1} \cdot (M_0 - m_0).$$

Dies strebt gegen Null, entgegen der Annahme, also ist $M_n - m_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) sicher richtig. Berücksichtigt man noch $M_n - m_n \geq d_n^{-1} - D_n^{-1}$, so ist damit auch $D_n - d_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) bewiesen.

3. Konvergenz der Funktionen $f_n(z_0)$ in G_{z_0} . Mit Hilfe von Satz 2 beweisen wir nun

Satz 3. Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Funktionen $f_n(z_0)$ gegen $f_\infty(z_0)$, gleichmäßig im ganzen Gebiet G_{z_0} .

Beweis. a. Gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teil von G_{z_0} . Wir wenden auf G_{z_0} und sein Bild G_{z_n} bei der Abbildung $z_n = f_n(z_0)$ das Spiegelungsprinzip an; die an $|z_0| = 1$ bzw. an $|z_n| = 1$ gespiegelten Gebiete seien $\tilde{G}_{z_0}$ bzw. $\tilde{G}_{z_n}$, und $G_{z_0} + \tilde{G}_{z_0}$ wird durch $f_n(z_0)$ konform auf $G_{z_n} + \tilde{G}_{z_n}$ abgebildet. Wegen $M_n \searrow$, $m_n \nearrow$ und Satz 2 gilt nun in Verbindung mit (1.1) für eine gewisse Größe M'

$$\lim_n m_n = \lim_n M_n = M', \quad \lim_n d_n = \lim_n D_n = \frac{1}{M'},$$

und die Gebiete $G_{z_n} + \tilde{G}_{z_n}$ konvergieren⁴ gegen den Kreisring $M' < |w| < (M')^{-1}$. Die Abbildungsfunktionen $f_n(z_0)$ halten $z_0 = 1$ fest, und $f'_n(1) > 0$ folgt aus der Tatsache, daß $|z_0| = 1$ stets in $|z_n| = 1$ übergeht. Also gilt⁵ $\lim_n f_n(z_0) = F(z_0)$, gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil von $G_{z_0} + \tilde{G}_{z_0}$, und $F(z_0)$ vermittelt eine konforme Abbildung von $G_{z_0} + \tilde{G}_{z_0}$ auf $M' < |w| < (M')^{-1}$ mit $F(1) = 1$. Es ist demnach entweder $F(z_0) = f_\infty(z_0)$ oder $F(z_0) = [f_\infty(z_0)]^{-1}$. Da letzteres wegen $F'(1) > 0$ und $f'_\infty(1) > 0$ nicht in Frage kommt, ist somit $F(z_0) = f_\infty(z_0)$ und $M' = M$.

b. Gleichmäßige Konvergenz in ganz G_{z_0} . Diesen zweiten Teil des Beweises von Satz 3 skizzieren wir nur, da ja §7 noch bessere Ergebnisse liefern wird.

⁴ Vgl. z.B. [2], S. 12–15. Eine zusammenfassende Darstellung der konformen Abbildung einfach zusammenhängender veränderlicher Gebiete findet sich in einer Arbeit [6] des Verf.

⁵ Vgl. [2], S. 13; die dort stehende Normierungsvoraussetzung " $f'_n(0) = 1$ " läßt sich in unserem Fall auf " $f''_n(0) > 0$ " abschwächen.

Die Frage ist also die, ob man nach den Feststellungen unter a die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bis auf den Rand von G_{z_0} hinaus ausdehnen kann. Maßgebend dafür ist nun, wie man sich in ähnlicher Weise wie bei JORDANGEBIETEN einfachen Zusammenhangs ([6], dort besonders §7) überlegt, die Eigenschaft der Kurven C_n , ziemlich glatt zu sein in folgendem Sinne: *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\epsilon)$ und ein $\delta_0(\epsilon) > 0$ derart, daß für zwei beliebige Kurvenpunkte $P_1, P_2 \in C_n$ ($n > n_0(\epsilon)$) vom Abstand $< \delta_0(\epsilon)$ der (kleinere) Teilbogen von C_n zwischen P_1 und P_2 von einem Durchmesser $< \epsilon$ ist.* Greift man aber zwei beliebige Punkte $P_1, P_2 \in C_n$ ($n \geq 1$) vom Abstand $< \frac{1}{2}\epsilon$ heraus, so ist wegen der Sternigkeit von C_n das zwischen P_1 und P_2 verlaufende Stück von C_n im Kreisringsektor $m_n \leq |z_n| \leq M_n$, $\arg P_1 \leq \arg z_n \leq \arg P_2$ gelegen, hat also wegen Satz 2 ($M_n - m_n \rightarrow 0$) einen Durchmesser $< \epsilon$, falls nur n hinreichend groß ist. Man sieht also, daß die eben genannte Bedingung für die "Glattheit" von C_n erfüllt ist, und Satz 3 ist bewiesen.

4. Eine Abschätzung von $K(r, \epsilon)$ im Schwankungssatz. In §2 und §3 sahen wir, wie auf Grund allgemeiner Überlegungen und bekannter Sätze die gleichmäßige Konvergenz der $f_n(z_0)$ gegen $f_\infty(z_0)$ ($z_0 \in G_{z_0}$) erschlossen werden kann. Um genauere Angaben über die Güte der Approximation von $f_\infty(z_0)$ durch $f_n(z_0)$ machen zu können, benötigen wir eine Abschätzung von $K(r, \epsilon)$.

Satz 4. Für die bestmögliche Konstante $K(r, \epsilon)$ in (2.1) gilt

$$(4.1) \quad K(r, \epsilon) \leq \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right) \cdot \frac{4}{\pi} \arctg r \quad (r, \epsilon \in \mathbb{Q}).$$

Beweis. Wir verwenden den folgenden

Hilfssatz 1. Es sei $w = f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, ferner $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, und $f(z) \neq 0$ für $z \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{\min_{|z|=r} |f(z)|} \leq \left[\frac{\sup_{|z| \rightarrow 1} |f(z)|}{\inf_{|z| \rightarrow 1} |f(z)|} \right]^{(4/\pi) \arctg r} \quad (0 < r < 1).$$

Der Hilfssatz wurde zuerst von KOEBE ([12], S. 75–76) und später erneut von WALSH ([17], S. 211) bewiesen; das Beweisprinzip ist in beiden Fällen die Methode der Subordinierung, angewandt auf $f(z)/z$.

Eine Anwendung von Hilfssatz 1 auf das in Satz 1 auftretende $f(z)$ liefert nun sofort (die Normierungsbedingung $f'(0) = 1$ in Hilfssatz 1 spielt ersichtlich keine Rolle)

$$\frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{\min_{|z|=r} |f(z)|} \leq \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right)^{(4/\pi) \arctg r},$$

also

$$\max_{|z|=r} |f(z)| - \min_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)| \left[1 - \frac{\min_{|z|=r} |f(z)|}{\max_{|z|=r} |f(z)|} \right] \\ \leq r[1 - (1 - \epsilon)^{(4/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} r}],$$

und die eckige Klammer läßt sich durch $\epsilon(1 - \epsilon)^{-1}(4/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} r$ abschätzen. Um dies zu sehen, betrachte man etwa die Funktion $\chi(x) = \alpha x + (1 - x)^{\alpha+1} + x - 1$ für $x = \epsilon$, $\alpha = (4/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} r$ im Intervall $0 < x < 1$. Es ist dann

$$\chi(0) = \chi'(0) = 0, \quad \text{jedoch} \quad \chi'(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1,$$

also $\chi(x) > 0$ in $0 < x < 1$ und somit

$$\alpha\epsilon > 1 - \epsilon - (1 - \epsilon)^{\alpha+1}, \quad \text{also} \quad 1 - (1 - \epsilon)^\alpha < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \cdot \alpha.$$

Dies beendet den Beweis von Satz 4.

Im Anschluß an den Beweis von Satz 1 hatten wir bemerkt, daß

$$(4.2) \quad K(r, \epsilon) \leq K(r) < 1$$

gilt für jedes feste r in $0 < r < 1$ und alle ϵ in $0 < \epsilon < 1$. Dies ist nun leicht einzusehen. Denn nehmen wir an, für $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_0$ ($0 \leq \epsilon_0 \leq 1$) und ein festes r in $0 < r < 1$ sei $K(r, \epsilon_k) \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$), so kommt wegen Satz 4 und dem Zusatz zu Satz 1 nur $\epsilon_0 = 1$ in Frage. Ist dies der Fall, so können wir für die zu den ϵ_k gehörigen Funktionen $f_{r, \epsilon_k}(z)$ annehmen, daß der Rand des Bildes von $|z| < 1$ unter der Abbildung $w = f_{r, \epsilon_k}(z)$ einen Minimalabstand von $w = 0$ besitzt, der für $k \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Nach den allgemeinen Sätzen aus der Theorie der veränderlichen Gebiete folgt daher $f_{r, \epsilon_k}(z) \Rightarrow 0$ ($|z| = r, k \rightarrow \infty$), sodaß also (mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz 1) $\sigma(r, \epsilon_k) = \max_{|z|=r} |f_{r, \epsilon_k}(z)| - \min_{|z|=r} |f_{r, \epsilon_k}(z)| \rightarrow 0$ strebt für $k \rightarrow \infty$, während doch andererseits nach Annahme $\sigma(r, \epsilon_k) = K(r, \epsilon_k) \cdot \epsilon_k r \rightarrow r$ streben müßte. Dies ergibt einen Widerspruch, (4.2) ist bewiesen.

5. Über die konforme Abbildung von kreisringähnlichen Ringgebieten. In §6 werden wir feststellen, daß die Kurven C_n mit wachsendem n immer weniger von der Kreislinie $|z_n| = M$ abweichen, in einem genau definierten Sinne. Man wird erwarten, daß sich infolgedessen auch die Abbildungsfunktionen $f_n(z_0)$ von $f_\infty(z_0)$ wenig unterscheiden. Um diesen Sachverhalt zu präzisieren, müssen wir noch einige Zwischenbetrachtungen einschalten.

Satz 5. Das Kreisringgebiet $M < |z| < 1$ sei vermöge $w = f(z)$ auf ein Ringgebiet der w -Ebene abgebildet, das außen von $|w| = 1$ und innen von einer den Nullpunkt umlaufenden JORDANKurve C berandet sei; dabei sei $f(1) = 1$.

Die Kurve C besitze überall eine Tangente⁶ und sei kreisähnlich in folgendem Sinne:

- (i) C liegt in $M - \epsilon \leq |w| \leq M + \epsilon$ für ein $\epsilon < M$;
- (ii) C ist bezüglich $w = 0$ sternig, läßt also eine Darstellung in Polarkoordinaten $\rho = \rho(\psi)$ zu ($w = \rho e^{i\psi}$), und es ist $|\kappa(\psi)| \leq N_1 \cdot \epsilon$ für eine Konstante N_1 und alle ψ . Dabei bezeichnet $\kappa(\psi)$ den Winkel zwischen der Kreislinie $|w| = \rho(\psi)$ und der Kurve C im Punkte $(\psi, \rho(\psi))$.

Dann gibt es eine Konstante $N_2 = N_2(N_1)$ derart, daß

$$|f(z) - z| \leq N_2 \cdot \epsilon$$

gilt für alle z in $M \leq |z| \leq 1$. Eine Angabe über den numerischen Wert von N_2 kann aus (5.5) entnommen werden.

Beweis. Wir werden den hier vorliegenden Fall der konformen Abbildung eines Kreisinges auf ein kreisringähnliches Gebiet reduzieren auf den Fall der konformen Abbildung eines Kreises auf ein kreisähnliches Gebiet. Dieser Reduktion liegt die von KOEBE ([11]; vgl. auch [4], S. 65) eingeführte Methode der Überlagerungsflächen zugrunde.

Zunächst werde auf $M < |z| < 1$ und sein Bild das Spiegelungsprinzip angewandt; $w = f(z)$ bildet demnach das Kreisinggebiet $G_z : M < |z| < 1/M$ konform ab auf ein Ringgebiet G_w der w -Ebene, das innen von C und außen vom Spiegelbild C' von C bezüglich $|w| = 1$ berandet wird. Die Kurve C' liegt in $(M + \epsilon)^{-1} \leq |w| \leq (M - \epsilon)^{-1}$ und erfüllt (ii), wenn C diese Bedingung erfüllt.

Nun betrachten wir die Funktionen $z_1 = \frac{1}{4}\pi |\log M|^{-1} \log z$ ($z \in G_z$) und $w_1 = \frac{1}{4}\pi |\log M|^{-1} \log w$ ($w \in G_w$), wobei jeweils $\log 1 = 0$ gelten soll. Sie bilden das ∞ -fach durchlaufene Gebiet G_z (die Überlagerungsfläche von G_z) beziehungsweise das ∞ -fach durchlaufene Gebiet G_w (die Überlagerungsfläche von G_w) konform auf den Streifen $G_{z_1} : |\Re(z_1)| < \frac{1}{4}\pi$ beziehungsweise auf ein dazu ähnliches Gebiet G_{w_1} , so ab, daß zwischen G_{z_1} und G_{w_1} wieder eine (ein-eindeutige) konforme Abbildung $w_1 = f_1(z_1)$ besteht. Wir notieren dabei

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) > 0;$$

letzteres ist eine Folge davon, daß $|z| = 1$ durch $w = f(z)$ in $|w| = 1$ übergeht. Bezüglich der beiden Randkurven C_w und C'_w von G_w läßt sich folgendes sagen. Sie sind periodisch in der $\Im(w_1)$ -Richtung mit der Periode $\frac{1}{2}\pi^2 |\log M|^{-1}$ und verlaufen in den Streifen

⁶ Unsere Voraussetzungen sind hier etwas enger als in einigen entsprechenden Sätzen, die den einfach zusammenhängenden Fall behandeln (z.B. [19], S. 178), da wir unseren Satz ja anwenden werden für den Fall, daß C sogar eine analytische JORDANKurve ist. In einfachen Fällen, wo C nicht unseren Voraussetzungen genügt (z.B. C mit Ecke versehen), läßt sich manchmal C durch Kurven C_n der oben genannten Art beliebig gut approximieren, so daß unser Satz anwendbar bleibt.

$$-\frac{\pi |\log (M - \epsilon)|}{4 |\log M|} \leq \Re(w_1) \leq -\frac{\pi |\log (M + \epsilon)|}{4 |\log M|}$$

bzw.

$$\frac{\pi |\log (M + \epsilon)|}{4 |\log M|} \leq \Re(w_1) \leq \frac{\pi |\log (M - \epsilon)|}{4 |\log M|}.$$

Der Winkel zwischen C_{w_1} oder C'_{w_1} und einer Parallelen zu $\Re(w_1) = 0$ ist $= \kappa(\psi)$, mit dem entsprechenden ψ -Wert, also betragsmäßig $\leq N_1\epsilon$, wie es bei den Ausgangskurven C und C' der Fall war.

Schließlich bilden wir $z_2 = \operatorname{tg} z_1$, $w_2 = \operatorname{tg} w_1$, was G_{z_1} in G_{z_2} und G_{w_1} in G_{w_2} überführe, und die entsprechende Abbildung zwischen G_{z_2} und G_{w_2} heiße $w_2 = f_2(z_2)$; wir notieren wieder

$$f_2(0) = 0, \quad f'_2(0) > 0.$$

Dabei ist es wichtig, daß $G_{z_2} \equiv (|z_2| < 1)$ ist, während G_{w_2} ein kreisähnliches Gebiet ist, und zwar in folgendem Sinne. Es wird berandet durch zwei JORDANbögen C_{w_2} und C'_{w_2} , die bei $w_2 = \pm i$ zusammenstoßen und im Kreisring

$$(5.1) \quad 1 - \epsilon' \leq |w_2| \leq 1 + \epsilon' \quad \text{mit} \quad \epsilon' = k_1(\epsilon) \frac{\pi}{2M |\log M|} \cdot \epsilon$$

verlaufen, wobei hier und im folgenden $k_i(\epsilon)$ stets Funktionen bezeichnen sollen, die gegen 1 streben für $\epsilon \rightarrow 0$. Außerdem ist die JORDANKurve $C_{w_2} + C'_{w_2}$ sternig bezüglich $w_2 = 0$ und besitzt also eine Darstellung in Polarkoordinaten $\rho_2 = \rho_2(\psi_2)$ ($w_2 = \rho_2 e^{i\psi_2}$). Diese Kurve ist weiter mit Ausnahme der Stellen $\pm i$ mit einer Tangente versehen, und für den Winkel $\kappa_2(\psi_2)$ zwischen der Kurve und der Kreislinie $|w_2| = \rho_2(\psi_2)$ im Punkte $(\psi_2, \rho_2(\psi_2))$ gilt

$$(5.2) \quad |\kappa_2(\psi_2)| \leq N_1\epsilon + k_2(\epsilon) \frac{\pi}{2M |\log M|} \cdot \epsilon \quad (0 \leq \psi_2 < 2\pi; \quad \psi_2 \neq \pm \tfrac{1}{2}\pi).$$

Schließlich bleiben an den Stellen $w_2 = \pm i$ die Bögen C_{w_2} und C'_{w_2} in Winkelräumen der Öffnung $\leq k_2(\epsilon)\pi(M |\log M|)^{-1} \cdot \epsilon$ (Winkelhalbierende horizontal). All dies stellt man durch einfache geometrische Überlegungen fest.

Nun benötigen wir eine Beurteilung des Ausdrucks $|\rho_2(\psi_2 + \tau) - \rho_2(\psi_2)|$ für ψ_2 in $0 \leq \psi_2 < 2\pi$ und $|\tau| > 0$. Infolge unserer seitherigen Ergebnisse ist $\rho_2(\psi_2)$ eine Funktion von ψ_2 mit beschränktem Differenzenquotienten, also ist $d\rho_2(\psi_2)/d\psi_2$ für fast alle ψ_2 (in unserem Falle für $\psi_2 \neq \pm \tfrac{1}{2}\pi$) existent, und es gilt im LEBESGUESchen Sinne

$$\begin{aligned} |\rho_2(\psi_2 + \tau) - \rho_2(\psi_2)| &= \left| \int_{\psi_2}^{\psi_2 + \tau} \frac{d}{d\psi_2} \rho_2(\psi_2) d\psi_2 \right| = \left| \int_{\psi_2}^{\psi_2 + \tau} \frac{d\rho_2(\psi_2)}{d\psi_2} \cdot \frac{\rho_2(\psi_2)}{\rho_2(\psi_2)} d\psi_2 \right| \\ &\leq (1 + \epsilon') \int_{\psi_2}^{\psi_2 + \tau} |\operatorname{tg} \kappa_2(\psi_2)| d\psi_2, \end{aligned}$$

also wegen (5.2)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} |\rho_2(\psi_2 + \tau) - \rho_2(\psi_2)| &\leq k_3(\epsilon) \cdot \left(N_1 + \frac{\pi}{2M |\log M|} \right) \cdot \epsilon |\tau| \\ &\leq k_4(\epsilon') \left(\frac{2N_1 M |\log M|}{\pi} + 1 \right) \cdot \epsilon' |\tau|. \end{aligned}$$

Die Kreisähnlichkeit von $C_{w_2} + C'_{w_2}$ im Sinne von (5.1) und (5.3) hat jetzt aber zur Folge, daß $f_2(z_2)$ wenig von z_2 abweicht in $|z_2| \leq 1$; präzise kann gesagt werden ([15], S. 184; [18], S. 566)⁷

$$|f_2(z_2) - z_2| \leq \left[3 + k_4(\epsilon') \left(\frac{2N_1 M |\log M|}{\pi} + 1 \right) (2 \log 2 + 1) \right] \cdot \epsilon' \quad (|z_2| \leq 1),$$

also

$$(5.4) \quad \begin{aligned} |f_2(z_2) - z_2| &\leq k_5(\epsilon) \left[3 + \left(\frac{2N_1 M |\log M|}{\pi} + 1 \right) (2 \log 2 + 1) \right] \\ &\quad \cdot \frac{\pi}{2M |\log M|} \cdot \epsilon \quad (|z_2| \leq 1). \end{aligned}$$

Es bleibt noch übrig, das Ergebnis (5.4) zurückzutransformieren und so eine Abschätzung von $|f(z) - z|$ zu gewinnen. Dazu bezeichne B_{z_1} den Teilbereich von $|z_2| \leq 1$, der durch die Abbildung des Periodenrechtecks $B_{z_1} : |\Re(z_1)| \leq \frac{1}{4}\pi$, $|\Im(z_1)| \leq \frac{1}{4}\pi^2 |\log M|^{-1}$ vermöge $z_2 = \operatorname{tg} z_1$ entsteht. Von den Stellen $z_2 = \pm i$ hat B_{z_1} einen Abstand $d = 1 - \Im(\frac{1}{4}\pi^2 |\log M|^{-1})$, während sein Bild in der w_2 -Ebene von $w_2 = \pm i$ einen Abstand $k_6(\epsilon) \cdot d$ besitzt. Nun verwerten wir (5.4) für $z_2 \in B_{z_1}$:

$$|\operatorname{arc} \operatorname{tg} f_2(z_2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z_2| = \left| \int_{z_2}^{f_2(z_2)} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} \right| \leq \frac{|f_2(z_2) - z_2|}{(k_6(\epsilon) d)^2},$$

d.h.

$$|f_1(z_1) - z_1| \leq \frac{|f_2(z_2) - z_2|}{(k_6(\epsilon) d)^2} \quad (z_1 \in B_{z_1}).$$

Dies liefert schließlich für unsere konforme Abbildung $w = f(z)$

$$\begin{aligned} &\left| \exp \left\{ \frac{4 |\log M|}{\pi} f_1(z_1) \right\} - \exp \left\{ \frac{4 |\log M|}{\pi} z_1 \right\} \right| \\ &= \frac{4 |\log M|}{\pi} \left| \int_{z_1}^{f_1(z_1)} \exp \left\{ \frac{4 |\log M|}{\pi} \zeta \right\} d\zeta \right| \leq \frac{4 |\log M|}{\pi(M - \epsilon)} |f_1(z_1) - z_1|, \end{aligned}$$

insgesamt also

⁷ Man hat dazu das auf $1 \leq \rho_2(\psi_2) \leq 1 + \epsilon'$ zugeschnittene Ergebnis von SPECHT in ersichtlicher Weise auf unseren Fall zu transformieren.

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f(z) - z| \leq k_7(\epsilon) \cdot \frac{2 \left[3 + \left(\frac{2N_1 M |\log M|}{\pi} + 1 \right) (2 \log 2 + 1) \right]}{M^2 \left(1 - \operatorname{Isg} \frac{\pi^2}{4 |\log M|} \right)^2} \cdot \epsilon, \\ \text{wobei } k_7(\epsilon) \rightarrow 1 \text{ strebt für } \epsilon \rightarrow 0, \end{array} \right.$$

gültig für alle z aus $M \leq |z| \leq M^{-1}$, und dies enthält unsere Behauptung.

Abschließend sei skizziert, wie Satz 5 auch die Behandlung des allgemeineren Falles zuläßt, bei dem das Ringgebiet der w -Ebene sowohl innen als auch außen von kreisähnlichen Kurven berandet ist. Es sei also $M < |z| < 1$ vermöge $w = f(z)$ [$f(1) = 1$] auf ein Ringgebiet der w -Ebene abgebildet, das von zwei JORDANKURVEN C_1, C_2 berandet sei; C_1 verlaufe in $M - \epsilon \leq |w| \leq M + \epsilon$, C_2 in $1 - \epsilon \leq |w| \leq 1 + \epsilon$. Beide Kurven seien sternig bezüglich $w = 0$, gestatten also eine Darstellung in Polarkoordinaten $\rho = \rho_i(\psi)$ ($w = \rho e^{i\psi}$), und es gelte für den Winkel $\kappa_i(\psi)$ zwischen C_i und $|w| = \rho_i(\psi)$ im Punkte $(\psi, \rho_i(\psi))$ stets $|\kappa_i(\psi)| \leq N \cdot \epsilon$ ($j = 1, 2$).

Dann gibt es eine Konstante $N_3 = N_3(N)$ derart, daß gilt:

$$|f(z) - z| \leq N_3 \cdot \epsilon \quad \text{in } M \leq |z| \leq 1.$$

Zum Beweis schalten wir eine Zwischenabbildung ein. Wir bilden das Innere von C_2 vermöge $\bar{w} = g(w)$, $w = g^{-1}(\bar{w})$ konform auf $|\bar{w}| < 1$ ab, wobei $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ sei. Dann ist auf Grund des mehrfach verwendeten Ergebnisses im einfach zusammenhängenden Fall

$$(5.6) \quad |g^{-1}(\bar{w}) - \bar{w}| = O(\epsilon)$$

gleichmäßig in $|\bar{w}| \leq 1$ (die im Vergleich zu SPECHT [15] andere Normierung ist berücksichtigt). Bei der Abbildung $\bar{w} = g(w)$ geht C_1 über in eine Kurve $\bar{C}_1$, die wieder in einem Ring der Breite $O(\epsilon)$ um $|\bar{w}| = M$ liegt (wegen (5.6)), und deren Winkel gegen $|\bar{w}| = \text{const.}$ von der Größenordnung ϵ ist. Letzteres gilt, weil $|g'(w) - 1| = O(\epsilon)$ ist ($w \in C_1$) (CAUCHYSche Integralformel und (5.6)). Für die Abbildung von $M < |z| < 1$ auf das von $|\bar{w}| = 1$ und $\bar{C}_1$ berandete Gebiet kann man daher nach Satz 5 behaupten

$$|\bar{w}(z) - z| = O(\epsilon) \quad \text{gleichmäßig in } M \leq |z| \leq 1;$$

insgesamt ist also

$$|f(z) - z| = |g^{-1}(\bar{w}(z)) - z| \leq |g^{-1}(\bar{w}(z)) - \bar{w}(z)| + |\bar{w}(z) - z| = O(\epsilon),$$

gleichmäßig in $M \leq |z| \leq 1$, wie es behauptet war.

6. Die Kreisähnlichkeit der Kurven C_n . Wir wollen jetzt untersuchen, bis zu welchem Grad die Kurven C_n , die neben $|z_n| = 1$ die Gebiete G_{z_n} beranden, mit der Kreislinie $|z_n| = M$ übereinstimmen. Als erstes stellen wir fest:

Satz 6. Setzt man $\mu_n = M_n - m_n$, so ist

$$(6.1) \quad \mu_n \leq P_1 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M \right)^{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

für eine gewisse Konstante P_1 .

Beweis. Wir beginnen mit einer groben Abschätzung von μ_n . Aus (2.4) erhalten wir mit (4.1) und (1.1)

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &\leq \frac{D_n \cdot M_n}{d_n \cdot m_n} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{d_n} \right) \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_n \right) \mu_n \\ &\leq \left[\frac{M_n}{m_n} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_n \right) \right]^2 \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Hierin fällt nach unseren seitherigen Ergebnissen der Ausdruck in der eckigen Klammer monoton gegen $(4/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} M < 1$; es gibt also einen ersten Index $\bar{n}$, für den gilt

$$q = \left[\frac{M_{\bar{n}}}{m_{\bar{n}}} \frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_{\bar{n}} \right]^2 < 1.$$

(Wir möchten bemerken, daß $\bar{n}$ unterhalb einer festen Schranke bleibt, die nur von m_0 und M_0 abhängt. Dies stellt man fest, wenn man (4.2) beachtet.) Damit ist aber

$$(6.2) \quad \mu_{\bar{n}+k} \leq \left[\frac{M_{\bar{n}}}{m_{\bar{n}}} \frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_{\bar{n}} \right]^2 \cdots \left[\frac{M_{\bar{n}+k-1}}{m_{\bar{n}+k-1}} \frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_{\bar{n}+k-1} \right]^2 \mu_{\bar{n}} \leq q^k$$

für $k = 0, 1, 2, \dots$, weil ja $\mu_{\bar{n}} < 1$ ist.

Nun wird μ_n genauer beurteilt. Zunächst ist

$$\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} M_n}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} M} - 1 = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} M_n - \operatorname{arc} \operatorname{tg} M}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} M} \leq \frac{M_n - M}{(1 + M^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} M},$$

wenn man

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} M_n - \operatorname{arc} \operatorname{tg} M = \int_M^{M_n} \frac{dt}{1+t^2}$$

schreibt, also mit (6.2)

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_{\bar{n}+k} &\leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} M \cdot \exp \left\{ \frac{M_{\bar{n}+k} - M}{(1 + M^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} M} \right\} \\ &\leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} M \cdot \exp \left\{ \frac{\mu_{\bar{n}+k}}{(1 + M^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} M} \right\}, \end{aligned}$$

$$(6.3) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} M_{\bar{n}+k} \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} M \cdot e^{\alpha q^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

mit $\alpha = [(1 + M^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} M]^{-1}$. Weiter haben wir

$$\frac{M_{\bar{n}+k}}{m_{\bar{n}+k}} = 1 + \frac{\mu_{\bar{n}+k}}{m_{\bar{n}+k}} \leq e^{\beta q^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

mit $\beta = m_0^{-1}$. Daher gilt insgesamt für $n \geq \bar{n}$

$$\begin{aligned} \mu_n &\leq \left(\frac{M_{n-1}}{m_{n-1}} \dots \frac{M_{\bar{n}}}{m_{\bar{n}}} \right) \left(\frac{4}{\pi} \arctan M_{n-1} \right)^2 \dots \left(\frac{4}{\pi} \arctan M_{\bar{n}} \right)^2 \cdot \mu_{\bar{n}} \\ &\leq e^{2\beta(1+q+q^2+\dots+q^{n-\bar{n}-1})} \cdot e^{2\alpha(1+q+q^2+\dots+q^{n-\bar{n}-1})} \cdot \left(\frac{4}{\pi} \arctan M \right)^{2(n-\bar{n})} \cdot \mu_{\bar{n}}, \\ (6.4) \quad \mu_n &\leq e^{2(\alpha+\beta)/(1-q)} \left(\frac{4}{\pi} \arctan M \right)^{2(n-\bar{n})} \mu_0. \end{aligned}$$

Dies gilt also zunächst für $n \geq \bar{n}$. Für $n < \bar{n}$ ist der Koeffizient von μ_0 in (6.4) stets > 1 , also die Aussage (6.4) richtig, da uns ja $\mu_n \leq \mu_0$ bereits seit (1.1) bekannt ist. Somit gilt (6.4) für $n = 0, 1, 2, \dots$, und (6.1) ist bewiesen.

Aus Satz 6 folgt unmittelbar

Satz 6a. Setzt man $\delta_n = D_n - d_n$, so ist

$$(6.5) \quad \delta_n \leq \frac{\mu_n}{m_0 M} \leq P_2 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \arctan M \right)^{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

für eine gewisse Konstante P_2 .

Zum Beweis braucht man nur (1.1) zu beachten; danach ist

$$\delta_n \leq \frac{1}{m_n} - \frac{1}{M_n} = \frac{\mu_n}{m_n M_n} \leq \frac{\mu_n}{m_0 M} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Die Breite der Kreisringe, in denen die C_n drin liegen, wird also schnell klein. Daß auch die Tangentenrichtung von C_n immer mehr tangential zum Kreis $|z_n| = M$ wird, sagt der folgende Satz 7 aus.

Satz 7. Die Kurve C_n sei in Polarkoordinaten dargestellt: $\rho = \rho_n(\psi)$, wobei $z_n = \rho e^{i\psi}$ gesetzt ist, und $\kappa_n(\psi)$ bezeichne den Winkel zwischen der Kreislinie $|z_n| = \rho_n(\psi)$ und der Kurve C_n im Punkte $(\psi, \rho_n(\psi))$.

Dann ist

$$(6.6) \quad |\kappa_n(\psi)| \leq P_3 \mu_n \leq P_1 P_3 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \arctan M \right)^{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

für eine gewisse Konstante P_3 .

Um Satz 7 beweisen zu können, benötigen wir

Hilfssatz 2. Es sei $w = f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und schlicht, $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$. Ferner sie $\sup_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \leq 1$, $\inf_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \geq 1 - \epsilon$ für $0 < \epsilon < 1$.

Dann ist

$$(6.7) \quad |f(z) - z| \leq \frac{1}{1-r} \cdot \frac{2}{1-\epsilon} \log \frac{1}{1-\epsilon}$$

und

$$|z| = r < 1$$

$$(6.8) \quad |f'(z) - 1| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \cdot \frac{2}{1-\epsilon} \log \frac{1}{1-\epsilon}.$$

Beweis. Für ein ρ mit $r < \rho < 1$ ist infolge der SCHWARZschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(z) - z| &= \left| \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(\rho e^{i\varphi}) - \rho e^{i\varphi}] e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi} - z} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi}) - \rho e^{i\varphi}|^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|\rho - r|^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hierin kann der erste Term durch $-2(1-\epsilon)^{-1} \log(1-\epsilon)$ majorisiert werden, gleichmäßig für alle betrachteten ρ^8 , während der zweite Term $= (\rho - r)^{-1}$ ist. Für $\rho \rightarrow 1$ ergibt sich (6.7), und (6.8) bekommt man auf entsprechende Weise.

Beweis von Satz 7. Wir betrachten (für ein festes n) die Funktion

$$f(z) = g_n(d_n e^{i\tau_n z}) \quad (|z| < 1),$$

wobei τ_n so gewählt sei, daß $f'(0) > 0$ wird. Sie bildet den Kreis $|z| = r = d_n^{-1}$ auf die Kurve C_{n+1} ab, und der Winkel zwischen C_{n+1} und $|f(z)| = \text{const.}$ im Kurvenpunkt $f(z)$ bestimmt sich zu

$$(6.9) \quad [\arg z - \arg f(z)] + \arg f'(z).$$

Außerdem hatten wir schon in §2 festgestellt, daß $\sup_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \leq 1$ und $\inf_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| \geq d_n/D_n$ ist.

Schätzen wir zuerst das erste Glied in (6.9) ab für $|z| = r = d_n^{-1}$, so erhält man

$$|\arg z - \arg f(z)| \leq |\log f(z) - \log z| = \left| \int_z^{f(z)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right|,$$

wobei geradlinig von z nach $f(z)$ integriert wird, und wo $|f(z)| \geq d_n D_n^{-1} |z|$, auf $|z| = d_n^{-1}$ also $|f(z)| \geq D_n^{-1}$ ist. Daher ist in Verbindung mit (6.7)

$$|\arg z - \arg f(z)| \leq D_n |f(z) - z| \leq \frac{D_n}{1 - d_n^{-1}} \cdot \frac{2D_n}{d_n} \log \frac{D_n}{d_n} \leq \frac{2M_0^2}{m_0^2(1 - M_0)} \delta_n.$$

Für das zweite Glied in (6.9), genommen auf $|z| = r = d_n^{-1}$, ergibt sich zusammen mit (6.8)

$$|\arg f'(z)| \leq \frac{4}{(1 - d_n^{-1})^2} \cdot \frac{D_n}{d_n} \log \frac{D_n}{d_n} \leq \frac{4M_0^2}{m_0^2(1 - M_0)^2} \delta_n.$$

Berücksichtigt man Satz 6a, so folgt (6.6).

⁸ Diese Tatsache beweist man durch leichte Modifikation eines Schlusses bei WARSCHAWSKI ([18], S. 563–564).

In §1 ergab sich, daß die Kurven C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) alle sternig bezüglich $z_n = 0$ sind. Von einem Index an sind sie sogar konvex, denn es gilt

Satz 8. *Setzt man*

$$k(R) = \frac{-(1 + 3R^2) + (1 + 22R^2 - 7R^4)^{\frac{1}{2}}}{2R(1 - R^2)}$$

$$(0 < R < 1), \quad k(0) = 0, \quad k(1) = 1,$$

so ist $k = k(R)$ in $0 \leq R \leq 1$ stetig und monoton wachsend. Die Kurve C_n ist sicher dann konvex, wenn $k(M_{n-1}) < m_{n-1}M_{n-1}^{-1}$ ist, und alle Kurven C_n ($n = 1, 2, \dots$) sind konvex, wenn sogar $k(M_0) < m_0M_0^{-1}$ ist.

Da $k(M_{n-1}) \rightarrow k(M) < 1$ und $m_{n-1}M_{n-1}^{-1} \rightarrow 1$ strebt für $n \rightarrow \infty$, so ist in Satz 8 insbesondere die Behauptung enthalten, daß von einem Index an sämtliche Kurven C_n konvex sind.

Beweis. Die Funktion $k = k(R)$ ist die Lösung der algebraischen Gleichung

$$-k^2R^3 + 3kR^2 + (k^2 - 4)R + k = 0,$$

die für Werte von R mit $0 \leq R \leq 1$ Funktionswerte k mit $0 \leq k \leq 1$ liefert, und die Umkehrfunktion $R = R(k)$ ist die genaue Rundungsschranke für die Klasse der in $|z| < 1$ regulären Funktionen $f(z)$ mit $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $|f'(0)| \geq k$ (vgl. [3], S. 658). Aus dieser Erklärung von $R(k)$ folgt, daß $R(k)$ eine in $0 \leq k \leq 1$ monoton wachsende Funktion ist, also ist $k(R)$ eine in $0 \leq R \leq 1$ monoton wachsende Funktion.

Nun betrachten wir die Funktion $\psi_2(z) = g_n(d_n z)$ von §2 in $|z| < 1$, die als Bild von $|z| = d_n^{-1}$ die Kurve C_{n+1} liefert. Wir stellen fest:

$$|\psi_2(z)| < 1 \quad (|z| < 1), \quad \psi_2(0) = 0,$$

$$|\psi_2'(0)| = d_n \cdot |g_n'(0)| \geq d_n D_n^{-1} \quad (\text{wegen } (\delta) \text{ in } \S 1).$$

Unter diesen Voraussetzungen ist aber nach dem oben gesagten das Bild von $|z| = d_n^{-1}$ sicher dann konvex, wenn $d_n^{-1} < R(d_n D_n^{-1})$ ist. Nun ist $d_n^{-1} \leq M_n$, $d_n D_n^{-1} \geq m_n M_n^{-1} \geq m_0 M_0^{-1}$, sodaß wegen der Monotonie von $R(k)$ die Kurve C_{n+1} bestimmt dann konvex ist, wenn $M_n < R(m_n M_n^{-1})$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $k(M_n) < m_n M_n^{-1}$. Diese Ungleichung besteht für alle $n = 0, 1, \dots$, wenn sogar $k(M_0) < m_0 M_0^{-1}$ gilt.

7. Güte der Approximation von $f_\infty(z_0)$ durch $f_n(z_0)$ in G_{z_0} . Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um das *Hauptergebnis* unserer Arbeit formulieren und beweisen zu können.

Satz 9. *Es sei G_{z_0} ein Ringgebiet der z_0 -Ebene, das außen von $|z_0| = 1$ und innen von einer den Nullpunkt umlaufenden JORDANKurve berandet sei, und es bezeichne $f_n(z_0)$ die nach dem Verfahren von KOMATU bestimmten Näherungs-*

funktionen für die Abbildungsfunktion $f_\infty(z_0)$ von G_{z_0} auf das Kreisringgebiet $M < |w| < 1$ ($f_\infty(1) = 1$).

Dann gilt für alle $z_0 \in G_{z_0}$.

$$(7.1) \quad |f_n(z_0) - f_\infty(z_0)| \leq P_4 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M\right)^{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

für eine gewisse Konstante P_4 .

Beweis. Die Aussage (7.1) ist gleichbedeutend mit

$$(7.2) \quad |f_n f_\infty^{-1}(w) - w| \leq P_4 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M\right)^{2n} \quad (w \in G_w; \quad n = 1, 2, 3, \dots);$$

dabei ist $f_n f_\infty^{-1}(w)$ die Funktion, die $G_w : M < |w| < 1$ konform auf G_{z_n} abbildet, wobei $w = 1$ in $z_n = 1$ übergeht. Eine unmittelbare Anwendung von Satz 5 mit $\epsilon = \mu_n$ und $N_1 = P_3$ ist wegen (6.6) möglich und liefert

$$|f_n f_\infty^{-1}(w) - w| \leq N_2(P_3) \cdot \mu_n \quad (w \in G_w; \quad n = 1, 2, 3, \dots),$$

d.h.

$$|f_n f_\infty^{-1}(w) - w| \leq N_2(P_3) \cdot P_1 \cdot \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} M\right)^{2n} \quad (w \in G_w; \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

wegen (6.1). Damit ist der Beweis von Satz 9 abgeschlossen.

LITERATUR

- [1] ALBRECHT, R.: Iterationsverfahren zur konformen Abbildung eines Ringgebietes auf einen konzentrischen Kreisring. *Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss.* 1954, 169–178.
- [2] BIEBERBACH, L.: *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931.
- [3] CACRIDIS-THODORAKOPOULOS, P.: Über die untere Grenze der Rundungsschranken der beschränkten Funktionen $f(z)$, deren $|f'(0)|$ vorgegeben ist. *Math. Ann.* 113, 657–664 (1936).
- [4] CARATHÉODORY, C.: *Funktionentheorie*, Bd. II. Basel 1950.
- [5] CHEPELEV, V. & M. LAVRENTIEFF: Sur quelques propriétés des fonctions univalentes. *Mat. Sbornik* (2) 2, 319–326 (1937).
- [6] GAIER, D.: Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete. *Math. Z.* 64, 385–424 (1956).
- [7] GARRICK, I. E.: *Potential flow about arbitrary biplane wing sections*. NACA Techn. Report Nr. 542 (1936).
- [8] GARRICK, I. E.: *Conformal mapping in aerodynamics, with emphasis on the method of successive conjugates. Construction and applications of conformal maps*; Proceedings of a symposium. Washington 1952.
- [9] GRUNSKY, H.: Zur Theorie der beschränkten Funktionen. *Deutsche Math.* 3, 679–683 (1938).
- [10] KOEBE, P.: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. *Göttinger Nachr.* 1910, 180–189.
- [11] KOEBE, P.: Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. *Jber. Dtsch. Math.-Verein.* 19, 339–348 (1910).
- [12] KOEBE, P.: Über das SCHWARZsche Lemma und einige damit zusammenhängende Un-

- gleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie. *Math. Z.* **6**, 52–84 (1920).
- [13] KOMATU, Y.: Ein alternierendes Approximationsverfahren für konforme Abbildung von einem Ringgebiete auf einen Kreisring. *Proc. Japan Acad.* **21**, 146–155 (1945).
- [14] LÖSCH, F.: Auftrieb und Moment eines unsymmetrischen Doppelflügels. *Luftf.-Forsch.* **17**, 22–31 (1940).
- [15] SPECHT, E. J.: Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **71**, 183–196 (1951).
- [16] ULLRICH, E.: *Praxis der konformen Abbildung*. Fiat Review of German Science, Applied Mathematics, Part I. Wiesbaden 1948.
- [17] WALSH, J. L.: On the shape of level curves of GREEN's function. *Amer. Math. Monthly* **44**, 202–213 (1936).
- [18] WARSCHAWSKI, S. E.: On conformal mapping of nearly circular regions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, 562–574 (1950).
- [19] WARSCHAWSKI, S. E.: *On conformal mapping of variable regions. Construction and applications of conformal maps*; Proceedings of a symposium. Washington 1952.

Mathematisches Institut A
der Technischen Hochschule
Stuttgart