Séries Ultrasphériques et Intégrale de Poisson

P. BROUSSE

Mémoire transmis par A. LICHNEROWICZ

Nous nous sommes proposé l'étude de certaines propriétés des séries ultrasphériques en rattachant ces séries à une intégrale [6c] qui serait pour elles ce qu'est l'intégrale de Poisson harmonique pour les séries trigonométriques. Nous donnons dans le présent travail quelques uns des résultats obtenus.

Nous avons d'abord construit cette intégrale que nous appelons encore intégrale de Poisson et qui, dans de nombreux cas, coïncide avec la solution d'un problème de Dirichlet *singulier* relatif à une équation aux dérivées partielles (E_w) et à un *demi-cercle*. Nous ne supposons pas la fonction frontière $g(\theta)$ continue; en général elle n'est pas bornée aux extrémités de l'intervalle considéré $(0, \pi)$ et nous étudions cette circonstance en détails. L'intégrale de Poisson est liée de façon simple à la série ultrasphérique $S[g]$ engendrée par la fonction $g(\theta)$. Nous obtenons ainsi, non seulement la généralisation aux séries ultrasphériques de certaines propriétés des séries trigonométriques, mais encore des propriétés particulières provenant de la forme de $g(\theta)$ pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$. La sommabilité de Poisson et la dérivation tangentielle ont été particulièrement envisagées. Les résultats obtenus permettent de préciser l'influence de la ligne singulière sur certaines intégrales de (E_w) .

La convergence et la sommabilité (C) des séries ultrasphériques ont été étudiées en particulier par G. DARBOUX [11a], E. KOGBETLIANTZ [25a, b, c], G. SZEGÖ [35].

1. CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE DE POISSON GENERALISEE

Nous partons des équations

$$(E_v) \quad \Delta V(x, y) + \frac{1-h}{y} V_v(x, y) = 0$$

$$(E_w) \quad \Delta W(x, y) + \frac{1+h}{y} W_s(x, y) = 0$$

$$(E_\phi) \quad \Delta \phi(x, y) + \frac{\lambda}{y^2} \phi(x, y) = 0$$

(Δ , laplacien; h , const. > 0 ; $\lambda = \frac{1}{4}(1 - h^2)$), la deuxième et la troisième se déduisant de la première par les changements

$$(1.1) \quad V(x, y) = y^h W(x, y)$$

$$(1.2) \quad V(x, y) = y^{\frac{1}{2}(h-1)} \phi(x, y).$$

Nous allons étudier certaines intégrales de ces équations dans le *demi-cercle* unité D

$$x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0.$$

La frontière D^* de ce demi-cercle comprend un segment ouvert AB de Ox , une demi-circonférence ouverte Γ et les points $A(+1, 0)$, $B(-1, 0)$.

Nous désignerons dans toute la suite par

$$V(M) \text{ ou } V(x, y), \quad W(M) \text{ ou } W(x, y), \quad \phi(M) \text{ ou } \phi(x, y)$$

toute intégrale des équations (E_v) , (E_w) , (E_ϕ) , régulière dans le demi-cercle D , en ne faisant aucune hypothèse sur la forme de cette fonction au voisinage de D^* .

D'une façon plus générale, nous aurons à considérer des domaines de forme quelconque situés dans le *demi-plan* E , $y > 0$, et adjacents à Ox .

Lorsqu'on veut appliquer la formule de Green à de tels domaines, à une solution fondamentale de l'une des équations précédentes et à une solution quelconque, on est obligé de faire, a priori, des hypothèses sur le comportement de cette solution dans le voisinage de la ligne singulière Ox [16; 6a]. Pour éviter de telles restrictions nous partirons d'intégrales connues.

Le point $M(x, y > 0)$ étant fixe, considérons les deux fonctions suivantes du point $P(\xi, \eta > 0)$

$$(1.3) \quad \eta^{\frac{1}{2}(h+1)} Q_{\frac{1}{2}(h-1)} \{\gamma(P, M)\}$$

où $Q_{\frac{1}{2}(h-1)}$ est la fonction de Legendre de seconde espèce et où on a posé

$$\gamma(P, M) = \frac{(\xi - x)^2 + \eta^2 + y^2}{2\eta y}.$$

La première est intégrale de (E_ϕ) . Quant à la deuxième, elle est liée à la fonction de M. A. WEINSTEIN [39a]

$$\mathfrak{I}(P, M) = \int_0^\pi \frac{(\sin \psi)^h d\psi}{[(\xi - x)^2 + \eta^2 + y^2 - 2\eta y \cos \psi]^{\frac{1}{2}(h+1)}}$$

par la relation

$$(1.4) \quad Q_{\frac{1}{2}(h-1)}\{\gamma(P, M)\} = (\eta y)^{\frac{1}{2}(h+1)} \mathfrak{I}(P, M).$$

Elle est donc solution fondamentale de (E_ϕ) avec M pour pôle et -1 pour singularité [39a]. Remarquons en outre qu'on peut étudier facilement l'allure de cette fonction dans le voisinage de la ligne singulière $\eta = 0$, soit sur la fonction de Legendre elle-même [26], soit à partir de la double inégalité évidente

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq (\xi - x)^2 + \eta^2 + y^2 - 2\eta y \cos \psi \leq (\xi - x)^2 + (\eta + y)^2.$$

Le point M étant supposé intérieur au demi-cercle D , appliquons maintenant la formule de Green aux deux fonctions (1.3), le domaine d'intégration étant la partie commune à $(D - M)$ et au demi-plan $\eta > \eta_0$, ($0 < \eta_0 < y$), puis faisons tendre η_0 vers zéro. De la relation obtenue retranchons celle que l'on forme d'une manière analogue en remplaçant M par son inverse par rapport à D . Nous obtenons alors l'identité suivante dans laquelle le point P , $\widehat{xOP} = \theta = s$, décrit Γ et où d/dn est la dérivée normale intérieure relative à ce point

$$(1.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\eta}{y}\right)^{\frac{1}{2}(h+1)} \frac{dQ_{\frac{1}{2}(h-1)}\{\gamma(P, M)\}}{dn} ds = 1.$$

Nous allons donner une autre forme à cette identité en considérant la sphère Σ ayant Γ pour demi-grand cercle. Prenons Ox pour axe des pôles et Γ pour méridien origine; puis posons $\widehat{xOM} = \omega$, $OM = \rho$. Soit N un point du parallèle de P dont nous appellerons ψ la longitude et δ la distance au plan xOy . Alors, compte tenu de (1.4), l'identité (1.5) prend la forme

$$(1.5') \quad \frac{h+1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(1-\rho^2)\delta^h}{(MN)^{h+3}} d\sigma = 1$$

où N est le point courant sur Σ .

Soit alors une fonction de P que nous désignerons par $g(P)$ ou par $g(\theta)$, telle que les intégrales

$$(1.6) \quad w(M) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} g(P) \left(\frac{\eta}{y}\right)^{\frac{1}{2}(h+1)} \frac{dQ_{\frac{1}{2}(h-1)}\{\gamma(P, M)\}}{dn} ds$$

$$(1.7) \quad w(M) = \frac{h+1}{4\pi} \iint_{\Sigma} g(P) \frac{(1-\rho^2)\delta^h}{(MN)^{h+3}} d\sigma$$

aient un sens. La dernière forme généralise l'intégrale de Poisson harmonique. Aussi, dirons nous que $w(M)$ donnée indifféremment par (1.6) ou par (1.7) est l'intégrale de Poisson généralisée ou plus simplement l'intégrale de Poisson.

Dans la suite, nous supposons que la fonction $g(\theta)$ a un nombre fini de points de discontinuité de façon que

$$(1.8) \quad \text{le produit } (\sin \theta)^{h+1} g(\theta) \text{ soit absolument intégrable sur } (0, \pi).$$

Alors l'intégrale $w(M)$ est une fonction $W(M)$. La relation (1.1) lui fait correspondre une fonction $V(M)$.

2. L'INTEGRALE DE POISSON AU VOISINAGE DE LA FRONTIERE

Cherchons ce que devient l'intégrale de Poisson (1.7) lorsque le point M tend vers un point M_0 de D^* .

a. Le noyau de Poisson est un "noyau positif" [42b]. On en déduit que lorsque M_0 est un point de Γ où la fonction $g(\theta)$ est continue, l'intégrale de Poisson tend vers $g(\theta_0)$. Si en ce point $g(\theta)$ est discontinue tout en étant bornée, l'intégrale de Poisson reste également bornée. De même, si en A ou B , $g(\theta)$ a une limite (ou reste bornée) la fonction $w(M)$ a la même limite (ou reste bornée).

b. La fonction $w(M)$ est définie, régulière, et même analytique dans le cercle unité entier de centre O , et cette remarque conduit à d'importantes conséquences (3.b). Retenons seulement ici que lorsque M tend vers le point $M_0(x_0, 0)$ de AB , la fonction $w(M)$ tend vers

$$w(M_0) = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(h+3)]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}h+1)} \int_0^\pi g(\theta) \frac{(1-x_0^2)(\sin \theta)^{h+1}}{(M_0P)^{h+3}} d\theta.$$

En particulier, la valeur au centre est

$$w(O) = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(h+3)]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}h+1)} \int_0^\pi g(\theta)(\sin \theta)^{h+1} d\theta.$$

Et nous retrouvons le théorème de la moyenne de A. WEINSTEIN [39a] qui se trouve ainsi démontré avec des hypothèses plus larges que celles utilisées par l'Auteur.

c. Il nous reste le cas où M_0 est en A (ou en B). Nous posons

$$\begin{aligned} AM &= \rho_A & \widehat{BAM} &= \alpha \\ BM &= \rho_B & \widehat{ABM} &= \beta \end{aligned}$$

De l'inégalité $MN \geq 1 - \rho$ on déduit alors que le produit $(\rho_A)^{h+2} |w(M)|$ est inférieur au produit de $[\rho_A/(1-\rho)]^{h+2}$ par une constante. D'où le résultat: *lorsque le point M tend vers A en restant à l'intérieur d'un angle BAz aigu, le produit $\rho_A^{h+2} w(M)$ reste borné.*

d. Lorsqu'on se donne la forme de $g(\theta)$ au voisinage de 0 on peut obtenir une conclusion moins restrictive. Supposons par exemple

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{qu'il existe une constante } c, 0 \leq c < h + 2, \text{ telle que les produits } \theta^c g(\theta), \\ (\pi - \theta)^c g(\theta), \text{ restent bornés pour } \theta = 0, \theta = \pi \text{ respectivement.} \end{array} \right.$$

Effectuons alors l'inversion de pôle B et de puissance 2. Désignons par $P'(\xi' = 0, \eta' > 0)$, $M'(x' > 0, y' > 0)$, N' , Σ' respectivement les inverses de P, M, N, Σ et par δ' la distance du point N' au plan xOy . En posant $g(N') = g(N)$ l'intégrale (1.7) devient

$$(2.2) \quad \frac{h+1}{2\pi} \iint_{\Sigma'} g(N') \left(\frac{BM'}{BN'} \right)^{h+1} \frac{x' \delta'^h}{(M'N')^{h+3}} d\sigma'.$$

Prenons M' à l'intérieur d'un petit cercle de centre O et de rayon ϵ_0 constant. La valeur absolue de l'intégrale (2.2) est alors inférieure au produit de la constante $(1 + \epsilon_0)^{h+1}$ et de l'expression

$$(2.3) \quad \frac{h+1}{2\pi} \iint_{\Sigma'} |g(N')| \frac{x' \delta'^h}{(M'N')^{h+3}} d\sigma'.$$

Nous continuerons de façon à traiter à la fois le cas général où le produit $\theta^c g(\theta)$ reste borné et le cas particulier où ce produit tend vers zéro. Dans ce but, nous décomposerons l'intégrale (2.3) en deux autres étendues respectivement à un cercle (O') de centre O et de rayon R où l'on a

$$\eta'^c |g(N')| < K \quad (K, \text{ const.})$$

et à $\Sigma' - (O')$. La dernière tend vers zéro lorsque M' tend vers O . En utilisant les coordonnées polaires ($OM' = \rho'$, $\widehat{x'OM'} = \omega'$) de M' et en posant $\eta' = \rho'^t$, on trouve que la première est inférieure au produit de K par

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(M') &= \frac{h+1}{2\pi} \iint_{\Sigma'} \eta'^{-c} \frac{x' \delta'^h}{(M'N')^{h+3}} d\sigma' \\ &= \frac{h+1}{\pi} \rho'^{-c} \int_0^\pi d\psi \int_0^\infty \frac{\cos \omega' (\sin \psi)^h dt}{t^{c-h-1} (t^2 - 2t \cos \psi \sin \omega' + 1)^{\frac{1}{2}(h+3)}}. \end{aligned}$$

Le produit $\rho'^c \mathfrak{W}(M')$ est indépendant de ρ' . Or $\mathfrak{W}(M')$ est l'intégrale de Poisson pour le quart de plan $x' > 0, y' > 0$ et pour la fonction frontière $(\eta')^{-c}$. Elle est bornée lorsque ρ' (non nul) reste constant.

De ce raisonnement on déduit facilement les deux conclusions suivantes:

—Lorsque le point M tend vers A , (resp. B), le produit

$$(2.4) \quad (\rho_A)^c w(M) \quad (\text{resp. } (\rho_B)^c w(M))$$

reste borné.

—Dans le cas plus particulier où le produit $\theta^c g(\theta)$, (*resp.* $(\pi - \theta)^c g(\theta)$) s'annule en A , (*resp.* B), il en est de même de (2.4).

3. PROBLEMES DE DIRICHLET ASSOCIES

Sous certaines conditions, les fonctions $w(M)$ et $v(M) = y^h w(M)$ sont les solutions dans le demi-cercle D de deux problèmes de Dirichlet dont nous différons un peu l'énoncé. Afin de pouvoir donner une réponse définitive à la fin de ce paragraphe nous commencerons par démontrer les trois théorèmes d'unicité suivants.

(3.1). Toute fonction $V(M)$ nulle sur D^* sauf en un point M_0 de Γ où s'annule seulement le quotient $V(M)/\text{Log } M_0 M$ est identiquement nulle.

(3.2). Toute fonction $V(M)$ nulle sur D^* sauf en A où s'annule seulement le produit $(\rho_A)^{m'} V(M)$, ($0 \leq m' = \text{const.} < 2$), est identiquement nulle.

(3.3). Toute fonction $W(M)$ nulle sur Γ , telle que le produit $y^h W(M)$ s'annule sur $(AB + B)$ et que le produit $(\rho_A)^m W(M)$, ($0 \leq m = \text{const.} < h + 2$), s'annule en A est identiquement nulle.

Pour démontrer les deux premières propriétés nous utiliserons la méthode de S. ZAREMBA [41]. On sait déjà que toutes les fonctions $V(M)$ sont monotones dans D [10]. Il nous suffit alors de trouver deux fonctions $V(M)$, soit $V(M, M_0)$, $V(M, A)$, positives dans D , continues sur $(D + D^*)$ sauf en M_0 , A respectivement où l'expression

$$\frac{V(M, M_0)}{\text{Log } \frac{1}{M_0 M}} \quad \text{resp. } (\rho_A)^{m'} V(M, A)$$

reste supérieure à un nombre *positif* fixe.

Dans le premier cas nous prendrons pour $V(M, M_0)$ une solution fondamentale avec -1 pour singularité et M_0 pour pôle. L'énoncé et la démonstration restent valables quelle que soit la forme de la frontière. Pour le demi-cercle on peut d'ailleurs obtenir un résultat plus général; celui que nous avons donné ici nous suffira largement.

Passons maintenant au théorème (3.2). Lorsque, utilisant des coordonnées polaires dont le pôle est sur Ox , on cherche des intégrales de (E_v) par séparation des variables, on est conduit à une équation hypergéométrique. Compte tenu des coefficients de cette équation, nous montrons ainsi que

$$V_1(M) = (\rho_A)^{-m'} (\sin \alpha)^h F(1 - m', h + m'; 1 + \tfrac{1}{2}h; \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha).$$

$$V_2(M) = (\rho_A)^{-m'} \cos \alpha F(1 - \tfrac{1}{2}(h + m'), \tfrac{1}{2}(1 + m'); \tfrac{3}{2}; \cos^2 \alpha)$$

sont des fonctions $V(M)$. Comme on a

$$(3.4) \quad F(1 - m', h + m', 1 + \tfrac{1}{2}h; \tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \tfrac{1}{2}h)}{\Gamma(1 - \tfrac{1}{2}m') \Gamma[\tfrac{1}{2}(1 + h + m')]}$$

la fonction $V_1(M)$ est positive pour $0 < \alpha \leq \tfrac{1}{2}\pi$. Le signe de $V_2(M)$ s'étudie par les méthodes habituelles [24]; ce signe est $+$ pour $0 \leq \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$. Nous pouvons alors prendre pour fonction $V(M, A)$ la somme $V_1(M) + V_2(M)$.

Les deux premiers théorèmes d'unicité sont ainsi démontrés.

Le théorème (3.3) se déduit de (3.2) par le changement (1.1). Pour que $W(M)$ soit identiquement nulle il suffit même que cette fonction s'annule sur Γ , que $y^h W(M)$ s'annule sur $(AB + B)$ et que $(\rho_A)^m W(M)$ ($\sin \alpha$)^h s'annule en A .

Les théorèmes (3.2), (3.3) restent vrais si les produits $(\rho_A)^{m'} V(M)$, $(\rho_A)^m W(M)$ au lieu de s'annuler en A *restent seulement bornés en ce point*. Il suffit pour le voir de considérer un exposant m'_1 , m_1 de ρ_A tel que $m' < m'_1 < 2$, $m < m_1 < h + 2$.

Supposons maintenant

$$(3.5) \quad \begin{cases} \text{—que les points de discontinuité de } g(\theta) \text{ soient de première espèce} \\ \text{—que l'hypothèse (2.1) soit vérifiée.} \end{cases}$$

De même, désignons par $f(P)$ ou $f(\theta)$ une fonction

$$(3.6) \quad \begin{cases} \text{—continue dans } (0, \pi) \text{ sauf en un nombre fini de discontinuités} \\ \text{de première espèce} \\ \text{—telle qu'il existe une constante } c', 0 \leq c' < 2, \text{ pour laquelle les} \\ \text{produits } \theta^{c'} f(\theta), (\pi - \theta)^{c'} f(\theta) \text{ restent bornés pour } \theta = 0, \\ \theta = \pi \text{ respectivement.} \end{cases}$$

Alors, la fonction

$$(3.7) \quad \begin{aligned} v(M) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(P) \left(\frac{y}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}(h-1)} \frac{dQ_{\frac{1}{2}(h-1)}\{\gamma(P, M)\}}{dn} ds \\ &= y^h \frac{h+1}{4\pi} \iint_{\Sigma} f(P) \frac{(1-\rho^2)(\sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}h}}{(MN)^{h+3}} d\sigma \end{aligned}$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet P_v suivant: trouver une fonction $V(M)$ prenant sur Γ la valeur $f(\theta)$ en tout point de continuité de cette fonction, bornée dans le voisinage de Γ , s'annulant sur AB et dont les produits par $(\rho_A)^{m'}$, $(\rho_B)^{m'}$, ($c' \leq m' = \text{const.} < 2$), restent bornés en A , B respectivement.

De même l'intégrale de Poisson $w(M)$ est l'unique solution du problème de Dirichlet P_w suivant: $g(\theta)$ étant la fonction définie en (3.5), trouver une fonction $W(M)$ prenant sur Γ la valeur $g(\theta)$ en tout point de continuité de cette fonction, bornée dans le voisinage de Γ , dont les produits par $(\rho_A)^m$, $(\rho_B)^m$, ($c \leq m = \text{const.}$

$< h + 2$) restent bornés en A, B respectivement. Cette solution est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur Γ .

Citons deux conséquences de la forme des solutions des problèmes P_v, P_w .

a. La solution $v(M)$ du problème P_v s'annule sur AB . Mais la forme (3.7) de cette solution donne une précision supplémentaire: lorsque le point M tend vers $M_0(x_0, 0)$ de AB , le quotient $v(M)/y^h$ tend vers une limite finie, uniformément sur tout segment intérieur à AB . On a ainsi un résultat se rattachant à une étude générale de M. BOULIGAND [4b, c, d] et de J. CAPOULADE [9] et qui généralise à la fois une propriété des fonctions harmoniques [5] et une propriété des solutions des équations différentielles du type de Fuchs.

b. La fonction $w(M)$, définie d'abord dans le seul demi-cercle D peut être prolongée dans le demi-cercle symétrique de D par rapport à Ox (2b), les valeurs en deux points symétriques étant égales. Ce résultat que nous avons déjà obtenu [6c] peut être généralisé à des domaines plus généraux que le demi-cercle; il est à rapprocher de celui annoncé par A. HUBER [19].

4. FORME DES SOLUTIONS DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DE DISCONTINUITÉ DES FONCTIONS FRONTIÈRE

Cherchons alors la forme des solutions $v(M), w(M)$ dans le voisinage d'un point de discontinuité des fonctions frontière satisfaisant aux conditions (3.6), (3.5). On peut toujours se ramener au cas où ce point de discontinuité est unique.

a. Supposons d'abord qu'en un point M_0 de Γ la fonction ait une discontinuité de première espèce, $f(\theta_0+) \neq f(\theta_0-)$. On peut trouver une fonction $V(M)$ continue sur $(D + D^*)$ sauf en M_0 où elle est bornée et dont la valeur frontière a en M_0 la même discontinuité que $f(\theta)$. En effet, soit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(M, M_0)$ la solution fondamentale de l'équation

$$\Delta U + \frac{h-1}{y} U_\nu = 0$$

le pôle étant $M_0(x_0, y_0)$, la singularité étant $-y_0^{1-h}$, et soit $\mathfrak{V}(M, M_0)$ la solution du système

$$\begin{cases} \mathfrak{V}_\nu = y^{h-1} \mathfrak{U}_x \\ \mathfrak{V}_x = -y^{h-1} \mathfrak{U}_\nu \end{cases}$$

D'après un raisonnement que A. WEINSTEIN a fait pour $h > 1$, [39a], mais qui reste valable pour $h > 0$, la fonction $[f(\theta_0-) - f(\theta_0+)\mathfrak{V}]/\pi$ possède les propriétés énoncées au début de ce paragraphe (4a). Formant la différence entre $v(M)$ et cette fonction et appliquant (3a) et (2) on voit que l'intégrale $v(M)$ (et par suite l'intégrale de Poisson $w(M)$) est la somme d'une fonction ayant en M_0 une limite bien déterminée et d'une fonction linéaire de l'angle polaire de $\overline{M_0M}$.

b. Supposons maintenant M_0 en A et prenons d'abord le cas où $f(\theta)$ a, en ce point, une limite $f(0)$. Si $f(0) = 0$, la fonction $v(M) = y^h w(M)$ s'annule en $A(2)$.

Lorsque $f(0) \neq 0$, on connaît une fonction $V(M)$, nulle sur AB , continue sur $(D + D^*)$ sauf en A où elle est bornée, et dont la valeur frontière a, en ce point, la même singularité que $f(\theta)$. C'est [6b]

$$(4.1) \quad v_0(M) = \frac{f(0)A_{h-1}(\alpha)}{A_{h-1}(\frac{1}{2}\pi)}$$

avec

$$(4.2) \quad A_{h-1}(\alpha) = \int_0^\alpha (\sin u)^{h-1} du.$$

Comme dans le paragraphe précédent, le théorème d'unicité conduit à la proposition suivante: *l'intégrale $v(M)$ est la somme de $v_0(M)$ et d'une fonction $V(M)$ s'annulant en A .*

c. Plus généralement, supposons que, lorsque θ tend vers zéro, le produit $\theta^c g(\theta)$ tende vers une limite γ_0 . La fonction

$$w_0(M) = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(1+c)]\Gamma(1+\frac{1}{2}(h-c))}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\frac{1}{2}h)} \gamma_0(\rho_A)^{-c} F(c, 1+h-c; 1+\frac{1}{2}h; \sin^2 \frac{1}{2}\alpha)$$

est une fonction $W(M)$. D'après une égalité analogue à (3.4), le produit par θ^c de sa valeur frontière sur Γ , $w_0^*(P)$ tend vers γ_0 en A . Donc l'expression $\theta^c[g(\theta) - w_0^*(P)]$ tend vers zéro. Il existe une seule solution de P_W avec cette valeur frontière et cette solution est donnée par l'intégrale de Poisson. *La fonction $w(M)$ est la somme de $w_0(M)$ et d'une fonction dont le produit par $(\rho_A)^c$ s'annule en A .*

Lorsqu'on a $c = h$, la fonction hypergéométrique de $w_0(M)$ prend la forme $F(\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}h, \sin^2 \alpha)$ dont le produit par $(\sin \alpha)^h$ est $hA_{h-1}(\alpha)$. On retrouve donc le résultat du paragraphe précédent et même la propriété plus précise

$$v(M) - v_0(M) = O(\sin \alpha)^h.$$

5. DEVELOPPEMENT DE L'INTEGRALE DE POISSON EN SERIE ULTRASPHERIQUE

Nous allons maintenant montrer le parti que l'on peut tirer des considérations précédentes dans l'étude des séries ultrasphériques. Nous commencerons par développer l'intégrale de Poisson en une telle série dans le cas général de l'hypothèse (1.8).

Nous partons du développement

$$(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)^{-\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n C_n^\mu(\cos t)$$

où C_n^μ est le polynôme de Gegenbauer [15] ou polynôme ultrasphérique d'ordre $\mu = \frac{1}{2}(h+1)$. Cette série est absolument et uniformément convergente ($0 \leq \rho < \rho_0$ fixe < 1 ; $0 \leq t \leq \pi$) ainsi que le montre l'inégalité [35, p. 166]

$$|C_n^\mu(\cos t)| \leq \frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\mu)} = O(n^{2\mu-1}).$$

Grâce à une dérivation par rapport à ρ , on en déduit le développement suivant, absolument et uniformément convergent dans les mêmes conditions que le précédent

$$\frac{1-\rho^2}{(MN)^{h+3}} = \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^{\frac{1}{2}(h+3)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\mu}{\mu} \rho^n C_n^\mu(\cos t)$$

avec

$$\cos t = \cos \omega \cos \theta + \sin \omega \sin \theta \cos \psi.$$

On a ainsi le développement du noyau de Poisson intervenant dans l'expression (1.7) de $w(M)$.

Mais on peut également obtenir le développement du noyau de l'intégrale (1.6) en utilisant l'identité

$$\int_0^\pi (\sin \psi)^{2\mu-1} C_n^\mu(\cos t) d\psi = \frac{2^{2\mu-1} [\Gamma(\mu)]^2 \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\mu)} C_n^\mu(\cos \theta) C_n^\mu(\cos \omega)$$

déduite de la formule d'addition des polynômes ultrasphériques. Ce développement est

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & \frac{1}{\pi} \left(\frac{\eta}{y} \right)^{\frac{1}{2}(h+1)} \frac{dQ_{\frac{1}{2}(h-1)}\{\gamma(P, M)\}}{dn} \\ &= \frac{2^{2\mu-1} [\Gamma(\mu)]^2}{\pi} (\sin \theta)^{2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\mu)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\mu)} \rho^n C_n^\mu(\cos \theta) C_n^\mu(\cos \omega). \end{aligned}$$

Son quotient par $(\sin \theta)^{2\mu}$ est absolument et uniformément convergent pour

$$0 \leq (\theta, \omega) \leq \pi, \quad 0 < \rho \leq \rho_0 \text{ fixe } < 1.$$

L'intégrale de Poisson peut alors s'écrire sous la forme

$$(5.2) \quad w(M) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n C_n^\mu(\cos \omega)$$

avec

$$(5.3) \quad a_n = \frac{2^{2\mu-1} [\Gamma(\mu)]^2}{\pi} \frac{(n+\mu)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\mu)} \int_0^\pi g(\tau) (\sin \tau)^{2\mu} C_n^\mu(\cos \tau) d\tau.$$

Le coefficient a_n est la composante d'ordre n de la fonction $g(\theta)$ dans le système ultrasphérique, la série engendrée par cette fonction étant

$$(5.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\mu}(\cos \theta).$$

Nous avons ainsi obtenu en (5.2) le développement de l'intégrale de Poisson en série ultrasphérique. De même, celui de la fonction $v(M)$ donnée en (3.7) est

$$(5.5) \quad (\rho \sin \omega)^h \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n C_n^{\mu}(\cos \omega).$$

Nous remarquerons que si on fait $\rho = 1$ dans la série du deuxième membre de (5.1) on trouve à un facteur près la *série de E. KOGBETLIANTZ* [25c], série divergente mais sommable ($C, \delta > 0$) et représentant zéro pour $0 < (\omega, \theta) < \pi$ et $\theta \neq \omega$.

6. SOMMABILITE DE POISSON DES SERIES ULTRASPHERIQUES

Nous désignerons par $S[g]$ la série (5.4) engendrée par la fonction $g(\theta)$, (1.8). La *série de Poisson associée à cette fonction est la série (5.2); nous continuerons à la désigner par $w(M)$.*

La série $S[g]$ n'est évidemment pas toujours convergente. Lorsque la fonction $g(\theta)$ satisfait aux conditions de Dirichlet à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$ et lorsqu'elle devient infinie aux extrémités tout en étant d'ordre (relativement à θ ou à $\pi - \theta$) inférieur à $\frac{1}{2}(h + 3)$, G. DARBOUX a montré [11a] que la série $S[g]$ est convergente et qu'elle a pour somme $g(\theta_0)$ en tout point $P_0(\theta_0)$ de continuité de cette fonction; mais si $g(\theta)$ est infinie pour $\theta = 0$ ou pour $\theta = \pi$ avec un ordre supérieur à $\frac{1}{2}(h + 3)$, la série est partout divergente. Notons que l'étude de cette convergence entre dans le cadre d'une théorie plus générale [36]. La sommabilité (C) de $S[g]$ a été étudiée avec beaucoup de détails par E. KOGBETLIANTZ [25]; en particulier E. KOGBETLIANTZ a démontré que $S[g]$ est sommable (C, μ) en tout point θ_0 intérieur à $(0, \pi)$ où existe la valeur moyenne $\frac{1}{2}[g(\theta_0 -) + g(\theta_0 +)]$ la somme de la série étant alors cette valeur moyenne.

L'étude de l'intégrale de Poisson et du problème P_w nous permet d'atteindre *directement* la sommabilité de Poisson de la série $S[g]$. La méthode est la même que pour les séries trigonométriques, le noyau

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\eta}{y} \right)^{\frac{1}{2}(h+1)} \frac{dQ_{\frac{1}{2}(h-1)}\{\gamma(P, M)\}}{dn}$$

de l'intégrale de Poisson généralisée (1.6) jouant vis à vis des séries ultrasphériques le même rôle que le noyau de Poisson harmonique

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\omega - \theta) + \rho^2}$$

vis à vis des séries trigonométriques. L'identité entre l'intégrale de Poisson et la solution de P_w n'a été démontrée qu'avec les hypothèses (3.5). Mais nous pouvons généraliser certaines des propriétés résultant de cette identité en remarquant que la forme de l'intégrale de Poisson dans le voisinage d'un point de $(\Gamma + A + B)$ ne dépend que des valeurs de la fonction $g(\theta)$ au voisinage de ce point. Sauf indication contraire, nous ferons sur $g(\theta)$ les hypothèses générales du début.

Nous avons d'abord la propriété suivante résultant de (2.a): en tout point θ_0 de continuité de $g(\theta)$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$, la série $S[g]$ est sommable par le procédé de Poisson et elle a $g(\theta_0)$ pour somme (Notons que ce premier résultat pouvait être obtenu directement puisque chaque terme de (5.2) est intégrale de (E_w) et que cette série est uniformément convergente). Plus généralement la série (5.2) tend vers $g(\theta_0)$ lorsque le point M tend vers $P_0(\theta_0)$ de façon quelconque.

Si $g(\theta)$ a en $P_0(0 < \theta_0 < \pi)$ une discontinuité de première espèce et si M tend vers P_0 le long d'une ligne ayant en ce point une demi tangente faisant avec le rayon $\overrightarrow{P_0O}$ l'angle φ , $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$, la série (5.2) tend vers

$$\frac{1}{2}[g(\theta_0-) + g(\theta_0+)] + \frac{\varphi}{\pi}[g(\theta_0-) - g(\theta_0+)].$$

Supposons maintenant que le point M tende vers A . Si M reste à l'intérieur d'un angle aigu BAz , le produit $(\rho_A)^{h+2}w(M)$ reste borné, (4.c). Lorsque $\theta^c g(\theta)$ est borné en A , le produit $(\rho_A)^c w(M)$ reste borné quelle que soit la façon dont le point M tende vers A . Dans le cas particulier où $\theta^c g(\theta)$ à une limite γ_0 pour $\theta = 0$, l'expression $(\rho_A)^c [w(M) - w_0(M)]$ tend vers zéro, (4.c). Enfin si $\theta^h g(\theta)$ a une limite $f(0)$ pour $\theta = 0$ et si M tend vers A suivant une ligne ayant en A une demi-tangente AT telle que $\widehat{OAT} = \varphi$, la série (5.5) tend vers $f(0)A_{h-1}(\varphi)/A_{h-1}(\frac{1}{2}\pi)$.

7. EXEMPLES DE DEVELOPPEMENT EN SERIES ULTRASPHERIQUES

Nous donnons maintenant quelques propriétés déduites de l'examen de certains cas particuliers.

A. Lorsque la fonction $g(\theta)$ a une limite g_0 pour $\theta = \pi$, la série $S[g]$ est sommable par le procédé de Poisson avec la somme g_0 pour $\theta = \pi$. Cette propriété s'applique au cas particulier

$$g(\theta) = (\sin \frac{1}{2}\theta)^{-2a} \quad (0 < 2a = \text{const.} < h + 2).$$

La série engendrée par cette fonction $g(\theta)$

$$(7.1) \quad \frac{2^{2\mu}\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + \frac{1}{2} - a)}{\sqrt{\pi}\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \mu) \frac{\Gamma(n + a)}{\Gamma(n + 2\mu + 1 - a)} C_n^{\mu}(\cos \omega)$$

a été envisagée par E. KOGBETLIANTZ [25b, p. 184]; elle généralise la série de

Stieltjes-Neumann [34]. Nous démontrons ainsi directement que la série (7.1) est sommable par le procédé de Poisson pour $\omega = \pi$, sa somme étant l'unité. Plus généralement, la série de Poisson associée à (7.1) tend vers 1 lorsque le point $M(\rho, \omega)$ tend vers B .

B. Prenons maintenant

$$f(\theta) = (\sin \theta)^{2t-1} \quad (t = \text{const.} > -\tfrac{1}{2})$$

et cherchons les valeurs correspondantes de $v(M)$ et de $w(M)$. Nous retrouverons en particulier certains des résultats que G. DARBOUX avait obtenus par une autre méthode [11a].

Il nous suffit de connaître les coefficients a_n . Lorsque n est impair on a visiblement $a_n = 0$. Pour calculer a_{2m} (m , entier ≥ 0) nous utiliserons la formule de récurrence suivante [38, p. 407]

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin \gamma)^{2t} C_{2m}^\mu(\cos \gamma) d\gamma \\ = \frac{(\mu - t + m - 1)(\mu + m - 1)}{m(t + m)} \int_0^\pi (\sin \gamma)^{2t} C_{2m-2}^\mu(\cos \gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

D'où, en posant $t - \mu = b$,

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + \tfrac{1}{2} + b)\Gamma(m + \tfrac{1}{2}) \cdot (2m + \mu)[b(b-1) \cdots (b-m+1)]}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1+\mu+b)\Gamma(m+\mu+\tfrac{1}{2})}.$$

Cas particuliers. a. Lorsqu'on a

$$-(\mu + \tfrac{1}{2}) < b < 0$$

nous posons $b_1 = -b$ et nous obtenons

$$a_{2m} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + \tfrac{1}{2} - b_1)\Gamma(m + \tfrac{1}{2})\Gamma(m + b_1) \cdot (2m + \mu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(b_1)\Gamma(m+1+\mu-b_1)\Gamma(m+\mu+\tfrac{1}{2})}$$

b. Nous dirons que la solution de P_V égale à 1 sur Γ est la fonction V unité. Pour l'obtenir nous prenons $t = \tfrac{1}{2}$ ou $b_1 = \tfrac{1}{2}h$. Cette fonction unité est alors

$$(7.2) \quad \frac{4\Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu - \tfrac{1}{2})} (\rho \sin \omega)^{2\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m + \mu}{(2m + 2\mu - 1)(2m + 1)} \rho^{2m} C_{2m}^\mu(\cos \omega).$$

Dans le cas particulier où l'on a $h = 1$, le polynôme ultrasphérique devient le polynôme de seconde espèce de Tchebichef

$$\frac{\sin(2m+1)\omega}{\sin \omega}$$

et l'on retrouve le développement trigonométrique de la fonction unité harmonique $2/(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM})\pi$.

Faisant tendre M vers A suivant un chemin rectiligne formant avec BA l'angle géométrique aigu α , et utilisant l'expression (7.2) et la propriété notée à la fin du paragraphe 6, on obtient

$$\lim_{l \rightarrow 0} (l \sin \alpha)^{2\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m + \mu}{(2m + 2\mu - 1)(2m + 1)} (1 - 2l \cos \alpha + l^2)^m \cdot C_{2m}^{\mu} \left(\frac{1 - l \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2l \cos \alpha + l^2}} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} (\sin u)^{2\mu-2} du.$$

8. CONDITION POUR QU'UNE FONCTION $w(M)$ SOIT CONSTANTE

Du développement (5.2) on peut déduire une condition pour que la fonction $w(M)$ soit constante et égale à K dans le domaine D tout entier. En retranchant cette constante on est d'ailleurs ramené à chercher une condition pour que $w(M)$ soit identiquement nulle.

La série (5.2) est uniformément convergente dans tout demi-cercle fermé concentrique au demi-cercle D et plus petit que celui-ci. Donc, en tout point M_0 du segment ouvert AB , la fonction $w(M)$ prend la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n C_n^{\mu}(1) \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n C_n^{\mu}(-1)$$

suivant que l'abscisse $\overline{OM_0}$ de M_0 est positive ou négative, soit dans les deux cas

$$(8.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\mu}(1) (\overline{OM_0})^n$$

Cette expression est une série entière de la variable $\overline{OM_0}$ dont l'intervalle de convergence est l'unité.

Supposons que l'ensemble des points de AB où $w(M)$ s'annule contienne une infinité de points sur un segment complètement intérieur au segment AB . Alors cet ensemble a un point limite intérieur à AB . Par suite la série (8.1) a tous ses coefficients nuls et comme

$$C_n^{\mu}(1) = \frac{\Gamma(n + 2\mu)}{\Gamma(2\mu)\Gamma(n + 1)}$$

n'est jamais nul, on a $a_n = 0$ quel que soit n .

La fonction $w(M)$ est alors identiquement nulle.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant. Dans un demi-cercle D' du demi-plan $y > 0$, limité par un segment $A'B'$ de Ox , on considère une fonction $W(M)$ telle que le produit $y^{\mu} W(M)$ s'annule en tout point du segment ouvert $A'B'$. Pour que cette fonction $W(M)$ soit égale à la constante K en tout point de D' il faut et il suffit qu'elle prenne la valeur K en une infinité de points situés sur un segment complètement intérieur à $A'B'$. Pour le démontrer, on fait le raisonnement

précédent sur un demi-cercle D concentrique à D' et un peu plus petit que D' (la valeur de $W(M)$ sur la demi-circonférence fermée limitant D est alors continue).

Un cas particulier est celui où la fonction $W(M)$ est égale à K sur un petit segment du diamètre $A'B'$, si petit soit ce segment.

On étend le théorème précédent à des domaines beaucoup plus généraux que le domaine hémicirculaire, grâce à un prolongement analytique à travers la demi-circonférence frontière d'un demi-cercle dont le diamètre porte un segment intérieur sur lequel $W(M)$ prend une infinité de fois de valeur K .

9. THEOREMES DE FATOU

Nous avons déjà noté le lien qui existe entre l'intégrale $w(M)$ et la série $S[g]$. De cette correspondance on déduit pour les séries ultrasphériques des propriétés analogues à celles que possèdent les séries trigonométriques. Nous en donnons pour exemple la généralisation à ces séries des théorèmes de P. FATOU [13].

Pour $0 < \rho < 1$ on a

$$(9.1) \quad \frac{\partial w}{\partial \omega} = -2\mu \sin \omega \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n C_{n-1}^{\mu+1}(\cos \omega)$$

Supposons que la fonction $g(\theta)$ ait pour $\theta = \theta_0 \neq 0, \pi$, une dérivée $g'(\theta_0)$. Nous allons montrer que lorsque le point $M(\rho, \omega)$ tend vers $P_0(1, \theta_0)$, en restant entre deux cordes de D issues de P_0 et non nulles, l'expression (9.1) tend vers $g'(\theta_0)$.

Posons d'abord

$$(9.2) \quad g(\theta) - g_1(\theta) = g(\theta_0) - \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\sin \theta_0} g'(\theta_0).$$

Le deuxième membre est la valeur prise sur Γ par la fonction

$$g(\theta_0) - \frac{\rho \cos \omega - \cos \theta_0}{\sin \theta_0} g'(\theta_0)$$

qui est la solution d'un problème P_w . Soit $w_1(M)$ l'intégrale de Poisson construite avec $g_1(\theta)$. Pour $0 < \rho < 1$, on a

$$(9.3) \quad \frac{\partial w}{\partial \omega} - \frac{\partial w_1}{\partial \omega} = \rho \frac{\sin \omega}{\sin \theta_0} g'(\theta_0)$$

$$(9.4) \quad \frac{\partial w_1}{\partial \omega} = -(h+3) \iint_z g_1(\theta) \frac{\rho(\sin \omega \cos \theta - \cos \omega \sin \theta \cos \psi)}{r^3} K(N, M) d\sigma$$

avec

$$r = MN, \quad K(N, M) = \frac{h+1}{4\pi} \frac{(1-\rho^2)\delta^\lambda}{r^{\lambda+3}}$$

Lorsque M tend vers P_0 , le deuxième membre de (9.3) tend vers $g'(\theta_0)$. Il reste à prouver que (9.4) tend vers zéro.

Remarquons d'abord que si N' est la projection de N sur le plan issu de OM et perpendiculaire au plan xOy on a

$$|\sin \omega \cos \theta - \cos \omega \sin \theta \cos \psi| = N'N \leq r$$

avec

$$(9.5) \quad r \geq |\sin(\theta - \omega)|.$$

a. Si M tend vers P_0 le long du rayon OP_0 , $\omega = \theta_0$, on écrit

$$\left| \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right| \leq (h+3) \iint_{\Sigma} \left| \frac{g_1(\theta)}{\sin(\theta - \theta_0)} \right| K(N, M) d\sigma$$

et comme le premier facteur du produit sous le signe somme tend vers zéro lorsque θ tend vers θ_0 , la dérivée $\partial w_1 / \partial \omega$ tend bien vers zéro (2.a). La série

$$(9.6) \quad -2\mu \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_{n-1}^{\mu-1}(\cos \theta)$$

est alors *sommable par le procédé de Poisson*.

Remarquons que, si la fonction formée par $g(\theta)$ et par son prolongement par symétrie (3.b) a une dérivée en $\theta = 0$, $\theta = \pi$, on a $g'(0) = 0$, $g'(\pi) = 0$ et la sommabilité de la série (9.6) reste vraie pour $\theta = 0$, $\theta = \pi$.

b. Dans le cas général où le point M de D n'est astreint qu'à la condition indiquée dans l'énoncé du théorème, nous avons

$$\left| \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right| < (h+3) \iint_{\Sigma} \left| \frac{g_1(\theta)}{\sin(\theta - \theta_0)} \right| \frac{|\sin(\theta - \theta_0)|}{r} K(N, M) d\sigma.$$

En décomposant l'intégrale en deux autres étendues respectivement à un voisinage Σ_1 de P_0 et à $\Sigma - \Sigma_1$, on voit qu'une condition suffisante pour que $\partial w_1 / \partial \omega$ tende vers zéro est que l'intégrale

$$J = \iint_{\Sigma} \frac{|\sin(\theta - \theta_0)|}{r} K(N, M) d\sigma$$

reste bornée. Or, J vérifie l'inégalité

$$J < \iint_{\Sigma} \frac{|\sin(\theta - \omega)|}{r} K(N, M) d\sigma + \iint_{\Sigma} \frac{|\sin(\omega - \theta_0)|}{r} K(N, M) d\sigma.$$

La première de ces intégrales est inférieure à 1 d'après (1.5') et (9.5). Dans la deuxième le rapport $|\sin(\omega - \theta_0)|/r$ est inférieur à $|\sin(\omega - \theta_0)|/(1 - \rho)$

fonction bornée d'après la façon dont M tend vers P_0 . La deuxième intégrale est également bornée. D'où la propriété annoncée.

10. DERIVÉE NORMALE.

L'étude de la dérivée normale de $w(M)$ sort du cadre que nous nous étions primitivement fixé et nous pensons reprendre cette étude dans un autre travail. Aussi, nous bornerons-nous à la remarque suivante.

Supposons que dans un intervalle entourant θ_0 , $0 < \theta_0 < \pi$, la fonction $g(\theta)$ ait une dérivée satisfaisant à la condition de Hölder

$$|g'(\theta) - g'(\theta_0)| < |\theta - \theta_0|^\nu \quad (0 < \nu = \text{const.} < 1)$$

De propriétés connues [33, 5] et de celles démontrées dans ce travail, il résulte que, lorsque le point M tend vers P_0 suivant le rayon OP_0 , la dérivée $-\partial w/\partial \rho$ tend vers une limite. La fonction $w(M)$ a donc en P_0 une dérivée normale dw/dn égale à cette limite. La série

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n C_n^\mu(\cos \theta)$$

est sommable en θ_0 par le procédé de Poisson.

20, rue Boncenne
Poitiers

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BELTRAMI
 - a. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. *Opere matematiche* **3**, 1911, p. 115.
 - b. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche *id.*, p. 349.
- [2] S. BERGMAN & M. SCHIFFER
Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics, 1953.
- [3] L. BERS & A. GELBART
 On a class of functions defined by partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **56**, 1944, p. 67.
- [4] G. BOULIGAND
 - a. *Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet*. Mém. Sc. Math., fasc. 11, 1926.
 - b. Sur certaines équations du type elliptique à coefficients singuliers. *Bull. Ac. roy. Belg.* **18**, 1932, p. 840.
 - c. Sur quelques cas singuliers du problème de Dirichlet. *Bull. Ac. roy. Belg.* **19**, 1933, p. 301.
 - d. Sur les cas singuliers d'un problème aux limites de la théorie du potentiel. *Bull. Ac. roy. Belg.* **19**, 1933, p. 1050.
- [5] M. BRELOT
Etude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)u(M)$, $c(M) \geq 0$ au voisinage d'un point singulier du coefficient. Thèse, 1931.
- [6] P. BROUSSE
 - a. Sur une équation de la Mécanique des milieux continus. *C. R. Ac. Sc.* **234**, 1952, p. 2146.
 - b. Sur un problème de Dirichlet singulier. *C. R. Ac. Sc.* **236**, 1953, p. 1731.
 - c. Quelques propriétés des intégrales d'une classe d'équations singulières dans certains domaines. *C. R. Ac. Sc.* **237**, 1953, p. 1381.
- [7] P. BROUSSE ET H. PONCIN
 Quelques résultats généraux concernant la détermination de solutions d'équations elliptiques par les conditions aux frontières. *Jubilé Scientifique de M. D. Riabouchinsky*, 1954, p. 17.
- [8] R. CAMPBELL
 Contribution à l'étude des solutions de l'équation de Mathieu associée. *Bull. Soc. Math. Fr.* **78**, 1950, p. 185.
- [9] J. CAPOULADE
Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers. Thèse, 1934.
- [10] R. COURANT UND D. HILBERT
Methoden der Mathematischen Physik, 1937, t. 2.
- [11] G. DARBOUX
 - a. Mémoire sur l'approximation de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. *Journ. Math.* (3) **4**, 1878, pp. 5 et 377.
 - b. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. t. 2, 1915, p. 54.
- [12] M. E. EICHLER
 On the differential equation $u_{xx} + u_{yy} + N(x)u = 0$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65**, 1949, p. 259.
- [13] P. FATOU
 Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta. Math.* **30**, 1906, p. 335.
- [14] G. FICHTENHOLTZ
 Sur l'intégrale de Poisson et quelques questions qui s'y rattachent. *Fundamenta Mathematicæ* **13**, 1929, p. 1.

- [15] L. GEGENBAUER
Wiener Sitzungsberichte **70**, 1874, p. 433; **75**, 1877, p. 891; **97**, 1888, p. 259; **102**, 1893, p. 942.
- [16] S. GELLERSTEDT
Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte. Thèse, Upsal, 1935.
- [17] P. GERMAIN ET R. BADER
 - a. Problème de Dirichlet pour une équation du type mixte. *C. R. Ac. Sc.* **230**, 1950, p. 1824.
 - b. *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation de type mixte de Tricomi*. O. N. E. R. A., **54**, 1952.
 - c. Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte. *Bull. Soc. Math. Fr.* **81**, 1953, p. 145.
- [18] D. GILBARG
Uniqueness of axially symmetric flows with free boundaries. *Journ. Rat. Mech. Analysis* **1**, 1952, p. 309.
- [19] A. HUBER
On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1953, p. 160.
- [20] G. JULIA
Sur les valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère en un point de discontinuité des données. *Bull. Soc. Math.* (2) **42**, 1918, pp. 214 & 224.
- [21] J. KAMPE DE FÉRIET
 - a. Sur les fonctions hypersphériques et sur la fonction hypergéométrique. *Acta Math.* **43**, 1922, p. 197.
 - b. *La fonction hypergéométrique*. Mém. Sc. Math. **85**, 1937.
- [22] M. V. KELDICH
Au sujet de quelques cas de dégénérescence d'équation du type elliptique à la frontière d'un domaine (en russe). *Doklady* **77**, 1951, p. 181.
- [23] O. D. KELLOGG
Foundations of potential theory, 1929.
- [24] F. KLEIN
Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. *Math. Ann.* **37**, 1890, p. 573.
- [25] E. KOGBETLIANTZ
 - a. Sur la sommation des séries ultrasphériques. *C. R. Ac. Sc.* **164**, 1917, pp. 510, 626, 778; **169**, 1919, p. 54.
 - b. Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques. *Journ. Math.*, (9) **3**, 1924, p. 107.
 - c. Recherches sur l'unicité des séries ultrasphériques. *Journ. Math.* (9) **5**, 1926, p. 125.
- [26] R. LAGRANGE
Polynômes et fonctions de Legendre. Mém. Sc. Math. **97**.
- [27] H. LEBESGUE
 - a. *Leçons sur les séries trigonométriques*, 1906.
 - b. Sur le problème de Dirichlet. *Rend. Circ. Math. Palermo* **24**, 1907, p. 371.
- [28] L. LICHTENSTEIN
Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen. *Rend. Circ. Math. Palermo* **33**, 1912, p. 201.
- [29] F. NEUMANN
Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, 1878, p. 133.
- [30] N. OBRÉCHKOFF
Sur la sommation de la série ultrasphérique par la méthode des moyennes arithmétiques. *Rend. Circ. Math. Palermo* **59**, 1935, p. 266.

- [31] M. N. OLEWSKI
Solution du problème de Dirichlet relatif à l'équation $\Delta u + (p/x_n)(\partial u/\partial x_n) = \rho$ pour un domaine hémisphérique (en russe). *Doklady* **64**, 1949, p. 767.
- [32] O. OLEJNIK
Equation du type elliptique dégénérant à la frontière (en russe). *Doklady* **87**, 1952, p. 885.
- [33] J. SCHAUDER
Potentialtheoretische Untersuchungen. *Math. Zeitschrift* **33**, 1931, p. 602.
- [34] T. J. STIELTJES
Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, 2, 1905, p. 46.
- [35] G. SZEGÖ
Orthogonal Polynomials, 1939.
- [36] E. C. TITCHMARSH
Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, 1946.
- [37] F. TRICOMI
Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto. *Atti della R. Acad. dei Lincei*, (5) **14**, 1923, p. 134.
- [38] G. N. WATSON
Theory of Bessel functions, 1922.
- [39] A. WEINSTEIN
 - a. Discontinuous integrals and generalized potential theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **63**, 1948, p. 342.
 - b. On Tricomi's equation and generalized axially symmetric potential theory. *Bull. Ac. roy. Belg.* **37**, 1951, p. 348.
 - c. Generalized axially symmetric potential theory. *Bull. Am. Math. Soc.* **59**, 1953, p. 20.
- [40] E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON
A course of modern Analysis, 1952.
- [41] S. ZAREMBA
Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet. *Bul. Ac. Sc., Cracovie*, 1909, p. 561.
- [42] A. ZYGMUND
 - a. Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. *Math. Zeitschrift* **25**, 1926, p. 274.
 - b. *Trigonometrical series*, 1952.

SUPPLEMENT ajouté lors de la correction des épreuves:

- [19'] A. HUBER
 - b. On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials. *Ann. Math.* **60**, 1954.
 - c. The elastic sphere under concentrated torques. *Quart. Appl. Math.* **13**, 1955.