Sur L'Intégration des Équations de la Relativité Générale

MADAME YVONNE FOURÈS-BRUHAT

Mémoire transmis par A. LICHNEROWICZ

Introduction

Dans la théorie de la Relativité générale, telle qu'elle a été précisée et exposée par A. LICHNEROWICZ¹, l'Univers, ou espace-temps est une variété à quatre dimensions, munie d'une structure de variété différentiable de classe C^2 , C^4 par morceaux: dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées locales, les coordonnées d'un point dans l'un des systèmes sont des fonctions quatre fois différentiables des coordonnées de ce point dans l'autre système, les dérivées premières et secondes étant continues, les dérivées troisièmes et quatrièmes pouvant être seulement continues par morceaux.

Sur la variété V_4 est définie une métrique riemannienne partout de type hyperbolique normal. Dans un système de coordonnées locales l'expression de cette métrique est:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

les $g_{\alpha\beta}$, potentiels de gravitation (composantes du tenseur de gravitation) sont supposés une fois continuellement différentiable sur V_4 , et admettant des dérivées deuxièmes et troisièmes continues par morceaux, ce qui est bien compatible avec la structure de V_4 . Une telle métrique est dite régulière. Nous désignerons toujours dans des coordonnées locales par x^4 la variable temporelle et par x^i les trois variables spatiales ($g^{44} > 0$, $g_{ii}x^ix^i$ définie < 0 .)

Un modèle d'univers relativiste est une variété V_4 munie d'une métrique régulière satisfaisant aux équations d'Einstein. Ces équations s'obtiennent

¹ Cf. A. LICHNEROWICZ [1].

dans le cas extérieur (c'est-à-dire en dehors des masses gravitantes) en annulant le tenseur de Ricci correspondant à la métrique (1), et s'écrivent:

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Ce sont des équations aux dérivées partielles du second ordre pour les dix inconnues $g_{\alpha\beta}$, quasilineaires (c'est-à-dire linéaires par rapport aux dérivées secondes). Ces équations ne sont pas indépendantes puisque les composantes $R_{\alpha\beta}$ du tenseur de Ricci satisfont aux quatre identités déduites par contraction des identités de Bianchi (conditions de conservation):

$$\nabla_{\alpha} S_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad \text{où on a posé} \quad S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R.$$

On sait depuis les travaux de E. CARTAN, DARMOIS, LICHNEROWICZ que le problème de la détermination des espaces temps extérieurs se subdivise en deux problèmes distincts appelés problème des conditions initiales et problème de l'évolution dans le temps. Le second de ces problèmes consiste en la détermination d'un espace-temps extérieur correspondant à des données initiales (potentiels et dérivées premières) sur une variété initiale S , soit $x^4 = 0$. Ces données initiales ne peuvent être arbitraires puisque les équations $S_{\alpha}^4 = 0$ ne contiennent que des quantités qui s'obtiennent à partir des données initiales par dérivation sur S . J'ai montré d'autre part qu'à des données initiales suffisamment différentiables, satisfaisant à ces quatre conditions, correspondait, au moins au voisinage de S , un espace-temps et un seul (résultat qui était connu dans le cas analytique¹). Je me propose ici de donner une méthode d'intégration du système des quatre équations $S_{\alpha}^4 = 0$.

Au paragraphe I j'écris les équations d'Einstein, en utilisant le repère mobile de E. CARTAN et je fais apparaître dans le système des conditions initiales les quantités géométriques relatives à l'hypersurface S (métrique et courbures principales de S comme hypersurface plongée dans l'espace-temps).

Au paragraphe II je donne une méthode d'intégration du système des conditions initiales qui se ramène à l'intégration par approximations successives d'une équation elliptique et d'un système hyperbolique, quasi linéaires et où les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé sont des fonctions données des variables.

Au paragraphe III je donne quelques propriétés des solutions obtenues et j'indique des cas où la méthode proposée conduit à des solutions globales sur l'hypersurface S .

J'utiliserai la convention de sommation d'Einstein, les indices grecs variant toujours de 1 à 4, les indices latins de 1 à 3.

¹ Cf. DARMOIS [2], LICHNEROWICZ [1], Y. FOURÈS-BRUHAT [4].

Expression des Equations d'Einstein dans le Repère Mobile

Pour traiter le problème des conditions initiales, pour une variété orientée dans l'espace (d'équation $x^4 = 0$ en coordonnées locales) nous utiliserons un repère mobile dont un axe sera orthogonal à l'élément de variété d'espace $x^4 = c^{te}$ passant par son origine, les trois autres axes étant tangents à cette variété.

1. Formules fondamentales de la géométrie riemannienne en repère mobile :

Dans un repère mobile rectangulaire la métrique d'une variété riemannienne s'écrit :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \Sigma(\omega_\alpha)^2$$

où les

$$\omega_\alpha = a_{\alpha\beta} dx^\beta$$

sont quatre formes linéaires indépendantes des différentielles des coordonnées. Nous désignerons par ω_4 la forme de carré positif, correspondant à l'axe orienté dans le temps (on aura a_{44} réel) et ω_i les formes de carré < 0 , correspondant aux axes orientés dans l'espace (on aura a_{ii} imaginaire pur).

Nous désignerons par $\partial_\alpha f$ la dérivée pfaffienne de la fonction f par rapport à la forme ω_α :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\beta} dx^\beta = \partial_\alpha f \omega_\alpha$$

d'où on déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x^\beta} = a_{\alpha\beta} \partial_\alpha f \quad \text{et} \quad \partial_\alpha f = a^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\beta}$$

$a^{\alpha\beta}$ étant le quotient par le déterminant a des $a_{\alpha\beta}$ du mineur relatif à l'élément $a_{\alpha\beta}$.

Les équations de structure de l'espace riemannien de métrique $ds^2 = \Sigma(\omega_\alpha)^2$ sont :

$$d\omega_\alpha = \frac{1}{2} c_{\beta\lambda\alpha} \omega_\beta \wedge \omega_\lambda = \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha}$$

elles déterminent les coefficients de rotation de Ricci donnés par :

$$\omega_{\beta\alpha} = \gamma_{\beta\alpha\lambda} \omega_\lambda$$

par les équations

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} + \gamma_{\beta\alpha\lambda} = 0$$

$$\gamma_{\alpha\lambda\beta} - \gamma_{\alpha\beta\lambda} = c_{\beta\lambda\alpha}$$

d'où

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}(c_{\alpha\beta\lambda} - c_{\beta\lambda\alpha} - c_{\lambda\alpha\beta})$$

avec:

$$c_{\alpha\beta\lambda} = a^{\beta\mu} \partial_{\alpha} a_{\lambda\mu} + a^{\alpha\mu} \partial_{\beta} a_{\lambda\mu}$$

on déduit des conditions d'intégrabilité déterminant le tenseur de courbure:

$$d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\lambda} \wedge \omega_{\lambda\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\mu} \wedge \omega_{\nu}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \gamma_{\alpha\beta\nu} - \partial_{\nu} \gamma_{\alpha\beta\mu} - \gamma_{\alpha\lambda\mu} \gamma_{\lambda\beta\nu} + \gamma_{\alpha\lambda\nu} \gamma_{\lambda\beta\mu} + \gamma_{\alpha\beta\lambda} c_{\mu\nu\lambda}$$

le tenseur de Ricci est déterminé par la contraction:

$$R_{\beta\mu} = R_{\alpha\beta\mu\alpha}$$

et la courbure scalaire R par:

$$R = R_{\beta\beta} .$$

2. Repère mobile d'axe orthogonal aux sections d'espace: Nous prendrons un repère mobile dont l'axe orienté dans le temps est orthogonal aux sections d'espace $x^4 = c^{te}$ et nous poserons:

$$\begin{aligned} \omega_4 &= V dx^4, & V \text{ réel} \\ \omega_i &= a_{ij} dx^j + \lambda_i dx^4, & a_{ij}, \lambda_i \text{ imaginaires.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les quatre quantités V, λ_i sont les composantes, dans le repère mobile d'un vecteur unitaire tangent à la ligne de temps $x^i = c^{te}$. V est indépendant du repère mobile.

La métrique:

$$\overline{ds}^2 = \Sigma \bar{\omega}_i^2, \quad \bar{\omega}_i = a_{ij} dx^j \quad (2.2)$$

est la métrique définie négative des variétés d'espace $x^4 = c^{te}$. Nous surmonterons d'un trait les opérations relatives à cette métrique.

Les coefficients a_{ij}, λ_i, V sont évidemment liés aux potentiels $g_{\alpha\beta}$ par les égalités:

$$V^2 + \Sigma \lambda_i^2 = g_{44} > 0$$

$$\lambda_i a_{ij} = g_{i4}$$

$$a_{ij} a_{ik} = g_{ik} .$$

D'autre part:

$$a^2 = \bar{g}, \quad V^2 = \frac{1}{\bar{g}^{44}} = \frac{g}{\bar{g}}.$$

3. Calcul des coefficients de rotation: Nous allons calculer les coefficients de rotation $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ et le tenseur de Riemann en faisant apparaître les éléments qui ne dépendent que de la métrique $\bar{ds}^2$ des sections d'espace. Remarquons tout d'abord que pour une fonction f quelconque des coordonnées x^α on a:

$$\partial_i f = \bar{\partial}_i f$$

$\bar{\partial}_i f$ désignant la dérivée de f sur une section d'espace par rapport à la forme $\bar{\omega}_i$. On déduit de l'expression des formes ω_α et $\bar{\omega}_i$ (2.1, 2.2):

$$d\omega_4 = \frac{1}{2}c_{\alpha\beta 4}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta = dV \wedge dx^4 = \frac{\partial_i V}{V}\omega_i \wedge \omega_4$$

$$d\omega_i = \frac{1}{2}c_{\alpha\beta i}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta = d\bar{\omega}^i + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^4}dx^4 \wedge dx^i + d\lambda_i \wedge dx^4$$

$$d\bar{\omega}_i = \frac{1}{2}\bar{c}_{hki}\bar{\omega}_h \wedge \bar{\omega}_k$$

d'où:

$$c_{hki} = \bar{c}_{hki}$$

$$c_{h4i} = -c_{hki} \frac{\lambda_k}{V} + \partial_h \frac{\lambda_i}{V} - a^{hi} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^4}$$

$$c_{h44} = \frac{\partial_h V}{V}$$

$$c_{h44} = 0$$

d'où pour les coefficients de rotation:

$$\gamma_{hki} = \bar{\gamma}_{hki}$$

$$\gamma_{h4i} = \frac{\bar{\nabla}_h \lambda_i + \bar{\nabla}_i \lambda_h}{2V} - \frac{1}{2V} \left(a^{ij} \frac{\partial a_{hj}}{\partial x^4} + a^{hi} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^4} \right)$$

$$\gamma_{h44} = \frac{\partial_h V}{V}$$

$$\gamma_{hi4} = \frac{\bar{\nabla}_h \lambda_i - \bar{\nabla}_i \lambda_h}{2V} - \frac{\lambda_k \gamma_{ihk}}{V} - \frac{1}{2V} \left(a^{hi} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^4} - a^{ij} \frac{\partial a_{hi}}{\partial x^4} \right).$$

Nous poserons $\gamma_{h4i} = P_{ih}$. Les P_{ih} sont les composantes d'un tenseur d'espace symétrique: ce sont les coefficients de la deuxième forme quadratique fondamentale des sections d'espace considérées comme hypersurfaces plongées dans l'espace-temps. Le scalaire $P = P_{ii}$ en est la courbure moyenne.

Nous poserons aussi $\gamma_{hi4} = \bar{Q}_{hi}$. Les $\bar{Q}_{hi}$, antisymétriques, ne sont pas les composantes d'un tenseur.

Les P_{ih} et $\bar{Q}_{ih}$ sont réels.

Remarquons que:

$$a_{mi}a_{lh}P_{ih} = \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^4} \quad \text{si} \quad \lambda_i = 0.$$

4. Calcul des composantes du tenseur de Riemann: Nous avons trouvé la formule générale:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \partial_\mu\gamma_{\alpha\beta\nu} - \partial_\nu\gamma_{\alpha\beta\mu} - \gamma_{\alpha\lambda\mu}\gamma_{\lambda\beta\nu} + \gamma_{\alpha\lambda\nu}\gamma_{\lambda\beta\mu} + \gamma_{\alpha\beta\lambda}c_{\mu\nu\lambda}$$

d'où nous tirons:

$$R_{ijhk} = \bar{R}_{ijhk} + P_{ih}P_{jk} - P_{ik}P_{jh}$$

qui sont les équations de Gauss de l'hypersurface $x^4 = c^{te}$ plongée dans l'espace-temps.

$$R_{i4h4} = \partial_h\left(\frac{\partial_i V}{V}\right) + \gamma_{kih}\frac{\partial_k V}{V} + \bar{Q}_{il}P_{lh} - \partial_4 P_{ii} + P_{ij}c_{h4i} + \frac{\partial_i V}{V}\frac{\partial_k V}{V}$$

or

$$c_{h4i} = P_{hi} + \bar{Q}_{hi}$$

d'où nous déduisons:

$$R_{i4h4} = \frac{\bar{\nabla}_h(\partial_i V)}{V} + P_{ii}P_{hi} + \bar{Q}_{ii}P_{ih} + \bar{Q}_{hi}\bar{P}_{ii} - \partial_4 P_{ih}.$$

Nous trouvons ensuite:

$$R_{4ijhk} = \partial_k P_{jh} - \partial_h P_{jk} + P_{lh}\gamma_{jlk} - P_{lk}\gamma_{jlk} - c_{hkl}P_{il}$$

or:

$$c_{hkl} = -\gamma_{lhh} + \gamma_{lkh}$$

d'où:

$$R_{4ijhk} = \bar{\nabla}_k P_{jh} - \bar{\nabla}_h P_{jk}$$

qui sont les équations de Codazzi des sections d'espace.

5. Calcul des composantes du tenseur de Ricci: De l'expression du tenseur de Riemann on déduit après contraction: $R_{\alpha\beta} = -R_{\alpha\lambda\beta\lambda}$

$$R_{ih} = \bar{R}_{ih} - \frac{\bar{\nabla}_h(\partial_i V)}{V} - PP_{ih} - (\bar{Q}_{il}P_{lh} + Q_{hl}P_{li}) + \partial_4 P_{ih}$$

$$R_{4h} = \bar{\nabla}_h P - \bar{\nabla}_k P_{hk}$$

$$R_{44} = -\frac{\bar{\nabla}_h(\partial_h V)}{V} - P_{ih}P_{ih} + \partial_4 P.$$

Par une nouvelle contraction la courbure riemannienne scalaire:

$$R = \bar{R} - 2 \frac{\bar{\nabla}_h(\partial_h V)}{V} - P^2 + 2\partial_4 P - H^2$$

où on a posé:

$$P_{ih}P_{ih} = H^2.$$

6. Problème des conditions initiales et problème de l'évolution dans le temps:

Un espace-temps einsteinien est déterminé par les équations:

$$R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}S$$

où $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion-énergie, donné, nul à l'extérieur des masses.

Nous écrirons ces équations dans le repère mobile:

$$(1) \quad R_{ih} = S_{ih} - \frac{1}{2}\delta_{ih}S$$

$$(2) \quad \begin{cases} R_{4h} = \bar{\nabla}_h P - \bar{\nabla}_h P_{hk} = S_{4h} \\ R - 2R_{44} = \bar{R} + H^2 - P^2 = -2S_{44} . \end{cases}$$

On voit que sur la variété initiale (d'équation locale $x^4 = 0$) le système des équations (2) ne fait intervenir que la métrique ds^2 de cette variété S et les coefficients P_{ih} de sa deuxième forme quadratique fondamentale (en tant qu'hypersurface plongée dans l'espace-temps). Il résulte donc de l'expression de P_{ih} que le système (2) s'exprime au moyen des seules données initiales (potentiels et dérivées premières) et de leurs dérivées sur S . Les quatre équations (2) représentent donc un système de conditions nécessaires vérifiées par les données initiales et constituent les équations du problème des conditions initiales.

Les équations (1) permettent, connaissant les données initiales de calculer les dérivées secondes significatives des potentiels, $\partial^2 g_{ii}/\partial x^{42}$. L'étude du problème de l'évolution¹ (problème de Cauchy) montre en fait qu'à des données initiales suffisamment différentiables satisfaisant à (2) correspond un espace-temps, physiquement unique, du moins dans un certain voisinage de la surface S .

¹ DARMOIS [2], LICHNEROWICZ [1], Y. FOURÈS-BRUHAT [4].

Intégration du Système des Conditions Initiales

Le système des conditions initiales, équations satisfaites par les données de Cauchy sur une hypersurface S s'écrivent:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} S_{4h} = \overline{\nabla}_h P - \overline{\nabla}_k P_{hk} \\ -2S_{44} = \overline{R} + H^2 - P^2. \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

Ce sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux inconnues P_{ij} , déterminant les lignes et rayons de courbure de S dans l'espace-temps et du deuxième ordre pour les coefficients de la première forme quadratique de cette hypersurface.

1. Métrique donnée sur S: Il semble naturel en premier lieu de supposer la métrique de S connue et de chercher comment les équations I déterminent les six inconnues P_{ij} . Donnons nous donc sur S une métrique définie < 0 ;

$$\overline{ds}^2 = \Sigma \bar{\omega}_i^2 \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_i = a_{ij} dx^j.$$

La courbure riemannienne scalaire, $\overline{R}$, de S est alors connue et l'équation (2) permet de calculer $H^2 - P^2$ qui est linéaire par rapport à chacun des P_{ij} (non sommé), on peut l'écrire par exemple:

$$\sum_{i \neq h} P_{ih}^2 - 2P_{11}(P_{22} + P_{33}) - 2P_{22}P_{33} = -\overline{R} - 2S_{44}.$$

L'on joint à cette équation les trois suivantes:

$$\partial_h P - \partial_k P_{kh} - \gamma_{ihk} P_{ik} - \gamma_{ikh} P_{ih} = S_{4h}.$$

Si nous nous donnons arbitrairement P_{23} et P_{33} les équations (1) jointes à l'équation (2) d'où l'on tire P_{11} en fonction des inconnues restantes (si $P_{22} + P_{33} \neq 0$) se présentent comme un système quasilinéaire du premier ordre par rapport aux inconnues restantes P_{22} , P_{21} , P_{31} , résoluble par rapport aux dérivées pfaffiennes d'indice 1 de ces inconnues: en prenant le premier axe du repère mobile orthogonal aux surfaces $x^1 = \text{cte}$ ($a^{i1} = 0$ pour $i \neq 1$), ce qui ne restreint pas la généralité, notre système prend la forme classique d'un système quasilinéaire du premier ordre, résolu par rapport aux dérivées partielles $\partial/\partial x^1$ des inconnues. Il admet donc une solution, du moins dans le cas analytique et localement, si $P_{22} + P_{33} \neq 0$, prenant par exemple les valeurs données sur $x^1 = a$, dans un voisinage de cette surface.

Nous voyons donc que la donnée de la métrique est insuffisante pour déterminer les six inconnues restantes analytiquement. Il a fallu l'introduction de

deux fonctions arbitraires P_{23} et P_{33} dont nous ne voyons pas la justification physique à priori. D'autre part, la méthode employée à l'inconvénient de ne permettre la construction d'une solution que dans le cas où la métrique donnée est analytique (ainsi que les autres arbitraires) ce qui n'est pas justifié physiquement.

2. Variété initiale conforme à un espace donné: Nous allons supposer suivant une idée de A. LICHNEROWICZ que la métrique de S n'est connue qu'à un facteur de conformité près (dépendant du point de la surface envisagé). Nous montrerons tout d'abord que si S est minima (section d'espace du mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible, cf. LICHNEROWICZ (2)) les équations I donnent (ici en coordonnées quelconques) des équations identiques à celles obtenus par LICHNEROWICZ avec des coordonnées orthogonales (cf. [3]), sa méthode de résolution s'applique donc. Nous montrerons ensuite que si S est quelconque, et si on choisit P_{ih} , $i \neq h$, arbitraire (prendre $P_{ih} = 0$: c'est orienter le repère mobile suivant les lignes de courbure de S : on se donne donc arbitrairement en chaque point de S les tangentes principales) les équations I permettent la détermination des inconnues restantes (facteur de conformité et P_{ii} , rayons de courbure) sous de simples hypothèses de différentiabilité.

3. Equations: La métrique de la variété initiale S est donnée à un facteur de conformité près:

$$\overline{ds}^2 = \Sigma \bar{\omega}_i^2 \quad \text{avec} \quad \omega_i = \omega_i^* e^\theta$$

où les $\omega_i^* = a_{ih}^* dx^h$ sont donnés, imaginaires purs, les fonctions a_{ih}^* étant des fonctions avec un certain nombre de dérivées continues et al forme quadratique $\Sigma (\omega_i^*)^2$ étant définie négative.

e^θ est une fonction inconnue qui sera réelle, positive et dérivable deux fois.

Nous étoilerons tout symbole relatif à la métrique

$$ds^{*2} = \Sigma (\omega_i^*)^2.$$

On a pour une fonction f quelconque sur S :

$$\partial_i^* f = \partial_i f \cdot e^\theta.$$

Calculons les coefficients de rotation:

$$\gamma_{ih} = e^{-\theta} \gamma_{ih}^* + \partial_i^* \theta e^{-\theta} \delta_{ih} - \partial_j^* \theta e^{-\theta} \delta_{hi}$$

d'où

$$R_{ik} = e^{-\theta} \{ \partial_k^* P - \partial_h^* P_{hk} - 2 \partial_i^* \theta P_{ik} - \partial_i^* \theta P_{ik} + \partial_k \theta P_{hh} - \gamma_{ih}^* P_{ik} - \gamma_{ikh} P_{hi} \}$$

et

$$\bar{R} + H^2 - P^2 = e^{-2\theta} R^* - 4e^{-2\theta} \partial_{ii}^2 \theta - 4e^{-2\theta} \gamma_{ih}^* \partial_i^* \theta - 2e^{-2\theta} (\partial_i^* \theta)^2 + H^2 - P^2.$$

Ces équations sont tout à fait analogues à celles obtenues par LICHNEROWICZ en coordonnées orthogonales. En particulier ses méthodes d'intégration dans le cas où S est minima s'appliquent encore ici si S est minima ($P = 0$). Nous allons donner une méthode d'intégration dans le cas où l'hypersurface initiale S est quelconque, et sans hypothèse d'analyticité.

4. Cas extérieur, repère mobile orienté suivant les tangentes principales:

Nous nous plaçons en dehors des masses ($S_{\alpha\beta} = 0$) et construirons des données initiales dans un repère orienté suivant les tangentes principales de S (hypersurface plongée dans l'espace-temps). Nous prendrons donc $P_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Les lignes d'élément linéaire tangent ω_i sont les lignes de courbure (Γ_i) de S . Nous supposons que ce sont des courbes régulières, en particulier qu'il en passe une et une seule de chaque famille par chaque point (dans les domaines où nous les considérerons) et que la longueur de ces courbes reste bornée dans des domaines bornés, et tend vers zéro dans des domaines dont le diamètre tend vers zéro.

Nous posons:

$$P_{11} + P_{22} = u_3 \quad P_{22} + P_{33} = u_1 \quad P_{33} + P_{11} = u_2$$

les quatre inconnues u_i , satisfont aux quatre équations:

$$\partial_1^* u_1 - \partial_1^* \theta (u_2 + u_3 - 2u_1) - \gamma_{1h}^* u_1 = 0$$

et équations analogues par permutation circulaire pour u_2 et u_3

$$-4\Delta_2^* \theta - 2(\partial_i^* \theta)^2 + L e^{2\theta} + R^* = 0$$

où on a posé:

$$L = H^2 - P^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1).$$

Nous déterminerons les fonctions u, θ à l'intérieur d'un domaine Δ de frontière régulière Σ^1 : nous montrerons qu'il existe un système de fonctions u, θ continues dans Δ , et un seul, tel que θ prenne sur Σ des valeurs continues données θ_0 et que les u_i prennent sur des parties déterminées Σ_i^2 de Σ des valeurs continues données.

5. Construction d'une solution par approximations successives: Désignons par ψ une solution (continue et bornée dans Δ ainsi que ses dérivées premières)

¹ au sens du problème de Dirichlet et au sens (2).

² Les courbes Γ_i issues d'un point P de Δ sont supposées couper Σ_i en un point et un seul dépendant continuellement de P .

de l'équation $4\Delta_2\psi = 0$ prenant sur la frontière Σ de Δ une valeur donnée θ_0 et posons $v = \theta - \psi$. v satisfait à l'équation:

$$-4\Delta_2^*v - 2(\partial_i^*(v + \psi))^2 + Le^{2v}e^{2\psi} + R^* = 0 \quad (5.1)$$

et s'annule sur Σ .

Nous désignons par Σ_1 une partie de Σ telle que toute ligne de courbure d'élément linéaire tangent ω_1 , issue d'un point du domaine Δ la coupe en un point et un seul. Définitions analogues pour Σ_2 et Σ_3 .

Les u_i satisfont aux trois équations déduites par permutation circulaire de:

$$\partial_1^*u_1 - \partial_1^*\theta(u_2 + u_3 - 2u_1) - \gamma_{1hh}^*u_1 = 0 \quad (5.2)$$

et prennent sur Σ_i les valeurs u_i^0 .

Désignons par $u_i^{(n-1)}$ et $v^{(n-1)}$ des fonctions définies et continues dans Δ , prenant respectivement sur Σ_i les valeurs u_i^0 et sur Σ la valeur 0, possédant des dérivées continues et bornées respectivement jusqu'aux ordres 0 et 1. Considérons les équations aux dérivées partielles linéaires:

$$\begin{aligned} -4\Delta_2^*v^{(n)} - 2(\partial_i^*(v^{(n-1)} + \psi))^2 + L^{(n-1)}e^{2v^{(n-1)}}e^{2\psi} + R^* &= 0 \\ \partial_1^*u_1^{(n)} &= \partial_1^*\theta^{(n-1)}(u_2^{(n-1)} + u_3^{(n-1)} - 2u_1^{(n-1)}) + \gamma_{1hh}^*u_1^{(n-1)} \end{aligned}$$

(et les deux analogues pour u_2 et u_3), pour les inconnues $v^{(n)}$ et $u_i^{(n)}$ que l'on cherchera respectivement égales à 0 et à u_i^0 sur Σ et Σ_i .

L'équation (5.1) est une équation elliptique à la seule inconnue $v^{(n)}$ dont la solution s'annulant sur Σ est donnée par:

$$v^{(n)} = \int_{\Delta} G(P, Q) \{2(\partial_i^*(v^{(n-1)} + \psi))^2 + L^{(n-1)}e^{2v^{(n-1)}}e^{2\psi} + R^*\}_Q dV_Q = 0$$

où $G(P, Q)$ est la fonction de Green de l'équation $-4\Delta_2^*\theta = 0$ relative au domaine Δ . La fonction $v^{(n)}$ est continue et bornée dans Δ ainsi que ses dérivées premières.

Chacune des équations (5.2) est une équation de premier ordre pour une seule inconnue u_i et se résoud par intégration sur une caractéristique Γ_i (qui est la ligne de courbure d'élément linéaire tangent ω_i^*)

$$u_i^{(n)}(P) = \int_{P_0}^P f_i^{(n-1)}\omega_i^* + u_i^0(P_0)$$

où $f_i^{(n-1)}$ est le second membre de (5.2). L'intégration est faite sur Γ_i . P_0 est le point d'intersection de la courbe Γ_i issue de P avec Σ_i . Les fonctions $u_i^{(n)}$ sont continues et bornées.

6. Convergence des approximations: Formons $v^{(n+1)}$, $u_i^{(n+1)}$ à partir de $v^{(n)}$, $u_i^{(n)}$ comme nous avons formé $v^{(n)}$, $u_i^{(n)}$ à partir de $v^{(n-1)}$, $u_i^{(n-1)}$, et montrons

que des approximations successives ainsi formées convergent vers des fonctions v , u_i si le domaine Δ est assez petit.

Supposons que $v^{(n-1)}$, $u_i^{(n-1)}$ vérifient des inégalités de la forme

$$|v^{(n-1)}| < M \quad |u_i^{(n-1)}| < M \quad |\partial_i^* v^{(n-1)}| < M. \quad (6.1)$$

Il est clair que si les lignes d'élément linéaire tangent ω_i^* incluses dans Δ ont une longueur qui tend vers zéro avec le diamètre de Δ , il suffira que Δ ait un volume et un diamètre assez petits pour que les inégalités (6.1) entraînent des inégalités analogues pour $v^{(n)}$, $u_i^{(n)}$, $\partial_i^* v^{(n)}$ puisque les intégrales $\int_{\Delta} G(P, Q) dV_Q$ et $\int_Q \partial_i^* G(P, Q) dV_Q$ tendent vers zéro avec le volume de Δ et que $\int_{P_0}^P \omega_i^*$ tend vers zéro avec le diamètre de Δ . Il est de même facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\Delta} \left\{ |v^{(n+1)} - v^{(n)}| + \sum_{i=1}^3 |\partial_i^* v^{(n+1)} - \partial_i^* v^{(n)}| + \sum_{i=1}^3 |u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}| \right\} \\ < k \text{Max}_{\Delta} \left\{ |v^{(n)} - v^{(n-1)}| + \sum_{i=1}^3 |\partial_i^* v^{(n)} - \partial_i^* v^{(n-1)}| + \sum_{i=1}^3 |u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| \right\} \end{aligned}$$

avec $k < 1$ pour Δ assez petit, ce qui montre la convergence des approximations $v^{(n)}$, $\partial_i^* v^{(n)}$, $u_i^{(n)}$ vers des fonctions continues et bornées v , $\partial_i^* v$, u_i . Ces fonctions vérifient les équations intégrales:

$$\begin{aligned} v(P) &= \int_{\Delta} G(P, Q) \{2(\partial_i^*(v + \psi))^2 - Le^{2\psi} e^{2\psi} - R^*\}_{\varphi} dV_{\varphi} \\ u_i(P) &= \int_{P_0}^P f_i^* \omega_i^* + u_i^0(P_0) \end{aligned}$$

et les équations aux dérivées partielles (5.1) et (5.2)¹, et les conditions à la frontière données. Cette solution est unique.

7. Cas intérieur: Les équations s'écrivent:

$$\begin{aligned} 2S_{44}e^{\theta} &= 4\Delta_2^*\theta + 2(\partial_i^*\theta)^2 - Le^{2\theta} - R^* \\ S_{41}e^{\theta} &= \partial_1^*u_1 - 2\partial_1^*\theta(u_2 + u_3 - 2u_1) - \gamma_{1h}^*u_1 \end{aligned}$$

(et équations analogues pour u_2 et u_3).

Quand le tenseur d'impulsion énergie est connu, S_{44} et S_{4k} sont des quantités données. La méthode précédente de résolution s'applique encore.

8. Propriété des solutions: Dans le cas extérieur, ou dans le cas où la matière correspond au schéma fluide parfait, les lignes de courant étant orthogonales à

¹ (5.1) n'est vérifié au sens classique que si v admet des dérivées secondes. Il en est ainsi si u_i^0 et la correspondance entre P_0 et P sont continuellement différentiables, ψ ayant des dérivées secondes continues et bornées dans Δ .

l'instant initial à l'hypersurface S , les trois quantités u_i^0 sont nulles. Les u_i sont donc nuls dans Δ s'ils le sont sur sa frontière Σ . La métrique initiale est alors stationnaire par rapport à des lignes de temps orthogonales à S , les $\partial g_{mi}/\partial x^4 = a_{mi}a_{ih}P_{ih}$ étant nuls.

Remarquons aussi que les u_i dépendent continuellement des u_i^0 , donc sont arbitrairement petits avec les u_i^0 . Les $\partial g_{mi}/\partial x^4$ sont donc arbitrairement petits dans Δ s'ils le sont sur la frontière de Δ .

9. Solutions globales : On peut, dans certains cas, trouver des solutions globales des équations (5.1), (5.2) sans restriction sur la dimension de Δ .

1°) $u_i^0 = 0$. On a alors $u_i = 0$, θ satisfaisant à l'équation $-4\Delta_2^*\theta - 2(\partial_1^*\theta)^2 + R^* = 0$ qui s'écrit¹ en posant $e^\theta = \varphi^2$

$$-8\Delta_2^*\varphi + R^*\varphi = 0$$

qui a une solution unique positive, dans un domaine Δ quelconque de frontière régulière Σ , prenant des valeurs positives données sur Σ , si $R^* \leq 0$.

2°) Si les u_i^0 sont assez petits et si $R^* \leq 0$ on pourra trouver une solution dans un domaine Δ quelconque, car $L\varphi^5$ sera assez petit pour assurer la convergence des approximations. En effet:

Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, $\gamma_{1hh}^* = 0$. Les équations (5.1), (5.2) s'écrivent (avec $e^\theta = \varphi^2$):

$$-8\Delta_2^*\varphi + R^*\varphi + L\varphi^5 = 0 \quad (9.1)$$

$$\partial_1^*u_1 - \partial_1^*\theta(u_2 + u_3 - 2u_1) = 0.$$

Soit $G(P, Q)$ la fonction de Green de l'équation $-8\Delta_2^*\varphi + R^*\varphi = 0$ relative au domaine Δ . Soit φ_0 les valeurs, positives, prises par φ sur Σ et soit ψ la solution de $-8\Delta_2^*\psi + R^*\psi = 0$ égale à φ_0 sur Σ . Désignons par m le minimum strictement positif, de ψ dans Δ et M son maximum:

$$m \leq \psi \leq M.$$

Soit M' le maximum dans Δ des valeurs absolues des dérivées de ψ . Posons $v = \varphi - \psi$. La nouvelle inconnue v , et u satisfont aux équations intégrales:

$$v(P) = - \int_{\Delta} G(P, Q) \{L(v + \psi)^5\}_Q dV_Q \quad (9.2)$$

$$u_1(P) = \int_{P_0}^P \partial_1^*\theta(u_2 + u_3 - 2u_1)\omega_1^* + u_1^0(P_0) \quad (9.3)$$

et analogues pour u_2 et u_3 .

¹ Cf. LICHNEROWICZ [3].

Montrons que si $|u_i^0| < \epsilon$, avec ϵ suffisamment petit, les approximations successives

$$v^{(n)} = - \int_{\Delta} G(P, Q) \{L^{(n-1)}(v^{(n-1)} + \psi)^5\}_Q dV_Q$$

$$u_1^{(n)} = \int_{P_0}^P \partial_1^* \theta^{(n-1)} (u_2^{(n-1)} + u_3^{(n-1)} - 2u_1^{(n-1)}) \omega_1^* + u_1(P_0)$$

convergent vers des fonctions v et u_i solutions de (5.1), (5.2).

Supposons donc que:

$$|u_i^{(n-1)}| < \eta, \quad |v^{(n-1)}| < \alpha < m, \quad |\partial_i^* v^{(n-1)}| < \alpha$$

et montrons que l'on peut choisir α , η et ϵ suffisamment petits pour que l'on ait aussi:

$$|u_i^{(n)}| < \eta, \quad |v^{(n)}| < \alpha, \quad |\partial_i^* v^{(n)}| < \alpha. \quad (9.4)$$

Désignons par k le maximum dans Δ de $\int_{\Delta} G(P, Q) dV_Q$ et $\int_{\Delta} \partial_i^* G(P, Q) dV_Q$. On a:

$$|v^{(n)}| < \frac{9}{2} k \eta^2 (M + \alpha)^5$$

et

$$|\partial_i^* v^{(n)}| < \frac{9}{2} k \eta^2 (M + \alpha)^5.$$

On aura donc:

$$|v^{(n)}| < \alpha \quad \text{et} \quad |\partial_i^* v^{(n)}| < \alpha$$

si:

$$\eta^2 < \frac{2\alpha}{9k(M + \alpha)^5}.$$

Désignons d'autre part par k le maximum dans Δ de $\int_{P_0}^P \omega_i^*$. On a:

$$|u_i^{(n)}| < 4k\eta \max_{\Delta} |\partial_i^* \theta^{(n-1)}| + \epsilon.$$

On a donc, puisque $\partial_i^* \theta = 2(\partial_i^* \varphi)/\varphi$

$$|u_i^{(n)}| < 4k\eta \frac{\alpha + M'}{m - \alpha} + \epsilon$$

et on aura:

$$|u_i^{(n)}| < \eta \quad \text{si} \quad \epsilon < \eta \left\{ 1 - 4k \frac{M' + \alpha}{m - \alpha} \right\}$$

on pourra donc choisir ϵ suffisamment petit, à condition que:

$$1 - 4k \frac{M' + \alpha}{m - \alpha} > 0$$

c'est-à-dire:

$$\alpha < \frac{m - 4kM'}{1 + 4k}$$

on pourra choisir α satisfaisant à cette inégalité si:

$$m - 4kM' > 0. \quad (9.5)$$

Cette inégalité est vérifiée à coup sûr si $R^* = 0$ et $\varphi_0 = c^e$: la solution ψ est alors constante donc $M' = 0$. Cette inégalité sera encore vérifiée si $|R^*|$ est assez petit et m assez grand (et pas trop différent de M), puisque ψ , solution d'un problème de Dirichlet bien posé, dépend continuellement des coefficients et des données frontières. Si (9.5) est vérifiée on pourra choisir α , η , ϵ , pour que $v^{(n)}$, $\partial_i^* v^{(n)}$ et $u_i^{(n)}$ satisfassent à (9.4).

Montrons alors que l'on peut choisir α , η , ϵ pour que les approximations convergent. On a:

$$\begin{aligned} & \sum \text{Max}_{\Delta} \{ |v^{(n)} - v^{(n-1)}| + |u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| + |\partial_i^* v^{(n)} - \partial_i^* v^{(n-1)}| \} \\ & < \sum \text{Max}_{\Delta} \{ n_1 K \eta (M + \alpha)^5 |u_i^{(n-1)} - u_i^{(n-2)}| + n_2 K \eta^2 (M + \alpha)^4 |v^{(n-1)} - v^{(n-2)}| \\ & \quad + 8k\eta \frac{M + \alpha}{(m - \alpha)^2} |\partial_i^* v^{(n-1)} - \partial_i^* v^{(n-2)}| + 8k\eta \frac{M' + \alpha}{(m - \alpha)^2} |v^{(n-1)} - v^{(n-2)}| \\ & \quad + 4k \frac{M' + \alpha}{m - \alpha} |u_i^{(n-1)} - u_i^{(n-2)}| \} \end{aligned}$$

(n_1 et n_2 nombres).

On aura donc:

$$\begin{aligned} & \sum \text{Max}_{\Delta} \{ |v^{(n)} - v^{(n-1)}| + |u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| + |\partial_i^* v^{(n)} - \partial_i^* v^{(n-1)}| \} \\ & < l \sum \text{Max}_{\Delta} \{ |v^{(n-1)} - v^{(n-2)}| + |u_i^{(n-1)} - u_i^{(n-2)}| \\ & \quad + |\partial_i^* v^{(n-1)} - \partial_i^* v^{(n-2)}| \} \end{aligned} \quad (9.6)$$

avec

$$|l| < 1$$

si:

$$\begin{aligned} n_2 K \eta^2 (M + \alpha)^4 + 8k\eta &< l < 1 \\ n_1 K \eta (M + \alpha)^5 + 4k \frac{M' + \alpha}{m - \alpha} &< l < 1 \\ 8k\eta \frac{M + \alpha}{(m - \alpha)^2} &< l < 1. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Si (9.5) est vérifié, on peut choisir α et η de manière à vérifier les inégalités (9.7) donc (9.6). Ces approximations seront alors convergentes. On a donc pu, pour u_i^0 assez petit, $R^* \leq 0$ et de valeur absolue assez petite construire une solution globale du problème des conditions initiales.

Institut de Mathématiques
Faculté des Sciences
Marseille

Bibliographie

- [1] A. LICHNEROWICZ—Théories Relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson, 1955.
- [2] G. DARMOIS—*Les équations de la gravitation Einsteiniennne*. Mém. Sc. Math. **25** (1927).
- [3] A. LICHNEROWICZ—*L'intégration des équations de la gravitation relativiste et la problème des n corps*. Journ. de Math. **23** (1944).
- [4] Y. FOURÈS-BRUHAT—*Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*. Acta. Math. **88** (1952).
- [5] E. CARTAN—*Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthiere-Villars, 1946.
- [6] RACINE—Thèse, Paris 1934.