“Ähnliche” dreidimensionale Grenzsichten

THEO GEIS

Vorgelegt von H. GÖRTLER

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Zusammenfassung	644
§1. Einleitende Übersicht	645
§2. Die dreidimensionalen Grenzsichtgleichungen	647
§3. Definition “ähnlicher” dreidimensionaler Grenzsichten und Herleitung des zugehörigen Systems von gewöhnlichen Dif- ferentialgleichungen	650
§4. Beweis der Konstanz der Koeffizienten in den zu “ähnlichen” Lösungen gehörigen Differentialgleichungen	658
§5. Auflösung des Systems von Bedingungsgleichungen für die Funktionen U, V^*, g_1, g_2, f	664
§6. Zur Deutung der errechneten Lösungen der Bedingungsglei- chungen	675
Literaturhinweise	686

Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen "ähnliche" dreidimensionale Grenzschichten auftreten, d. h. solche Grenzschichten, bei denen unter Verwendung eines geeigneten orthogonalen Koordinatensystems beide Geschwindigkeitskomponenten u und v parallel zur umströmten Wand die Eigenschaft haben, daß man alle u -Geschwindigkeitsprofile unter sich und alle v -Geschwindigkeitsprofile unter sich zur Deckung bringen kann, wenn man u und v sowie die Koordinate z senkrecht zur Wand mit geeigneten, von der jeweiligen Wandstelle abhängigen Maßstabsfaktoren versieht. Es wird sodann gezeigt, daß die Berechnung solcher Grenzschichtströmungen zurückgeführt werden kann auf die Lösung eines Systems von zwei gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten unter gewissen Randbedingungen. Die Konstanz der in den Differentialgleichungen auftretenden Koeffizienten zieht nach sich, daß nur dann "ähnliche" Grenzschichten auftreten, wenn die die Außenströmung und die Metrik der umströmten Fläche beherrschenden Funktionen U , V , g_1 , g_2 sowie der Maßstabsfaktor f für die Koordinate z senkrecht zur Wand einem gewissen System von partiellen Differentialgleichungen genügen. Es werden eine Reihe von Lösungen des letzteren Gleichungssystems angegeben, jedoch kann bisher nicht nachgewiesen werden, daß außer den angegebenen keine weiteren Lösungen existieren. Ebenso ist es nur teilweise möglich, eine einfache physikalische Deutung der gefundenen Lösungen zu geben.

§1. Einleitende Übersicht.

Im Gegensatz zu den bisher fast ausschließlich betrachteten zweidimensionalen Grenzschichtströmungen, bei denen alle Strömungsparameter von der dritten Koordinate unabhängig sind, ist bei dreidimensionalen Strömungsvorgängen die äußere Potentialströmung eine Funktion zweier Ortskoordinaten parallel zur umströmten Wand, während die Grenzschichtströmung alle drei Geschwindigkeitskomponenten aufweist, die im allgemeinsten Falle von allen drei Ortskoordinaten abhängig sind.

Neben dem Hinzukommen einer neuen Koordinate bzw. Geschwindigkeitskomponente treten im dreidimensionalen Fall einige neuartige Erscheinungen auf: Sind z. B. die Stromlinien der äußeren Potentialströmung geradlinig, aber konvergent oder divergent, so tritt gegenüber der zweidimensionalen Strömung im wesentlichen nur eine Änderung der Grenzschichtdicke ein. Bei seitlicher Krümmung der äußeren Potentialstromlinien tritt dagegen eine sog. "Sekundärströmung" auf. Diese hat ihren Grund in folgendem: In der Außenströmung

ABB. 1. Auftreten einer sog. Sekundärströmung bei seitlicher Krümmung der Außenstromlinien.

stehen Druckgefälle senkrecht zur Strömungsrichtung und Zentrifugalkraft miteinander im Gleichgewicht. Innerhalb der Grenzschicht herrscht dasselbe Druckgefälle wie außen, während die Zentrifugalkraft infolge der kleineren Geschwindigkeit herabgesetzt ist, sodaß die Flüssigkeitsteilchen dem Querdruckgefälle leichter nachgeben können. Es wird deshalb ein Transport von Flüssigkeit nach der konkaven Seite der Potentialstromlinien hin hervorgerufen. Das Auftreten dieser "Sekundär"- oder "Querströmung" bewirkt, daß die Richtung der Stromlinien unmittelbar an der Wand unter Umständen recht erheblich von der Richtung der äußeren Potentialstromlinien abweicht.

Die bisher über dreidimensionale Grenzschichten erschienene Literatur kann man in zwei Gruppen einteilen:

Die erste Gruppe umfaßt Arbeiten, die sich mit der Herleitung der dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen und der Diskussion dieser Gleichungen sowie mit Versuchen zu deren Vereinfachung befassen. Hier sind vor allem Arbeiten

von HAYES [1], HOWARTH [2] und MOORE [3] zu nennen. In der Arbeit des erstgenannten Autors wird eine Vereinfachung der Grenzschnittgleichungen durch geeignete Wahl des Koordinatensystems angestrebt. Weiterhin wird eine Linearisierung der Grenzschnittgleichungen bezüglich der Sekundärströmung durchgeführt. In der Arbeit von MOORE, die sich auf den Sonderfall rechtwinkliger kartesischer Koordinaten beschränkt, wird eine gewisse Vereinfachung erzielt durch Einführung eines Paares von Stromfunktionen derart, daß die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt ist.

Bei der zweiten Gruppe handelt es sich um Arbeiten, die spezielle dreidimensionale Grenzschnittströmungen betrachten und die zugehörigen Gleichungen für diese Fälle auch tatsächlich lösen. Hier sind in erster Linie eine Reihe von Arbeiten zu nennen, die den Fall des schräg angeblasenen Zylinders behandeln (vgl. hierzu z. B. [4] mit ausführlichem Literaturverzeichnis). Die Grenzschnittberechnung wird hier bei Beschränkung auf den inkompressiblen Fall besonders einfach, da das sog. "Unabhängigkeitsprinzip" gilt, welches besagt, daß das System der Grenzschnittgleichungen zerfällt in zwei Gleichungen für die Primärströmungskomponente u und die Komponente w senkrecht zur umströmten Fläche, die nach zweidimensionalen Methoden vorweg gelöst werden können, und in eine dritte Gleichung, aus der dann nachträglich die Sekundärströmungskomponente v berechnet werden kann. Ebenso ist der Fall der Umströmung rotationssymmetrischer Körper bereits ausführlich behandelt. Erfolgt die Anströmung axialsymmetrisch, so läßt sich, wie MANGLER [5] gezeigt hat, die Grenzschnittberechnung vollständig auf den ebenen Fall zurückführen. Weiterhin sind hier Arbeiten zu nennen von BÖDEWADT [6], COCHRAN [7], HANNAH [8], HOWARTH [9], [10], MOORE [11], [12], [13], [14], LOOS [15], MAGER [16], MAGER-HANSEN [17] und WILKINSON [18], die ebenfalls Fälle behandeln, in denen irgendeine Art von Symmetrie auftritt, oder bei denen ein gewisser charakteristischer Parameter in den Grenzschnittgleichungen erscheint, der klein ist.

Unter den in den zuletztgenannten Arbeiten behandelten Strömungen befinden sich einige Fälle, in denen die Grenzschnittberechnung auf gewöhnliche Differentialgleichungen führt. Dies legt die Frage nahe, ob sich nicht entsprechend wie bei den stationären Grenzschnittgleichungen für das ebene Problem eine allgemeine Klasse von dreidimensionalen Grenzschnittströmungen angeben läßt, deren Berechnung man auf die Lösung von Randwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen kann. Mit dieser Frage befaßt sich die vorliegende Arbeit.*

Die Anregung für diese Arbeit ging von Herrn Prof. Dr. H. GÖRTLER aus. Für viele fruchtbare Diskussionen und für sein reges Interesse beim Fortgang der Arbeit möchte ich Herrn Prof. GÖRTLER herzlich danken. Ebenso gebührt mein Dank der Deutschen Forschungsgemeinschaft, durch deren finanzielle Unterstützung im Rahmen eines Doktorandenstipendiums mir die Anfertigung der vorliegenden Arbeit ermöglicht wurde.

*Wie uns Herr W. WUEST nach Abschluß dieser Arbeit brieflich mitteilt, hat er vor einiger Zeit die vorliegende Fragestellung in Angriff genommen und einige Ergebnisse erzielt, diese jedoch nicht veröffentlicht.

§2. Die dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen.

Für die Betrachtung dreidimensionaler Grenzschichtströmungen ist es zweckmäßig, räumliche krummlinige Koordinaten, die im folgenden mit x, y, z bezeichnet werden mögen, zu benutzen derart, daß die umströmte Fläche F mit einer Koordinatenfläche $z = \text{const}$ zusammenfällt. x und y sind dann Gaußsche Parameter auf F , sodaß das Bogenelementquadrat auf der Fläche F unter Einführung der metrischen Fundamentalgrößen $g_{ik}^*(x, y)$ folgendermaßen lautet:

$$(2.1) \quad ds^{*2} = g_{11}^* dx^2 + 2g_{12}^* dx dy + g_{22}^* dy^2.$$

Beschränkt man sich auf solche Koordinatensysteme, bei denen die Parameterlinien auf F ein orthogonales Netz bilden, so reduziert sich das Bogenelementquadrat auf die Form

$$(2.2) \quad ds^{*2} = g_{11}^* dx^2 + g_{22}^* dy^2.$$

Weiter sei nun noch angenommen, daß die Koordinatenflächen $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ die Fläche F senkrecht schneiden. Dies zieht nicht nach sich, daß das Koordinatensystem auch außerhalb von F orthogonal ist. Bei einem räumlichen orthogonalen Koordinatensystem schneiden sich nämlich die drei Scharen von

ABB. 2. Zur Wahl des Koordinatensystems.

Koordinatenflächen $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ und $z = \text{const}$ gemäß dem bekannten Theorem von Dupin nach den Krümmungslinien. Da die Schnitte der Flächen $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ mit F gerade die Parameterlinien auf F sind, so erkennt man, daß man das Netz der Parameterlinien auf F nur dann zu einem räumlichen Orthogonalsystem fortsetzen kann, wenn diese zugleich Krümmungslinien sind.

Im Außenraum der umströmten Fläche hat somit das Bogenelementquadrat die Gestalt

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2 + 2g_{13} dx dz + 2g_{23} dy dz.$$

Auf der Fläche F selber, die durch $z = 0$ gekennzeichnet sein möge, muß sich ds^2 auf ds^{*2} reduzieren, d. h. es muß gelten:

$$g_{11}(x, y, 0) = g_{11}^*(x, y), \quad g_{22}(x, y, 0) = g_{22}^*(x, y), \quad g_{12}(x, y, 0) = 0.$$

Da die z -Linien überdies senkrecht auf F stehen sollten, so muß auch

$$g_{13}(x, y, 0) = g_{23}(x, y, 0) = 0$$

sein. Es bleibt also lediglich die Funktion $g_{33}(x, y, z)$ vollständig willkürlich.

In der Grenzschichttheorie nimmt man nun an, daß man die g_{ik} innerhalb der sehr dünnen Grenzschicht ersetzen darf durch ihre Werte auf der umströmten Fläche F . Auf Grund dieser Annahme lautet dann das Bogenelementquadrat:

$$(2.3) \quad ds^2 = g_{11}^* dx^2 + g_{22}^* dy^2 + g_{33} dz^2.$$

Innerhalb der Grenzschicht kann also insbesondere das Koordinatensystem im Rahmen der Grenzschichtvernachlässigungen als orthogonal angesehen werden.

Für das Folgende ist es noch zweckmäßig, statt der metrischen Fundamentalgroßen g_{ik} selber die Funktionen

$$(2.4) \quad g_1 = \sqrt{g_{11}^*}, \quad g_2 = \sqrt{g_{22}^*}, \quad g_3 = \sqrt{g_{33}}$$

zu verwenden. Es wird dann

$$(2.5) \quad ds^2 = g_1^2 dx^2 + g_2^2 dy^2 + g_3^2 dz^2,$$

wobei g_1 und g_2 Funktionen von x und y sind, während g_3 eine willkürliche Funktion von x, y, z ist und speziell als Funktion von x und y allein gewählt werden kann, falls dies zweckmäßig ist. Diese Willkür bei der Wahl von g_3 ermöglicht in speziellen Fällen eine gewisse Vereinfachung der Grenzschichtgleichungen. Insbesondere bieten sich bei der Betrachtung kompressibler Strömungen Vorteile (vgl. hierzu [1]), wo man g_3 so wählen wird, daß das Produkt $\rho(x, y, z) \cdot g_3(x, y, z)$ eine geeignete Funktion von x und y allein wird (ρ = Dichte). Für die folgenden Betrachtungen kann man ohne Verlust an Allgemeinheit $g_3 = 1$ wählen, sodaß z dann den senkrecht gemessenen Wandabstand angibt.

Bei Verwendung eines solchen Koordinatensystems lauten nach [1] die Grenzschichtgleichungen für den stationären inkompressiblen Fall folgendermaßen, wenn u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der krummlinigen Koordinaten x, y, z , p den Druck und $\nu = \mu/\rho$ die kinematische Zähigkeit bedeuten:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{uu_x}{g_1} + \frac{vu_y}{g_2} + wu_z + uv \frac{g_{1y}}{g_1 g_2} - v^2 \frac{g_{2x}}{g_1 g_2} &= -\frac{p_x}{\rho g_1} + \nu u_{xx} \\ \frac{uw_x}{g_1} + \frac{vw_y}{g_2} + wv_z + uv \frac{g_{2x}}{g_1 g_2} - u^2 \frac{g_{1y}}{g_1 g_2} &= -\frac{p_y}{\rho g_2} + \nu v_{xx} \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial(g_2 u)}{\partial x} + \frac{\partial(g_1 v)}{\partial y} + \frac{\partial(g_1 g_2 w)}{\partial z} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Hinzu treten die Randbedingungen

$$(2.6a) \quad \begin{aligned} u = v = w = 0 & \quad \text{für } z = 0 \\ u \rightarrow U, \quad v \rightarrow V & \quad \text{für } z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei U und V bei Komponenten der Geschwindigkeit der Außenströmung in x - bzw. y -Richtung bedeuten. (Von Anfangsbedingungen zur eindeutigen Festlegung von u und v wird im folgenden abgesehen. Stattdessen wird nach "ähnlichen" Lösungen der Gleichungen (2.6) gefragt.)

Den obigen Gleichungen liegen die folgenden Grenzschichtannahmen zugrunde:

- a) Die Normalgradienten u_z , v_z der Geschwindigkeitskomponenten u , v in der Tangentialebene der Fläche sind groß gegenüber den Tangentialgradienten dieser Geschwindigkeitskomponenten. Entsprechendes gilt für die Größenordnungen der Ableitungen von u und v .
- b) Die Normalgeschwindigkeit w ist als vernachlässigbar klein zu behandeln gegenüber den Tangentialgeschwindigkeiten, und ebenso die entsprechenden Ableitungen.
- c) w_z hingegen hat gerade dieselbe Größenordnung wie die Tangentialableitungen von u und v .
- d) In der Grenzschicht darf einfach $h(x, y, z) = h(x, y, 0)$ gesetzt werden, wenn h eine Funktion ist, die in allen Richtungen in vergleichbarer Weise variiert (z. B. die Funktionen g_{ik}).
- e) Mit dem Faktor ν behaftete Glieder werden nur dann merklich, wenn sie im Sinne der Annahme a) die höchste Größenordnung, d. h. die von u_{zz} und v_{zz} erreichen.

Betrachtet man die angegebenen Grenzschichtgleichungen (2.6), so bemerkt man, daß von den geometrischen Daten der umströmten Fläche nur die metrischen Fundamentalgrößen in die Gleichungen eingehen. Letztere beherrschen bekanntlich die Geometrie der Flächenhaut, dagegen nicht die Einbettung der Fläche in den umgebenden Raum. Bei gleicher äußerer Druckverteilung stimmen somit die zu isometrischen Flächen gehörigen Grenzschichtgleichungen vollkommen überein. Dies ist nicht weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, daß die bezüglich der g_{ik} vorgenommene Vernachlässigung eine Übertragung der metrischen Verhältnisse auf die sehr dünne, um die Fläche herum liegende Grenzschicht bedeutet, sodaß nur die innere (metrische) Geometrie der Fläche in die ganze Betrachtung eingehen kann. Die Anwendung dieses Ergebnisses auf den Fall der Umströmung eines Zylinders liefert die bekannte Aussage, daß Einflüsse der Wandkrümmung auf die Grenzschichtströmung nicht auftreten, solange die hinsichtlich der g_{ik} gemachten Voraussetzungen zutreffend sind (was z. B. nicht mehr der Fall ist, wenn der Krümmungsradius der umströmten Wand von der Größenordnung der Grenzschichtdicke ist).

§3. Definition "ähnlicher" dreidimensionaler Grenzschichten und Herleitung des zugehörigen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Faßt man eine feste Stelle (x_1, y_1) der umströmten Fläche ins Auge, so sind dort u und v Funktionen von z allein:

$$u = u(z; x_1, y_1), \quad v = v(z; x_1, y_1).$$

Diese Funktionen von z bezeichnet man auch als Geschwindigkeitsprofil der u - bzw. v -Komponente an der Stelle (x_1, y_1) .

Als "ähnliche" dreidimensionale Grenzschichten sollen nun solche Lösungen der dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen (2.6) bezeichnet werden, bei denen alle u -Geschwindigkeitsprofile unter sich und ebenso alle v -Geschwindigkeitsprofile unter sich zur Deckung gebracht werden können, wenn man u , v und z mit geeigneten, von der jeweiligen Wandstelle abhängigen Maßstabsfaktoren versieht.

Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei beliebige Stellen der umströmten Fläche, so soll also für "ähnliche" Lösungen gelten:

$$(3.1) \quad \frac{u(x_1, y_1, z/f(x_1, y_1))}{U^*(x_1, y_1)} = \frac{u(x_2, y_2, z/f(x_2, y_2))}{U^*(x_2, y_2)}$$

$$\frac{v(x_1, y_1, z/f(x_1, y_1))}{V^*(x_1, y_1)} = \frac{v(x_2, y_2, z/f(x_2, y_2))}{V^*(x_2, y_2)},$$

d. h. die Funktionen $\frac{u}{U^*}$ und $\frac{v}{V^*}$ sollen nur von $\frac{z}{f(x, y)}$ (f beliebiger dimensionsloser Maßstabsfaktor für z) bzw. von der dimensionslosen Variablen

$$\zeta = \frac{z \cdot \sqrt{\text{Re}}}{L \cdot f(x, y)} \quad \text{mit} \quad \text{Re} = \frac{U_c \cdot L}{\nu}$$

(U_c = geeignete charakteristische Geschwindigkeit, L = geeignete charakteristische Längenabmessung) abhängig sein.^{*)}

U^* und V^* sind Maßstabsfaktoren von der Dimension einer Geschwindigkeit für u und v . Sind in der Außenströmung zwei von Null verschiedene wandparallele Geschwindigkeitskomponenten vorhanden, so hat man als Maßstabsfaktor für u und v zwangsläufig die zugehörige Geschwindigkeit U bzw. V der Außenströmung zu wählen. Ist dagegen in der Außenströmung keine V -Komponente

^{*)}An dieser Stelle erkennt man übrigens, daß es nichts Neues bringen würde, wenn man $g_3 \neq 1$ zuließe. Wäre nämlich g_3 irgendeine Funktion von x und y : $g_3 = g_3(x, y)$, so würde dies nur die Einführung eines weiteren ortsabhängigen Maßstabsfaktors in der z -Richtung bedeuten. Man kann dann das Produkt $g_3 f$ als neuen Maßstabsfaktor einführen, woraus man erkennt, daß die Beschränkung auf $g_3 = 1$ keinen Verlust an Allgemeinheit bedeutet.

vorhanden, was der Verwendung von Stromlinienkoordinaten*) entspricht, so kann man für v eine beliebige Funktion von der Dimension einer Geschwindigkeit als Maßstabsfaktor wählen. Es ist also

$$(3.2) \quad U^* \equiv U \quad \text{und} \quad V^* \equiv \begin{cases} V & \text{für } V \neq 0 \\ \text{willkürlicher Maßstabsfaktor, falls } V \equiv 0. \end{cases}$$

Da "ähnliche" dreidimensionale Grenzschichten unter Benutzung der Komponenten u und v des Geschwindigkeitsvektors in Richtung der krummlinigen Koordinaten auf der umströmten Fläche definiert wurden, so ist es denkbar, daß der angegebene Begriff der Ähnlichkeit von der Wahl des Koordinatensystems abhängig ist, d. h. es könnte sein, daß für eine vorgegebene Strömung um eine gewisse Fläche bei Verwendung eines ganz bestimmten Koordinatensystems die Geschwindigkeitsprofile im angegebenen Sinne ähnlich sind, dagegen bei Wahl irgendeines anderen Koordinatensystems nicht mehr. Daß letzteres tatsächlich zutrifft, zeigt ein in §6e angegebenes Beispiel. Dort führt die Verwendung rechtwinkliger kartesischer Koordinaten auf "ähnliche" Geschwindigkeitsprofile, während man bei Verwendung von Stromlinienkoordinaten Geschwindigkeitsprofile erhält, die sicherlich nicht mehr "ähnlich" sind.

Die Bedeutung der in vorstehender Weise erklärten "ähnlichen" Geschwindigkeitsprofile liegt in folgendem Satz begründet: Sind die Profile der beiden Geschwindigkeitskomponenten u und v parallel zur umströmten Fläche "ähnlich", so kann die Aufgabe der Berechnung der Grenzschichtströmung zurückgeführt werden auf die Lösung eines Systems von zwei gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten unter gewissen Randbedingungen.

Um dies zu zeigen, seien zunächst zwei sog. Stromfunktionen ψ und φ eingeführt derart, daß die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt ist.***) Letzteres erreicht man, wenn man setzt:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} g_2 u &= \psi_x \\ g_1 v &= \varphi_x \\ g_1 g_2 w &= -(\psi_y + \varphi_y). \end{aligned}$$

*)Unter "Stromlinienkoordinaten" versteht man ein solches Koordinatennetz auf der umströmten Fläche, dessen eine Schar von Koordinatenlinien (x -Linien) mit den Stromlinien der Außenströmung zusammenfallen. Bei Verwendung eines solchen Koordinatensystems weist also die Außenströmung nur eine einzige wandparallele nicht verschwindende Geschwindigkeitskomponente (U) auf.

**)Die Einführung eines Paares von Stromfunktionen zur Vereinfachung der dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen führte erstmals F. K. MOORE in [3] für den Sonderfall rechtwinkliger kartesischer Koordinaten durch. Der nachfolgende Existenzbeweis für das Vorhandensein eines solchen Paares von Stromfunktionen unter Heranziehung eines Vektorpotentials ist eine Verallgemeinerung des von MOORE für den Sonderfall rechtwinkliger kartesischer Koordinaten durchgeführten Beweises.

Unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen, denen die Strömung genügen muß, existieren stets zwei solche Stromfunktionen. Dies kann man folgendermaßen nachweisen:

Auf Grund der Kontinuitätsgleichung hat der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ mit den Komponenten u, v, w in Richtung der krummlinigen Koordinaten verschwindende Divergenz:

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0.$$

Wie aus der Vektoranalysis bekannt ist, kann man jeden stetig differenzierbaren Vektor mit verschwindender Divergenz als Rotation eines Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ darstellen. Zu dem Vektor $\mathfrak{w}$ existiert daher stets ein Vektorpotential $\mathfrak{A}$ mit den Komponenten A_1, A_2, A_3 , das durch

$$\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

definiert ist. In Komponentenschreibweise lautet diese Beziehung:

$$\begin{aligned} g_2 u &= \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial(g_2 A_2)}{\partial z} \\ g_1 v &= \frac{\partial(g_1 A_1)}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ g_1 g_2 w &= \frac{\partial(g_2 A_2)}{\partial x} - \frac{\partial(g_1 A_1)}{\partial y} \end{aligned}$$

Für jede dreidimensionale inkompressible stationäre Strömung mit stetig differenzierbarem Geschwindigkeitsvektor existieren daher die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= -g_2 A_2 + \int_0^z \frac{\partial A_3}{\partial y} dz + h(x, y) \\ \varphi(x, y, z) &= g_1 A_1 - \int_0^z \frac{\partial A_3}{\partial x} dz + \tilde{h}(x, y). \end{aligned}$$

wobei h und $\tilde{h}$ zwei Funktionen sind, die der Bedingung $h_x + \tilde{h}_y = 0$ genügen und sonst beliebig sind. Die Funktion $A_3(x, y, z)$ sei nun als zweimal stetig differenzierbar nach x und y vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \frac{\partial A_3}{\partial y} dz = \int_0^z \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} dz = \int_0^z \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \frac{\partial A_3}{\partial x} dz.$$

Somit wird

$$\begin{aligned}\psi_z &= -\frac{\partial(g_2 A_2)}{\partial z} + \frac{\partial A_3}{\partial y} = g_2 u \\ \varphi_z &= \frac{\partial(g_1 A_1)}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = g_1 v \\ -(\psi_x + \varphi_y) &= \frac{\partial(g_2 A_2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \frac{\partial A_3}{\partial y} dz - h_x - \frac{\partial(g_1 A_1)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \frac{\partial A_3}{\partial x} dz - \tilde{h}_y \\ &= \frac{\partial(g_2 A_2)}{\partial x} - \frac{\partial(g_1 A_1)}{\partial y} = g_1 g_2 w.\end{aligned}$$

Die angegebenen Funktionen ψ und φ stellen danach tatsächlich ein Paar von Stromfunktionen dar, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Auf Grund der Willkürlichkeit der Funktionen h und $\tilde{h}$ erkennt man, daß die beiden Stromfunktionen ψ und φ nicht eindeutig festgelegt sind.

Die Durchführung der angegebenen Transformation (3.3) liefert aus den Bewegungsgleichungen das folgende System von partiellen Differentialgleichungen für ψ und φ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_1 g_2^2} (\psi_z \psi_{xz} + \varphi_z \psi_{yz} - \psi_x \psi_{zz} - \varphi_y \psi_{zz}) - \frac{g_{2x}}{g_1 g_2^3} \psi_z^2 \\ - \frac{g_{2x}}{g_1^3 g_2} \varphi_z^2 - \frac{1}{g_1 g_2^2} \left(\frac{g_{2y}}{g_2} - \frac{g_{1y}}{g_1} \right) \varphi_z \psi_z = -\frac{p_x}{\rho g_1} + \frac{\nu}{g_2} \psi_{zzz} \\ \frac{1}{g_1^2 g_2} (\psi_z \varphi_{xz} + \varphi_z \varphi_{yz} - \psi_x \varphi_{zz} - \varphi_y \varphi_{zz}) - \frac{g_{1y}}{g_1^3 g_2} \varphi_z^2 \\ - \frac{g_{1y}}{g_1 g_2^3} \psi_z^2 - \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{g_{1x}}{g_1} - \frac{g_{2x}}{g_2} \right) \varphi_z \psi_z = -\frac{p_y}{\rho g_2} + \frac{\nu}{g_1} \varphi_{zzz}.\end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w ergeben sich für die Stromfunktionen die folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\psi_z(x, y, 0) = \varphi_z(x, y, 0) = 0, \quad \psi_x(x, y, 0) + \varphi_y(x, y, 0) = 0 \\ \psi_z(x, y, z) \rightarrow g_2(x, y) \cdot U(x, y) \quad \text{für } z \rightarrow \infty. \\ \varphi_z(x, y, z) \rightarrow g_1(x, y) \cdot V(x, y)\end{aligned}$$

Die Randbedingung $\psi_x + \varphi_y = 0$ für $z = 0$, die im allgemeinen schwer zu handhaben wäre, kann man ersetzen durch die folgende:

$$\psi(x, y, 0) = \varphi(x, y, 0) = 0,$$

da stets mindestens ein Paar von Stromfunktionen existiert, das zusätzlich diese Randbedingung erfüllt. Um letzteres einzusehen, braucht man nur

$$h(x, y) = g_2(x, y) \cdot A_2(x, y, 0) \quad \text{und} \quad \tilde{h}(x, y) = -g_1(x, y) \cdot A_1(x, y, 0)$$

zu wählen. Dann verschwinden die beiden Funktionen ψ und φ für $z = 0$. Bei vorstehender Wahl von h und $\tilde{h}$ ist die Bedingung $h_x + \tilde{h}_y = 0$ erfüllt. Denn wegen $w = 0$ für $z = 0$ wird

$$\left\{ \frac{\partial(g_2 A_2)}{\partial x} - \frac{\partial(g_1 A_1)}{\partial y} \right\}_{z=0} = 0.$$

Führt man jetzt die folgende Variablentransformation durch:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, & \eta &= \frac{y}{L}, & \zeta &= \frac{z \cdot \sqrt{\text{Re}}}{L \cdot f(x, y)} \\ F(\xi, \eta, \zeta) &= \psi(x, y, z) \frac{\sqrt{\text{Re}}}{L \cdot U \cdot f \cdot g_2} \\ G(\xi, \eta, \zeta) &= \varphi(x, y, z) \frac{\sqrt{\text{Re}}}{L \cdot V^* \cdot f \cdot g_1}, \end{aligned}$$

so wird, wenn Striche Ableitungen nach ζ bedeuten:

$$\begin{aligned} \psi_z &= g_2 U F' & \psi_{zz} &= g_2 U \cdot \frac{\sqrt{\text{Re}}}{L \cdot f} \cdot F'' & \nu \cdot \psi_{zzz} &= g_2 U \frac{U_c}{L f^2} F''' \\ \psi_x &= \frac{g_2 U f}{\sqrt{\text{Re}}} F'_\xi + \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} (g_2 U f)_x \cdot F' - \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} g_2 U \zeta \frac{f_x}{f} F' \\ \psi_{xz} &= \frac{g_2 U}{L} F'_\xi + (g_2 U)_x \cdot F' - g_2 U \zeta \frac{f_x}{f} F'' \\ \psi_{xz} &= \frac{g_2 U}{L} F'_\eta + (g_2 U)_y \cdot F' - g_2 U \zeta \frac{f_y}{f} F'' \\ \varphi_z &= g_1 V^* G' & \varphi_{zz} &= g_1 V^* \frac{\sqrt{\text{Re}}}{L \cdot f} G'' & \nu \varphi_{zzz} &= g_1 V^* \frac{U_c}{L f^2} G''' \\ \varphi_{xz} &= \frac{g_1 V^*}{L} G'_\xi + (g_1 V^*)_x G' - g_1 V^* \zeta \frac{f_x}{f} G'' \\ \varphi_{xz} &= \frac{g_1 V^* f}{\sqrt{\text{Re}}} G'_\eta + \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} (g_1 V^* f)_y G' - \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} g_1 V^* \zeta \frac{f_y}{f} G' \\ \varphi_{xz} &= \frac{g_1 V^*}{L} G'_\eta + (g_1 V^*)_y G' - g_1 V^* \zeta \frac{f_y}{f} G''. \end{aligned}$$

Hiernach ist

$$F' = \frac{\psi_z}{g_2 U} = \frac{u}{U} \quad \text{und} \quad G' = \frac{\varphi_z}{g_1 V^*} = \frac{v}{V^*}.$$

Die Geschwindigkeitsprofile von u und v sind somit im angegebenen Sinne dann und nur dann ähnlich, wenn die gemäß (3.4) erklärten Funktionen F' und G' nur von ζ abhängen. Daraus folgt, daß auch F und G selber nur von ζ abhängen. Denn es gilt ganz allgemein:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^\zeta \frac{\partial F}{\partial \zeta} d\zeta + h_1(\xi, \eta) = J(\xi, \eta, \zeta) + h_1(\xi, \eta).$$

Im jetzt betrachteten Falle, wo $\partial F / \partial \zeta = F'$ nur von ζ abhängt, wird auch J eine Funktion von ζ allein, also

$$F(\xi, \eta, \zeta) = J(\zeta) + h_1(\xi, \eta), \quad J(0) = 0.$$

Auf Grund der Randbedingung $F(\xi, \eta, 0) = 0$ muß aber $h(\xi, \eta)$ identisch verschwinden, womit gezeigt ist, daß auch F selber nur von ζ abhängen kann, wenn $F' = \partial F / \partial \zeta$ eine Funktion von ζ allein ist. Eine entsprechende Schlußweise gilt für G .

Die Durchführung der angegebenen Transformation führt nun auf die folgenden Differentialgleichungen für F und G :

$$\begin{aligned} F''' + aFF'' + cGF'' + bF'G' + dF'^2 + eG'^2 + k \\ = \frac{f^2}{U_c} \left\{ \frac{U}{g_1} F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} + \frac{V^*}{g_2} G' \frac{\partial F'}{\partial \eta} - \frac{U}{g_1} F'' \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{V^*}{g_2} F'' \frac{\partial G}{\partial \eta} \right\} \\ G''' + aFG'' + cGG'' + \bar{b}F'G' + \bar{d}G'^2 + \bar{e}F'^2 + \bar{k} \\ = \frac{\bar{f}^2}{U_c} \left\{ \frac{U}{g_1} F' \frac{\partial G'}{\partial \xi} + \frac{V^*}{g_2} G' \frac{\partial G'}{\partial \eta} - \frac{U}{g_1} G'' \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{V^*}{g_2} G'' \frac{\partial G}{\partial \eta} \right\} \end{aligned}$$

Im jetzt betrachteten Fall "ähnlicher" Lösungen hängen F und G nur von ζ ab, sodaß die rechten Seiten verschwinden und man auf folgendes System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung geführt wird:

$$(3.5) \quad \boxed{\begin{aligned} F''' + aFF'' + cGF'' + bF'G' + dF'^2 + eG'^2 + k &= 0 \\ G''' + aFG'' + cGG'' + \bar{b}F'G' + \bar{d}G'^2 + \bar{e}F'^2 + \bar{k} &= 0 \end{aligned}}.$$

Randbedingungen: $F = F' = G = G' = 0$

$$(3.5a) \quad F' \rightarrow 1, \quad G' \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{falls } V \neq 0 \\ 0, & \text{falls } V \equiv 0 \end{cases} \quad \text{für } \zeta \rightarrow \infty.$$

Die Koeffizienten haben hierbei folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad a &= \frac{L}{U_c} \frac{1}{g_1 g_2} f \frac{\partial}{\partial x} (g_2 U f) & c &= \frac{L}{U_c} \frac{1}{g_1 g_2} f \frac{\partial}{\partial y} (g_1 V^* f) \\
 b &= -\frac{L}{U_c} \frac{1}{g_2} f^2 V^* \left(\frac{U_y}{U} + \frac{g_{1y}}{g_1} \right) & \bar{b} &= -\frac{L}{U_c} \frac{1}{g_1} f^2 U \left(\frac{V_x^*}{V^*} + \frac{g_{2x}}{g_2} \right) \\
 d &= -\frac{L}{U_c} \frac{1}{g_1} f^2 U_x & \bar{d} &= -\frac{L}{U_c} \frac{1}{g_2} f^2 V_y^* \\
 e &= \frac{L}{U_c} \frac{g_{2x}}{g_1 g_2} f^2 \frac{V^{*2}}{U} & \bar{e} &= \frac{L}{U_c} \frac{g_{1y}}{g_1 g_2} f^2 \frac{U^2}{V^*} \\
 k &= -\frac{L}{U_c} \frac{1}{g_1} f^2 \frac{1}{U} \frac{p_x}{\rho} & \bar{k} &= -\frac{L}{U_c} \frac{1}{g_2} f^2 \frac{1}{V^*} \frac{p_y}{\rho}.
 \end{aligned}$$

Die Komponentenschreibweise der hydrodynamischen Grundgleichung für die reibungsfreie Außenströmung

$$\frac{1}{2} \text{grad } w^2 + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = [w, \text{rot } w]$$

liefert den folgenden Zusammenhang zwischen dem Druck und den Komponenten der äußeren Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad -\frac{p_x}{\rho} &= U U_x + V V_x + \frac{V}{g_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (g_1 U) - \frac{\partial}{\partial x} (g_2 V) \right\} \\
 -\frac{p_y}{\rho} &= U U_y + V V_y - \frac{U}{g_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (g_1 U) - \frac{\partial}{\partial x} (g_2 V) \right\}
 \end{aligned}$$

Danach ist, wie man leicht nachrechnet, im Falle $V \neq 0$

$$(3.8) \quad k = -d - b - e \quad \text{und} \quad \bar{k} = -\bar{b} - \bar{d} - \bar{e}.$$

Ist insbesondere die Außenströmung wirbelfrei, so folgt aus dem Verschwinden der z -Komponente von $\text{rot } w$ die Beziehung

$$(3.9) \quad \frac{\partial}{\partial x} (g_2 V) - \frac{\partial}{\partial y} (g_1 U) = 0.$$

Zwischen den Koeffizienten b und $\bar{b}$ besteht dann der Zusammenhang

$$(3.10) \quad \bar{b} = \frac{U^2}{V^2} b.$$

Im Falle der Verwendung von Stromlinienkoordinaten wird

$$(3.11) \quad -\frac{p_x}{\rho} = U U_x \quad \text{und} \quad -\frac{p_y}{\rho} = -\frac{g_{1y}}{g_1} U^2,$$

sodaß man für k und $\bar{k}$ die Beziehungen

$$(3.12) \quad k = -d \quad \bar{k} = -\bar{e}$$

erhält.

Das Gleichungssystem für F und G kann man nunmehr auch folgendermaßen schreiben

a) im Falle des Vorhandenseins von zwei nichtverschwindenden wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten in der Außenströmung:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} F''' + aFF'' + cGF'' + b(F'G' - 1) + d(F'^2 - 1) + e(G'^2 - 1) &= 0 \\ G''' + aFG'' + cGG'' + \bar{b}(F'G' - 1) + \bar{d}(G'^2 - 1) + \bar{e}(F'^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Randbedingungen: $F = F' = G = G' = 0$ für $\zeta = 0$

$$F' \rightarrow 1, \quad G' \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

b) im Falle der Verwendung von Stromlinienkoordinaten:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} F''' + aFF'' + cGF'' + bF'G' + d(F'^2 - 1) + eG'^2 &= 0 \\ G''' + aFG'' + cGG'' + \bar{b}F'G' + \bar{d}G'^2 + \bar{e}(F'^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Randbedingungen: $F = F' = G = G' = 0$ für $\zeta = 0$

$$F' \rightarrow 1, \quad G' \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

§4. Beweis der Konstanz der Koeffizienten in den zu "ähnlichen" Lösungen gehörigen Differentialgleichungen.

Zunächst ist es denkbar, daß die Koeffizienten $a, b, c, \dots$, in den hergeleiteten Differentialgleichungen für $F(\zeta)$ und $G(\zeta)$ willkürliche Funktionen von x und y sein dürfen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Im folgenden wird vielmehr gezeigt werden, daß das betrachtete Randwertproblem höchstens dann eine Lösung besitzt, wenn die Koeffizienten konstant sind.*)

Der nachstehende Beweis stützt sich einerseits auf die an der Stelle $\zeta = 0$ geltenden Randbedingungen und andererseits auf das Studium der im Falle nichtkonstanter Koeffizienten zwischen den Funktionen von ζ unter sich und den Funktionen von x und y unter sich notwendigerweise bestehenden linearen Abhängigkeiten.

a) Als erstes sei der Fall betrachtet, daß die Koordinatenwahl auf zwei nicht identisch verschwindende wandparallele Geschwindigkeitskomponenten in der Außenströmung führt. Das Gleichungssystem für F und G möge dann in der Form

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F''' + aFF'' + cGF'' + bF'G' + dF'^2 + eG'^2 + k &= 0 \\ G''' + aFG'' + cGG'' + \bar{b}F'G' + \bar{d}G'^2 + \bar{e}F'^2 + \bar{k} &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet werden. Durch Differentiation nach ζ gewinnt man eine Reihe weiterer Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I}' \quad & F^{IV} + (a + 2d)F'F'' + (b + c)G'F'' \\ & + bF'G'' + aFF''' + cGF''' + 2eG'G'' = 0 \\ \text{II}' \quad & G^{IV} + (c + 2\bar{d})G'G'' + (a + \bar{b})F'G'' \\ & + \bar{b}G'F'' + cGG''' + aFG''' + 2\bar{e}F'F'' = 0 \\ \text{I}'' \quad & F^V + (a + 2d)F''^2 + (2b + c)F''G'' + 2eG''^2 + (2a + 2d)F'F''' \\ & + (b + 2c)G'F''' + bF'G''' + 2eG'G''' + aFF^{IV} + cGF^{IV} = 0 \\ \text{II}'' \quad & G^V + (c + 2\bar{d})G''^2 + (2\bar{b} + a)F''G'' + 2\bar{e}F''^2 + (2c + 2\bar{d})G'G''' \\ & + (2a + \bar{b})F'G''' + \bar{b}G'F''' + 2\bar{e}F'F''' + cGG^{IV} + aFG^{IV} = 0 \\ & \dots \dots \dots \text{ usw. } \dots \dots \dots \end{aligned}$$

*) Daß es auch ähnlich geartete Randwertaufgaben gibt, wo für nichtkonstante Koeffizienten eine Lösung vorhanden ist, zeigt das verwandte Problem der "ähnlichen" Lösungen der ebenen instationären Grenzschichtgleichungen. Man wird dort nach [23] auf die Differentialgleichung

$$F''' + a(FF'' - F'^2 + 1) + b\zeta F'' + cFF'' + d(1 - F') = 0$$

für die Funktion $F(\zeta)$ geführt. Die Koeffizienten a, b, c, d hängen von zwei Parametern x und t ab. Unter den Randbedingungen $F(0) = F'(\infty) = 0$, $F'(\infty) = 1$ hat die Differentialgleichung für $a = h(x, t)$, $b = -h(x, t)$, $c = 0$, $d = 1 - h(x, t)$, wobei $h(x, t)$ eine willkürliche Funktion von x und t bedeutet, die folgende, von x und t unabhängige Lösung:

$$F(\zeta) = e^{-\zeta} + \zeta - 1.$$

Allgemein möge $I^{(\nu)}$ bzw. $II^{(\nu)}$ die aus der ersten bzw. zweiten Gleichung von (4.1) durch ν -malige Differentiation entstehende Gleichung bedeuten. An der Stelle $\zeta = 0$, auf die sich der Index Null im folgenden stets beziehen soll, erhält man unter Ausnutzung der vorgegebenen Randbedingungen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} I_0 & F_0''' + k = 0 \\ II_0 & G_0''' + \bar{k} = 0 \\ I_0' & F_0^{IV} = 0 \\ II_0' & G_0^{IV} = 0 \\ I_0'' & F_0^V + (a + 2d)F_0'''^2 + (2b + c)F_0''G_0'' + 2eG_0''^2 = 0 \\ II_0'' & G_0^V + (c + 2\bar{d})G_0'''^2 + (2\bar{b} + a)F_0''G_0'' + 2\bar{e}F_0''^2 = 0 \\ & \dots\dots\dots \text{ usw. } \dots\dots\dots \end{array}$$

Aus I_0 und II_0 erkennt man unmittelbar, daß

$$k = -(b + d + e) \quad \text{und} \quad \bar{k} = -(\bar{b} + \bar{d} + \bar{e})$$

konstant sein müssen.

Es sei nun $F_0'' \neq 0$, $F_0''' \neq 0$, $F_0^V \neq 0$ vorausgesetzt. Dann lassen sich, wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{G_0''}{F_0''} = A, \quad \frac{G_0'''}{F_0'''} = B, \quad \frac{G_0^V}{F_0^V} = C$$

setzt, folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{lll} f_1 = I_0'/F_0''^2 & a + 2Ab + Ac + 2d + 2A^2e & = C_1 \\ f_2 = II_0'/F_0''^2 & Aa + A^2c + 2A\bar{b} + 2A^2\bar{d} + 2\bar{e} & = C_2 \\ f_3 = I_0'''/F_0''F_0''' & 4a + (3A + 3B)b + (3A + B)c + 6d + 6ABe & = C_3 \\ f_4 = II_0'''/F_0''F_0''' & (3B + A)a + 4ABc + (3A + 3B)\bar{b} + 6AB\bar{d} + 6\bar{e} & = C_4 \\ f_5 = I_0/F_0'''^2 & 4a + 6Bb + 4Bc + 6d + 6B^2e & = C_5 \\ f_6 = II_0/F_0'''^2 & 4Ba + 4B^2c + 6B\bar{b} + 6B^2\bar{d} + 6\bar{e} & = C_6 \\ f_7 = I_0/F_0''F_0 & 11a + (5A + 5C)b + (10A + C)c + 10d + 10ACe & = C_7 \\ f_8 = II_0/F_0''F_0 & (A + 10C)a + 11ACc + (5A + 5C)\bar{b} + 10AC\bar{d} + 10\bar{e} & = C_8 \\ f_9 = f_3 - f_5 & 3(A - B) \cdot (b + c + 2Bc) & = C_9 \\ f_{10} = f_4 - f_6 & (A - B) \cdot (a + 4Bc + 3\bar{b} + 6B\bar{d}) & = C_{10} \\ f_{11} = 3f_1 - 2f_3 + f_5 - a + (2B - 3A)c + 6(A - B)^2e & & = C_{11} \\ f_{12} = 3f_2 - 2f_4 + f_6 (A - 2B)a + 4(A - B)^2 - A^2c + 6(A - B)^2\bar{d} & & = C_{12} \end{array}$$

Die Gleichungen $f_1, f_2, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}$ stellen ein System dar zur Berechnung der acht Unbekannten $a, b, c, d, e, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}$. Ist die Systemdeterminante $\Delta \neq 0$, so ist eindeutige Auflösbarkeit gewährleistet. Aus den Auflösungsformeln ist dann unmittelbar die Konstanz der Koeffizienten $a, b, c, \dots$, zu ersehen. Es bleibt daher nur noch der Fall zu betrachten, daß Δ verschwindet. Da

$$\Delta = 3(A-B)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2A & A & 2 & 2A^2 & 0 & 0 \\ A & 0 & A^2 & 0 & 0 & 2A^2 & 2 \\ 11 & 5A+5C & 10A+C & 10 & 10AC & 0 & 0 \\ 10C+A & 0 & 11AC & 0 & 0 & 10AC & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2B & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4B & 0 & 0 & 6B & 0 \\ -1 & 0 & 2B-3A & 0 & 6(A-B)^2 & 0 & 0 \\ A-2B & 0 & 4(A-B)^2-A^2 & 0 & 0 & 6(A-B)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4320(A-B)^6(A-C)^2,$$

so ist Δ dann und nur dann gleich Null, wenn $A = B$ oder $A = C$ ist. Aus $f_3 - 3f_1$ bzw. aus $f_7 - 5f_1$ folgt dann die Richtigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} a + Ac &= \text{const} = C_{21} \\ (4.2) \quad d + Ab + A^2e &= \text{const} = C_{22} \\ \bar{e} + A\bar{b} + A^2\bar{d} &= \text{const} = C_{23}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (4.1) kann man dann auch so schreiben:

$$\begin{aligned} (4.3) \quad cF''(G - AF) + bF'(G' - AF') + e(G' + AF')(G' - AF') &= H_1 \\ cG''(G - AF) + \bar{b}F'(G' - AF') + \bar{d}(G' + AF')(G' - AF') &= H_2, \end{aligned}$$

wobei $H_1 = -(F''' + k + C_{21}FF'' + C_{22}F'^2)$

und $H_2 = -(G''' + \bar{k} + C_{21}FG'' + C_{23}F'^2)$

reine Funktionen von ζ sind.

Es sei nun $F' \equiv \alpha G'$ (α Konstante) vorausgesetzt. Da dann die auf der linken Seite der obigen Gleichungen stehenden Funktionen von ζ nicht alle zueinander proportional sein können, so muß sowohl zwischen den Funktionen von x und

y , als auch zwischen den Funktionen von ζ eine lineare Abhängigkeit bestehen:*)

$$c = \lambda_1 b + \lambda_2 e \quad F''(G - AF) = \{\mu_1 F' + \mu_2(G' + AF')\} \cdot (G' - AF')$$

$$c = \bar{\lambda}_1 \bar{b} + \bar{\lambda}_2 \bar{d} \quad G''(G - AF) = \{\bar{\mu}_1 F' + \bar{\mu}_2(G' + AF')\} \cdot (G' - AF')$$

Außer $G \equiv AF$ hat dieses Gleichungssystem keine Lösungen, die den Randbedingungen genügen. Setzt man nämlich $G - AF = D$, so erhält man das folgende Gleichungssystem für F und D :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} DF'' &= \alpha F' D' + \beta D'^2 \\ DD'' + ADF'' &= \bar{\alpha} F' D' + \bar{\beta} D'^2 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} F'(0) &= 0, & F''(0) &= F''_0 \neq 0, & F'''(0) &= F'''_0 \neq 0, & F'(\infty) &= 1, \\ D(0) &= D'(0) = D''(0) = D'''(0) = D^{IV}(0) = 0, & D'(\infty) &= 1 - A. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung von (4.3) mit A und subtrahiert sie von der zweiten, so gewinnt man die Gleichung

$$DD'' = \gamma F' D' + \delta D'^2 \quad (\gamma, \delta \text{ Konstante}),$$

welche außer $D \equiv 0$ keine Lösung mit $D''(0) = 0$ besitzt, falls $\gamma \neq 0$ ist. Ist $\gamma = 0$, so muß D der Differentialgleichung

$$DD'' = \delta \cdot D'^2$$

genügen. Diese hat die Lösungen

$$D = \begin{cases} |C_0 + C_1 \zeta|^{1/(1-\delta)} & \text{für } \delta \neq 1 \\ C_0 e^{C_1 \zeta} & \text{für } \delta = 1, \end{cases}$$

von denen keine den Randbedingungen $D'(0) = 0$, $D'(\infty) = 1 - A$ genügt.

Da also die angegebenen linearen Beziehungen nicht alle bestehen können, so müssen c , b , e , $\bar{b}$, $\bar{d}$ konstant sein. Auf Grund der Beziehungen (4.2) ergibt sich dann die Konstanz der übrigen Koeffizienten.

Es bleibt nun nur noch der Fall $F \equiv \alpha_1 G + \beta_1$ (α_1, β_1 Konstante) zu betrachten. Wegen $G''_0 = AF''_0$ muß dann $\alpha_1 = A$ sein, und wegen $F'(\infty) = G'(\infty) = 1$ erhält man $A = 1$. Die erste Differentialgleichung von (4.1) lautet somit in diesem Fall:

$$F''' + C_{21} F F'' + C_{22} (F'^2 - 1) = 0.$$

*)Es gilt nämlich, wie man sich leicht überlegt, der folgende Hilfssatz: Sind in der Relation

$$\sum_{\nu=1}^3 a_\nu(x, y) \cdot A_\nu(\zeta) = H(\zeta)$$

die Funktionen A_1, A_2, A_3 und H nicht alle zueinander proportional und $\neq 0$, so kann die Relation nur dann bestehen, wenn die a_ν einerseits und die A_ν andererseits linear abhängig sind, es sei denn, die a_ν sind konstant.

Die hierin auftretenden Koeffizienten

$$C_{21} = a + c \quad \text{und} \quad C_{22} = b + d + e = \bar{b} + \bar{d} + \bar{e}$$

sind aber bereits als konstant nachgewiesen worden.

Bisher war $F_0'' \neq 0$, $F_0''' \neq 0$, $F_0^V \neq 0$ vorausgesetzt. Die Behandlung der Fälle, daß gewisse der Werte F_0'' , F_0''' , F_0^V verschwinden, läßt sich in ähnlicher Weise durchführen mit dem gleichen Ergebnis, daß auch in diesen bisher ausgeschlossenen Sonderfällen die Koeffizienten der Differentialgleichungen (4.1) konstant sein müssen. Da sich bei der Beweisführung keinerlei neue Gesichtspunkte ergeben, sei diese hier übergangen.

b) Im Falle der Verwendung von Stromlinienkoordinaten lautete das System von Differentialgleichungen für F und G :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \text{I)} \quad & F''' + aFF'' + cGF'' + bF'G' + d(F'^2 - 1) + eG'^2 = 0 \\ \text{II)} \quad & G''' + aFG'' + cGG'' + \bar{b}F'G' + \bar{d}G'^2 + \bar{e}(F'^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad F(0) = F'(0) = G(0) = G'(0) = 0$$

$$F' \rightarrow 1, \quad G' \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Aus I₀ und II₀ ist jetzt unmittelbar die Konstanz von d und $\bar{e}$ zu ersehen. Wie unter a) ergibt sich auch jetzt aus der Betrachtung der Differentialgleichungen und ihrer Ableitungen an der Stelle $\zeta = 0$ die Konstanz der Koeffizienten, falls $A \neq B$ und $A \neq C$ ist. Für $A = B$ oder $A = C$ erhält man jetzt aus den Gleichungen $f_3 - 3f_1$ bzw. $f_7 - 5f_1$ unter Berücksichtigung der Konstanz von d und $\bar{e}$ die Beziehungen

$$(4.6) \quad \begin{aligned} a + Ac &= \text{const} = C_{21} \\ b + Ae &= \text{const} = \bar{C}_{22} \\ \bar{b} + A\bar{d} &= \text{const} = \bar{C}_{23}. \end{aligned}$$

Dabei gelten die beiden letzten Gleichungen nur für $A \neq 0$. Bildet man unter Ausnutzung dieses Ergebnisses den Ausdruck

$$\tilde{D} = \frac{G''}{G'} \cdot \text{I} - \frac{F''}{G'} \cdot \text{II},$$

so erhält man die Gleichung

$$eG''(G' - AF') - \bar{d}F''(G' - AF') = \tilde{H}(\zeta),$$

oder, da wegen der Randbedingungen sicherlich $G' \neq AF'$ ist:

$$eG'' - \bar{d}F'' = \frac{\tilde{H}(\zeta)}{G' - AF'} = H^*(\zeta) = \text{reine Funktion von } \zeta.$$

Eine solche Beziehung kann aber bei nichtkonstantem e und $\bar{d}$ nur bestehen, wenn $G'' \equiv \alpha F''$ ist, was auf $G' \equiv \tilde{\alpha}F' + \tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ Konstante) führt. Letztere

Identität kann wegen der Randbedingungen jedoch nicht gelten. Es müssen somit e und $\bar{d}$ konstant sein. Damit sind auch b und $\bar{b}$ konstant. Die erste Gleichung von (4.5) nimmt nunmehr folgende Form an, wenn man alle nur von ζ abhängigen Glieder auf die rechte Seite bringt und noch durch F'' dividiert, was wegen $F'' \neq 0$ erlaubt ist:

$$aF + cG = H^{**}(\zeta) = \text{reine Funktion von } \zeta.$$

Da F und G nicht proportional sein können, so müssen hiernach auch a und c konstant sein.

Ist $A = 0$, so folgt zunächst aus $a + Ac = C_{21}$ die Konstanz von a . Die Konstanz von $\bar{b}$ ergibt sich auf Grund der Gleichung $D'_0/F_0'^2$:

$$Ab + A^2e - \bar{b} - A\bar{d} = C_1^*.$$

Damit kann man die zweite Gleichung von (4.5) folgendermaßen schreiben:

$$cGG'' + \bar{d}G'^2 = \text{reine Funktion von } \zeta.$$

Diese Beziehung kann aber bei nichtkonstantem c und $\bar{d}$ höchstens dann bestehen, wenn GG'' und G'^2 proportional sind:

$$GG'' = \lambda G'^2.$$

Wie bereits angegeben, besitzt diese Differentialgleichung außer $G \equiv 0$ keine Lösung, welche die Randbedingungen $G'(0) = G'(\infty) = 0$ erfüllt, womit c und $\bar{d}$ notwendigerweise konstant sein müssen. Unter der Voraussetzung $G' \neq 0$ kann man nunmehr die erste Gleichung von (4.5) auf die Gestalt

$$bF' + eG' = \text{reine Funktion von } \zeta$$

bringen. Wegen $F' \neq \alpha G'$ ist hieraus unmittelbar zu ersehen, daß auch b und e konstant sein müssen.

Bisher war $G \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $G \equiv 0$, so lautet die erste Gleichung von (4.5):

$$F''' + aFF'' + d(F'^2 - 1) = 0.$$

Wegen $d = \text{const}$ und $F'' \neq 0$ folgt hieraus sofort die Konstanz von a .

Die Diskussion der Fälle, daß gewisse der Werte F''_0 , F'''_0 , F^V_0 verschwinden, sei hier ebenfalls übergangen.

§5. *Auflösung des Systems von Bedingungsgleichungen (3.6)
für die Funktionen U, V^*, g_1, g_2, f .*

Die im vorigen Abschnitt bewiesene Konstanz der Koeffizienten $a, b, c, \dots$, bedeutet, daß die für diese Koeffizienten angegebenen Definitionsgleichungen (3.6) ein System von partiellen Differentialgleichungen darstellen, denen die Funktionen

$$U(x, y), \quad V^*(x, y), \quad g_1(x, y), \quad g_2(x, y), \quad f(x, y)$$

genügen müssen, falls "ähnliche" Lösungen auftreten sollen. Mit der Auflösung dieses Gleichungssystems befaßt sich der folgende Abschnitt.

Zunächst sei folgende Bemerkung vorangeschickt: Wie bereits in §3 bemerkt wurde, ist der Begriff der "Ähnlichkeit" von der Wahl des Koordinatensystems auf der umströmten Fläche abhängig. Eine Koordinatentransformation, die lediglich eine Umskalierung der Parameterlinien $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ bewirkt, also eine Transformation der Gestalt

$$(5.1) \quad x^* = \tau_1(x), \quad y^* = \tau_2(y),$$

läßt jedoch eine eventuell vorhandene "Ähnlichkeit" der Geschwindigkeitsprofile unberührt, da ja die Komponentenzerlegung des Geschwindigkeitsvektors ungeändert bleibt. Diese Tatsache wird im folgenden ausgenützt.

a) *Auflösung des Systems (3.6) für den Sonderfall rechtwinkliger kartesischer Koordinaten.*

Die Auflösung des Systems von Bedingungsgleichungen (3.6) stößt im allgemeinen Falle auf große Schwierigkeiten. Im folgenden soll daher zunächst die Auflösung für den Sonderfall

$$g_1 = g_2 = 1$$

(rechtwinklige kartesische Koordinaten) durchgeführt werden. Mit $\xi = x/L$, $\eta = y/L$, $\bar{U} = U/U_c$, $\bar{V} = V^*/U_c$ lautet dann das Gleichungssystem (3.6):

$$(5.2.1) \quad a = f \cdot (\bar{U}f)_\xi \quad (5.2.4) \quad c = f \cdot (\bar{V}f)_\eta$$

$$(5.2.2) \quad b = -f^2 \cdot \frac{\bar{V}}{\bar{U}} \cdot \bar{U}_\eta \quad (5.2.5) \quad \bar{b} = -f^2 \cdot \frac{\bar{U}}{\bar{V}} \cdot \bar{V}_\xi$$

$$(5.2.3) \quad d = -f^2 \cdot \bar{U}_\xi \quad (5.2.6) \quad \bar{d} = -f^2 \cdot \bar{V}_\eta$$

$$e = 0 \quad \bar{e} = 0.$$

Da man die Gleichungen (5.2.1) und (5.2.4) auch folgendermaßen schreiben kann:

$$a = -d + \frac{1}{2} \bar{U}(f^2)_\xi \quad c = -\bar{d} + \frac{1}{2} \bar{V}(f^2)_\eta,$$

so ergibt sich zunächst:

$$(2a + d) = (\overline{U}f^2)_\xi \quad (2c + \bar{d}) = (\overline{V}f^2),$$

also

$$\overline{U}f^2 = \alpha\xi + h_1(\eta) \quad \overline{V}f^2 = \gamma\eta + h_2(\xi),$$

wobei $\alpha = 2a + d$ und $\gamma = 2c + \bar{d}$ Konstante und h_1 und h_2 willkürliche Funktionen von η bzw. ξ sind. Die Auflösung der beiden obigen Gleichungen nach f^2 ergibt:

$$f^2 = \frac{\alpha\xi + h_1(\eta)}{\overline{U}} = \frac{\gamma\eta + h_2(\xi)}{\overline{V}},$$

d. h. zwischen $\overline{U}$ und $\overline{V}$ besteht der Zusammenhang

$$(5.3) \quad \overline{V} = \frac{\gamma\eta + h_2(\xi)}{\alpha\xi + h_1(\eta)} \overline{U}.$$

Es sei nun $b \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$ vorausgesetzt. Aus

$$\lambda_1 = d/\bar{b} = \frac{\overline{U}_\xi}{\overline{U}} \cdot \frac{\overline{V}}{\overline{V}_\xi}$$

folgt dann:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln |\overline{U}| = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln |\overline{V}|,$$

also

$$\ln |\overline{U}| = \ln |\overline{V}|^{\lambda_1} + \ln |H_1(\eta)|.$$

Ebenso ergibt sich aus

$$\frac{1}{\lambda_2} = \bar{d}/b = \frac{\overline{V}_\eta}{\overline{V}} \cdot \frac{\overline{U}}{\overline{U}_\eta}$$

die Beziehung

$$\ln |\overline{U}| = \ln |\overline{V}|^{\lambda_2} + \ln |H_2(\xi)|.$$

Es wird somit

$$\ln |\overline{V}|^{\lambda_1} - \ln |\overline{V}|^{\lambda_2} = \ln |H_2(\xi)| - \ln |H_1(\eta)|$$

und, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \{H_2(\xi)\}^{1/\lambda_1 - \lambda_2} \{H_1(\eta)\}^{1/\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \overline{U} &= H_2 \cdot \overline{V}^{\lambda_2} = \{H_2(\xi)\}^{\lambda_1/\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \{H_1(\eta)\}^{\lambda_2/\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

Trägt man dieses Ergebnis in Gleichung (5.3) ein, so erhält man:

$$\{H_2(\xi)\}^{(1-\lambda_1)/(\lambda_1-\lambda_2)} \cdot \{H_1(\eta)\}^{(\lambda_2-1)/(\lambda_1-\lambda_2)} = \{\alpha\xi + h_1(\eta)\}^{-1} \cdot \{\gamma\eta + h_2(\xi)\}.$$

Ist $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$, so ist diese Beziehung sicher erfüllt für $h_2(\xi) = \text{const} = \delta$, $h_1(\eta) = \text{const} = \beta$. Dann wird

$$H_2(\xi) = (\alpha\xi + \beta)^{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 - 1)}, \quad H_1(\eta) = (\gamma\eta + \delta)^{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_2 - 1)},$$

womit man unter Einführung neuer Konstanten folgende Lösung des Systems (5.2) erhält:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \bar{U} &= A(\xi - \xi_0)^m \cdot (\eta - \eta_0)^n & \bar{V} &= B(\xi - \xi_0)^{m-1}(\eta - \eta_0)^{n+1} \\ f^2 &= (\xi - \xi_0)^{1-m} \cdot (\eta - \eta_0)^{-n}. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten $a, b, c, \dots$, ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{2} \cdot (m+1) & c &= \frac{B}{2} \cdot (n+2) \\ b &= Bn & v &= A \cdot (m-1) \\ d &= -Am & \bar{d} &= -B \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Der Fall $\alpha \neq 0, \gamma = 0$ führt auf $h_1(\eta) = 0, H_1(\eta) = \text{const}$, woraus $\bar{U} = \bar{U}(\eta)$ und somit $b = 0$ folgt im Gegensatz zur Voraussetzung $b \neq 0$. Ebenso ist der Fall $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ nicht verträglich mit der Voraussetzung $\bar{b} \neq 0$.

Ist $\alpha = 0, \gamma = 0$, so erhält man:

$$f^2 \bar{U} = h_1(\eta), \quad f^2 \bar{V} = h_2(\xi).$$

Die Gleichung (5.2.2) bzw. (5.2.5) liefert dann:

$$-\frac{b}{h_2(\xi)} = \frac{\bar{U}_\eta}{\bar{U}} = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |\bar{U}| \quad -\frac{\bar{b}}{h_1(\eta)} = \frac{\bar{V}_\xi}{\bar{V}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln |\bar{V}|.$$

Somit ist

$$\bar{U} = e^{-b\eta/h_2(\xi) + h_{**}(\xi)}, \quad \bar{V} = e^{-\bar{b}\xi/h_1(\eta) + h_{**}(\eta)}$$

und

$$\frac{\bar{U}}{\bar{V}} = e^{-b\eta/h_2(\xi)} \cdot e^{-\bar{b}\xi/h_1(\eta)} \cdot e^{h_2(\xi) - h_1(\eta)} = h_1(\eta) \cdot h_2^{-1}(\xi)$$

Diese Beziehung ist erfüllt für $h_1(\eta) = \text{const}, h_2(\xi) = \text{const}$. Daraus folgt $\bar{V} = k\bar{U}$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$ steht.

Der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ führt auf

$$\ln |H_1(\eta)| = \ln |H_2(\xi)| = \text{const} = A.$$

Danach wird

$$\bar{U} = A \bar{V}^{\lambda_1} = A \left\{ \frac{\gamma\eta + h_2(\xi)}{\alpha\xi + h_1(\eta)} \right\}^{\lambda_1} \bar{U}^{\lambda_1}$$

und, falls $\lambda_1 \neq 1$:

$$\bar{U} = A^{1/1-\lambda_1} \left\{ \frac{\gamma\eta + h_2(\xi)}{\alpha\xi + h_1(\eta)} \right\}^{\lambda_1/1-\lambda_1}.$$

Unter Verwendung dieses Ergebnisses führt die Betrachtung der Beziehung $d/\bar{d} = \text{const}$ (mit b ist im jetzt betrachteten Fall auch $\bar{d} \neq 0$) auf $h_1(\eta) = \text{const}$, $h_2(\xi) = \text{const}$, womit sich die nachstehende Lösung von (5.2) ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= A \left\{ \frac{\gamma\eta + \delta}{\alpha\xi + \beta} \right\}^m & \bar{V} &= B \left\{ \frac{\gamma\eta + \delta}{\alpha\xi + \beta} \right\}^{m+1} \\ f^2 &= \frac{(\alpha\xi + \beta)^{m+1}}{(\gamma\eta + \delta)^m}. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist bereits in der Lösung (5.4) enthalten.

Als nächstes soll nun der Fall $b \neq 0$, $\bar{b} = 0$ betrachtet werden. Aus $\bar{b} = 0$ folgt $\bar{V}_\xi = 0$, also $\bar{V} = \bar{V}(\eta)$, was wegen (5.2.6) auch $f^2 = f^2(\eta)$ nach sich zieht. Es muß somit $h_2(\xi) = \text{const}$ sein, d. h. es ist

$$\bar{V}f^2 = (2c + \bar{d})(\eta - \eta_0).$$

Trägt man dieses Ergebnis in (5.2.6) ein, so erhält man:

$$\bar{V} = \bar{A} \cdot (\eta - \eta_0)^\alpha,$$

falls $(2c + \bar{d}) \neq 0$ ist. Gleichung (5.2.2) liefert dann weiter:

$$b = -(2c + \bar{d}) \cdot (\eta - \eta_0) \frac{\bar{U}}{\bar{V}^\eta},$$

woraus

$$\bar{U} = B(\xi) \cdot (\eta - \eta_0)^\beta$$

und

$$d = -(2c + \bar{d}) \frac{1}{A} (\eta - \eta_0)^{1-\alpha+\beta} \cdot B'(\xi)$$

folgt. Diese Beziehung kann mit konstantem d aber nur bestehen, wenn

$$B(\xi) = \text{const}$$

oder

$$B'(\xi) = \text{const}, \quad \text{also} \quad B(\xi) = \tilde{D}(\xi - \xi_0) \quad \text{und} \quad \beta = \alpha - 1$$

ist. Unter Einführung neuer Konstanten gewinnt man so die folgenden Lösungen von (5.2):

$$(5.5) \quad \bar{U} = A(\eta - \eta_0)^m \quad \bar{V} = B(\eta - \eta_0)^n \quad f^2 = (\eta - \eta_0)^{1-n}.$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a &= 0 & c &= \frac{B}{2} \cdot (n+1) \\ b &= -mB & \bar{b} &= 0 \\ d &= 0 & \bar{d} &= -nB. \end{aligned}$$

$$\overline{U} = (A\xi + D)(\eta - \eta_0)^m \quad \overline{V} = B(\eta - \eta_0)^{m+1} \quad f^2 = (\eta - \eta_0)^{-m}$$

Diese letztere Lösung ist bereits in (5.4) enthalten.

Für $(2c + \bar{d}) = 0$ erhält man ganz entsprechend die folgenden Lösungen:

$$(5.6) \quad \overline{U} = A \cdot e^{\alpha\eta} \quad \overline{V} = B \cdot e^{\beta\eta} \quad f^2 = e^{-\beta\eta}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a &= 0 & c &= \frac{1}{2} \cdot B\beta \\ b &= -B\alpha & \bar{b} &= 0 \\ d &= 0 & \bar{d} &= -B\beta \end{aligned}$$

$$(5.7) \quad \overline{U} = (A\xi + D) \cdot e^{\alpha\eta} \quad \overline{V} = B \cdot e^{\alpha\eta} \quad f^2 = e^{-\alpha\eta}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a &= A & c &= \frac{1}{2} \cdot B\alpha \\ b &= -B\alpha & \bar{b} &= 0 \\ d &= -A & \bar{d} &= -B\alpha \end{aligned}$$

Ist $b = 0$, $\bar{b} \neq 0$, so ergeben sich ganz analog die folgenden Lösungen:

$$(5.8) \quad \overline{U} = A(\xi - \xi_0)^m \quad \overline{V} = B(\xi - \xi_0)^n \quad f^2 = (\xi - \xi_0)^{1-m}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{2} (m+1) & c &= 0 \\ b &= 0 & \bar{b} &= -nA \\ d &= -mA & \bar{d} &= 0 \end{aligned}$$

$$(5.9) \quad \overline{U} = A \cdot e^{\alpha\xi} \quad \overline{V} = B \cdot e^{\beta\xi} \quad f^2 = e^{-\alpha\xi}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}A\alpha & c &= 0 \\ b &= 0 & \bar{b} &= -A\beta \\ d &= -A\alpha & \bar{d} &= 0 \end{aligned}$$

$$(5.10) \quad \bar{U} = A \cdot e^{\alpha \xi} \quad \bar{V} = (B\eta + D) \cdot e^{\alpha \xi} \quad f^2 = e^{-\alpha \xi}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}A\alpha & c &= B \\ b &= 0 & \bar{b} &= -A\alpha \\ d &= -A\alpha & \bar{d} &= -B. \end{aligned}$$

Als letztes ist nun noch der Fall zu betrachten, daß b und $\bar{b}$ beide verschwinden. Aus Gleichung (5.2.2) bzw. (5.2.5) folgt dann unmittelbar:

$$\bar{U} = \bar{U}(\xi), \quad \bar{V} = \bar{V}(\eta).$$

Gleichung (5.2.3) bzw. (5.2.6) liefert dann, falls $d \neq 0$, $\bar{d} \neq 0$:

$$f^2 = f^2(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f^2 = f^2(\eta),$$

d. h. es kann nur $f^2 = \text{const}$ sein, womit man die Lösung

$$\bar{U} = A\xi + B \quad \bar{V} = C\eta + D \quad f^2 = 1$$

erhält, die bereits in (5.4) enthalten ist. Verschwindet d oder $\bar{d}$ oder d und $\bar{d}$, so erhält man Lösungen, die bereits in (5.5), (5.6), (5.8) oder (5.9) enthalten sind.

b) *Auflösung des Systems (3.6) unter Benutzung der Beziehung (5.11).*

Im folgenden soll nun noch unter Zulassung eines beliebigen orthogonalen Koordinatensystems die Auflösung des Systems (3.6) für den Fall durchgeführt werden, daß zwischen U und V^* der Zusammenhang

$$(5.11) \quad (g_1 U)_y - (g_2 V^*)_x = 0$$

besteht. Sind in der Außenströmung zwei von Null verschiedene wandparallele Geschwindigkeitskomponenten vorhanden, so fällt (5.11) mit (3.9) zusammen, d. h. (5.11) bedeutet dann insbesondere die Wirbelfreiheit der Außenströmung.

Gilt (5.11), so hängen b und $\bar{b}$ folgendermaßen zusammen:

$$(5.12) \quad \bar{b} = \frac{\bar{U}^2}{V^2} b.$$

Auf Grund der bewiesenen Konstanz der Koeffizienten erkennt man hieraus unmittelbar, daß der Quotient $\bar{U}/V$ höchstens dann von einer Konstanten verschieden ist, wenn $b = \bar{b} = 0$ ist. Dieser Fall sei zunächst betrachtet.

Aus $b = \bar{b} = 0$ folgt:

$$\frac{\bar{U}_\eta}{U} + \frac{g_{1\eta}}{g_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\bar{V}_\xi}{V} + \frac{g_{2\xi}}{g_2} = 0,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln |\bar{U}g_1| = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \ln |\bar{V}g_2| = 0,$$

d. h. $\bar{U}g_1$ ist eine reine Funktion von ξ , $\bar{V}g_2$ eine reine Funktion von η , mithin

$$g_1 = \frac{H(\xi)}{\bar{U}}, \quad g_2 = \frac{H^*(\eta)}{\bar{V}}.$$

Gemäß den zu Anfang des Abschnitts gemachten Bemerkungen bedeutet es keinen Verlust an Allgemeinheit, sich auf $H(\xi) = H^*(\eta) = 1$ zu beschränken, da dieser Fall stets durch eine Transformation der Gestalt (5.1) erreicht werden kann. Das System (3.6) lautet somit im jetzt betrachteten Fall:

$$\begin{aligned} a &= \bar{U} \cdot \bar{V} \cdot f \cdot \left(\frac{\bar{U}}{\bar{V}} \cdot f \right)_\xi & c &= \bar{U} \cdot \bar{V} \cdot f \cdot \left(\frac{\bar{V}}{\bar{U}} \cdot f \right)_\eta \\ &= -d + \frac{\bar{U}^2}{\bar{V}^2} \cdot e + \frac{\bar{U}^2}{2} \cdot (f^2)_\xi & &= -\bar{d} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{U}^2} \cdot \bar{e} + \frac{\bar{V}^2}{2} \cdot (f^2)_\eta \\ 5.13) \quad b &= 0 & \bar{b} &= 0 \\ d &= -\frac{1}{2} \cdot f^2(\bar{U}^2)_\xi & \bar{d} &= -\frac{1}{2} \cdot f^2(\bar{V}^2)_\eta \\ e &= -\frac{1}{2} \cdot f^2(\bar{V}^2)_\xi & \bar{e} &= -\frac{1}{2} \cdot f^2(\bar{U}^2)_\eta \end{aligned}$$

Im einzelnen erhält man, wie hier ohne genaue Durchrechnung angegeben werden möge, außer gewissen, bereits im Abschnitt a) aufgeführten Lösungen noch nachstehende Lösungen dieses Gleichungssystems (unter der Voraussetzung, daß alle im folgenden angegebenen Ausdrücke existieren):

$$\begin{aligned} \bar{U}^2 &= A\xi + B\eta + C & \bar{V}^2 &= k\bar{U}^2 \text{ *)} \\ 5.14) \quad f^2 &= 1 & g_1 &= \frac{1}{\bar{U}} & g_2 &= \frac{1}{\bar{V}} \end{aligned}$$

*)In §56 bedeutet k eine willkürliche Konstante, die nichts mit dem in (3.6) auftretenden Koeffizienten k zu tun hat.

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= 0 & c &= 0 \\
 d &= -A & \bar{d} &= -kB \\
 e &= -kA & \bar{e} &= -B.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U} &= 1 & \bar{V} &= \frac{A}{\sqrt{1 - \varphi_1}} \\
 (5.15) \quad f^2 &= 2\varphi_1 & g_1 &= 1 & g_2 &= \frac{\sqrt{1 - \varphi_1'}}{A},
 \end{aligned}$$

wobei $\varphi_1 = \varphi_1(\xi)$ eine von $(\xi + \text{const})$ verschiedene Lösung der Differentialgleichung $\varphi_1 \varphi_1'' + (\varphi_1' - 1)^2 = 0$ sein soll.

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 & c &= 0 \\
 d &= 0 & \bar{d} &= 0 \\
 e &= A^2 & \bar{e} &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U} &= \varphi_2(\xi) & \bar{V} &= B\sqrt{\bar{U}^2 + A} \\
 (5.16) \quad f^2 &= -\frac{1}{\varphi_2'(\xi)} & g_1 &= 1 & g_2 &= \frac{1}{B\sqrt{\bar{U}^2 + A}},
 \end{aligned}$$

wobei $\varphi_2 = \varphi_2(\xi)$ eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$(\varphi_2^2 + A)\varphi_2'' + (\tfrac{1}{2}\varphi_2^3 - C\varphi_2^2 + \tfrac{1}{2}A\varphi_2 - AC)\varphi_2'^2 = 0$$

sein soll.

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= C & c &= 0 \\
 d &= 1 & \bar{d} &= 0 \\
 e &= B & \bar{e} &= 0
 \end{aligned}$$

Neben $b = \bar{b} = 0$ bleibt nun noch der Fall zu betrachten, daß $\bar{U}$ und $\bar{V}$ zueinander proportional sind:

$$\bar{V} = k \cdot \bar{U}.$$

Das System (3.6) lautet dann:

$$\begin{aligned}
 (5.17) \quad a &= -d + \frac{e}{k^2} + \frac{\bar{U}}{2g_1} (f^2)_\xi & c &= -\bar{d} + k^2 \bar{e} + \frac{k\bar{U}}{2g_2} (f^2)_\eta \\
 d &= -\frac{1}{g_1} f^2 \bar{U}_\xi & \bar{d} &= -k \frac{1}{g_2} f^2 \bar{U}_\eta \\
 e &= k^2 \frac{g_{2\xi}}{g_1 g_2} f^2 \bar{U}
 \end{aligned}$$

Wegen der aus (5.11) folgenden Beziehung

$$k(g_2 \bar{U})_\xi = (g_1 \bar{U})_\eta$$

gilt weiter:

$$\bar{e} = \frac{1}{k^2} (e + \bar{d}) - d \quad b = k^2 d - e \quad \bar{b} = \frac{1}{k^2} b.$$

Im einzelnen erhält man folgende Lösungen von (5.17):

$$\begin{aligned}
 (5.18) \quad \bar{U} &= A \xi^m & \bar{V} &= k \bar{U} \\
 f^2 &= \xi^{1-m} & g_1 &= 1 & g_2 &= \xi^n & [n = -m].
 \end{aligned}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 (5.19) \quad a &= \frac{A}{2} (m + 2n + 1) & c &= 0 \\
 b &= 0 & \bar{b} &= -A(m + n) \\
 d &= -Am & \bar{d} &= 0 \\
 e &= Ak^2 n & \bar{e} &= 0 \\
 \bar{U} &= A \xi^m \cdot e^{\alpha \eta} & \bar{V} &= k \bar{U} & [\alpha &= k(1 + m)] \\
 f^2 &= \xi^{1-m} \cdot e^{-\alpha \eta} & g_1 &= 1 & g_2 &= \xi
 \end{aligned}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 (5.20) \quad a &= -\frac{A}{2} (m + 3) & c &= \frac{1}{2} \cdot k A \alpha \\
 b &= -k A \alpha & \bar{b} &= -A(m + 1) \\
 d &= -Am & \bar{d} &= -k A \alpha \\
 e &= k^2 A & \bar{e} &= 0 \\
 \bar{U} &= A \cdot \xi^n \cdot \eta^m & \bar{V} &= k \bar{U} \\
 f^2 &= \xi^{1-n} \eta^{1-m} & g_1 &= \alpha \eta & g_2 &= \beta \xi & \left[\beta = \frac{1 + m \alpha}{1 + n k} \right]
 \end{aligned}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{A}{2\alpha} (3 + n) & c &= \frac{kA}{2} (3 + m) \\
 b &= -\frac{kA}{\beta} (m + 1) & \bar{b} &= -\frac{A}{\alpha} (n + 1) \\
 d &= -\frac{A}{\alpha} n & \bar{d} &= -\frac{kA}{\beta} \cdot m \\
 e &= \frac{k^2 A}{\alpha} & \bar{e} &= \frac{A}{k\beta} \\
 \overline{U} &= 1 & \overline{V} &= k \\
 (5.21) \quad f^2 &= (\xi + \alpha\eta)^{m+1} & g_1 = g_2 &= (\xi + \alpha\eta)^m \quad [\alpha = k]
 \end{aligned}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \cdot (3m + 1) & c &= \frac{k}{2} \alpha (3m + 1) \\
 b &= -k\alpha m & \bar{b} &= -m \\
 d &= 0 & \bar{d} &= 0 \\
 e &= mk^2 & \bar{e} &= \frac{\alpha}{k} m \\
 \overline{U} &= A \cdot e^{\alpha\xi} & \overline{V} &= k\overline{U} \\
 (5.22) \quad f^2 &= e^{-\alpha\xi} & g_1 &= 1 \quad g_2 = e^{\beta\xi} \quad [\beta = -\alpha]
 \end{aligned}$$

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{A}{2} (\alpha + 2\beta) & c &= 0 \\
 b &= 0 & \bar{b} &= -A(\alpha + \beta) \\
 d &= -A\alpha & \bar{d} &= 0 \\
 e &= k^2 A\beta & \bar{e} &= 0 \\
 \overline{U} &= 1 & \overline{V} &= k \\
 (5.23) \quad f^2 &= 1 & g_1 &= \frac{g_{2\xi}}{g_2} \quad g_2 = \varphi_3(\xi, \eta),
 \end{aligned}$$

wobei $\varphi_3(\xi, \eta)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi_3 \varphi_{3\xi\eta} - \varphi_{3\xi} \varphi_{3\eta} - k \varphi_3^2 \varphi_{3\xi} = 0$ sein soll.

Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 & c &= k^2 \\
 b &= -k^2 & \bar{b} &= 1 \\
 d &= 0 & \bar{d} &= 0 \\
 e &= k^2 & \bar{e} &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U} &= \varphi_4(\xi, \eta) & \bar{V} &= k\bar{U}
 \end{aligned}$$

$$(5.24) \quad f^2 = \frac{1}{\varphi_4(\xi, \eta)} \quad g_1 = \frac{\varphi_{4\xi}}{\varphi_4} \quad g_2 = A \frac{\varphi_{4\eta}}{\varphi_4} \quad \left[A = \frac{1}{k} \right],$$

wobei $\varphi_4(\xi, \eta)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi_4\varphi_{4\xi\eta} + C\varphi_{4\xi}\varphi_{4\eta} = 0$ sein soll. Zugehörige Werte der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a &= -(\tfrac{1}{2} + C) & c &= -\frac{k}{A} \cdot (\tfrac{1}{2} + C) \\
 b &= C \cdot \frac{k}{A} & \bar{b} &= C \\
 d &= -1 & \bar{d} &= -\frac{k}{A} \\
 e &= -k^2(1 + C) & \bar{e} &= -\frac{1}{Ak}(1 + C).
 \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, befriedigen die angegebenen Lösungen auch noch das volle Gleichungssystem (3.6), wenn die in eckigen Klammern angegebenen Beziehungen nicht erfüllt sind. Dagegen ist die Außenströmung dann nicht mehr wirbelfrei.

Auf Grund der Symmetrie des Gleichungssystems (3.6) erhält man eine Reihe weiterer Lösungen, wenn man in den angegebenen Lösungen ξ und η , $\bar{U}$ und $\bar{V}$ sowie g_1 und g_2 miteinander vertauscht. Um die zugehörigen Werte der Koeffizienten $a, b, c, \dots$, zu erhalten, hat man die Vertauschung

$$a \leftrightarrow c \quad (b, d, e) \leftrightarrow (\bar{b}, \bar{d}, \bar{e})$$

vorzunehmen.

Hinsichtlich der angegebenen Werte der Koeffizienten $a, b, \dots$, der Differentialgleichungen (3.5) sei noch folgendes bemerkt: Wie man aus (3.6) ersieht, bedeutet ein gemeinsamer positiver Faktor von $a, c, b, d, e, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}$ nur eine Maßstabsänderung von f . Da es auf eine solche nicht ankommt, so kann man in jedem einzelnen Fall einen von Null verschiedenen Koeffizienten auf ± 1 normieren.

§6. Zur Deutung der errechneten Lösungen der Bedingungsgleichungen (3.6).

In den Bedingungsgleichungen (3.6) traten neben U und V^* noch die Funktionen g_1 und g_2 auf, was besagt, daß nicht nur die Außenströmung, sondern überdies das Bogenelementquadrat auf der umströmten Fläche eine ganz bestimmte Gestalt aufweisen muß, wenn "ähnliche" Lösungen auftreten sollen. Da durch die Funktionen g_1 und g_2 lediglich die metrischen Verhältnisse einer Fläche festgelegt werden, dagegen nicht ihre Gestalt im umgebenden Raum, so wird durch die im vorhergehenden Abschnitt errechneten Lösungen die umströmte Flächenhaut jeweils nur bis auf Verbiegungen bestimmt.

Für die Deutung von U und V^* sind gemäß der Definition von V^* in (3.2) zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder sind U und V^* aufzufassen als Geschwindigkeitskomponenten der Außenströmung in Richtung der krummlinigen Koordinaten auf der umströmten Fläche. Die Außenstromlinien fallen dann mit keiner der beiden Scharen von Koordinatenlinien auf der Fläche zusammen. Oder es kann U gedeutet werden als einzige in der Außenströmung vorhandene Geschwindigkeitskomponente, sodaß die Außenstromlinien mit der einen Schar von Parameterlinien, nämlich den x -Linien, auf der umströmten Fläche übereinstimmen. V^* ist dann als ein mit der Dimension einer Geschwindigkeit behafteter Maßstabsfaktor für die in der Grenzschicht auftretende Sekundärströmungskomponente v aufzufassen, der mit der Außenströmung nichts zu tun hat.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen sollen nun einige der im vorhergehenden Abschnitt gefundenen Lösungen näher betrachtet werden.

a) Die "ähnlichen" Lösungen des ebenen Problems.

Die in §5 unter (5.8) und (5.9) angegebenen Lösungen führen unter Verwendung von Stromlinienkoordinaten auf den bekannten zweidimensionalen Fall. Wählt man $n = 0$ bzw. $\beta = 0$, so lauten die zugehörigen Differentialgleichungen:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} F'''' + aFF'' + d(F'^2 - 1) &= 0 \\ G'''' + aFG'' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad \begin{aligned} F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) &= 1 \\ G'(0) = 0, \quad G'(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung läßt sich lösen zu

$$G'' = \alpha e^{-\int_0^t F'(\tau) d\tau} \neq 0,$$

wonach das Randwertproblem für G nur die triviale Lösung $G \equiv 0$ hat. Die erste Gleichung $F'''' + aFF'' + d(F'^2 - 1) = 0$ mit $a = \frac{1}{2}A \cdot (m+1)$, $d = -Am$

(bzw. $a = \frac{1}{2}A\alpha$ und $d = -A\alpha$) ist die bekannte Differentialgleichung der "ähnlichen" Lösungen des ebenen Problems. Gemäß (5.8) und (5.9) sind die zugehörigen äußeren Geschwindigkeitsverteilungen

$$\bar{U} = A\xi^m \quad \text{bzw.} \quad \bar{U} = A \cdot e^{\alpha\xi},$$

ABB. 3. Umströmung eines Keils vom Öffnungswinkel $\beta\pi$.

deren physikalische Deutung von MÄGLER in [19] vollständig durchgeführt wurde. Von praktischer Bedeutung ist hierbei insbesondere die Potentialströmung gegen einen Keil vom Öffnungswinkel $\beta\pi = \frac{2m}{1+m}\pi$, auf welche die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{U} = A\xi^m$ mit $m > 0$ führt.

b) Entsprechende "ähnliche" Lösungen bei axialsymmetrischer Anströmung eines Rotationskörpers.

Wählt man bei einem Drehkegel die Mantellinien und die Parallelkreise als Parameterlinien, so wird $g_1 = 1$, $g_2 = \xi$. Gemäß einer Bemerkung von MÄGLER in [5] weist bei axialsymmetrischer Anströmung eines Drehkegels die Außenströmung die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{U} = A\xi^{\tilde{m}}$ auf, wobei der Exponent $\tilde{m} > 0$ vom Öffnungswinkel ϑ_0 des Drehkegels abhängt. Die unter (5.18) angegebene Lösung kann somit für $n = -1$ —wenn man $\bar{U}$ als einzige, in der Außenströmung vorhandene Geschwindigkeitskomponente auffaßt—gedeutet werden als axialsymmetrische Strömung gegen einen Drehkegel. Die zugehörigen Differentialgleichungen lauten:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} F''' + aFF'' + d(F'^2 - 1) + eG'^2 &= 0 \\ G''' + aFG'' + \bar{b}F'G' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1$$

$$G(0) = G'(0) = 0, \quad G'(\infty) = 0.$$

Hierbei ist $a > 0$, $\bar{b} < 0$. Wie man sich leicht durch Betrachtung des geometrischen Sachverhalts klarmacht, hat die zweite Gleichung unter der Zusatzvoraussetzung $F' > 0$ in Verbindung mit den Randbedingungen für G nur die triviale Lösung $G \equiv 0$. (Die Annahme eines Maximums oder Minimums von

G' würde in der zweiten Gleichung von (6.2) zu einem Vorzeichenwiderspruch führen!) Für F' bleibt also die Differentialgleichung

$$(6.2a) \quad F''' + aFF'' + d(F'^2 - 1) = 0$$

ABB. 4. Axialsymmetrische Anströmung eines Drehkegels.

übrig. Dabei hängen a und d wie folgt mit den Konstanten der äußeren Geschwindigkeitsverteilung zusammen:

$$a = \frac{A}{2} (\bar{m} + 3) \quad d = -A\bar{m}$$

oder unter Einführung eines neuen Maßstabsfaktors $f^{*2} = \frac{1}{3} \cdot f^2$:

$$a = \frac{A}{2} \left(\frac{\bar{m}}{3} + 1 \right) \quad d = -A \frac{\bar{m}}{3}.$$

Für $m = \frac{1}{3}\bar{m}$ stimmt hiernach die bei der Umströmung eines Keils auftretende Differentialgleichung mit der obigen Differentialgleichung (6.2a) vollständig überein, d. h. die Berechnung der Grenzschicht an einem axialsymmetrisch angeströmten Drehkegel mit der äußeren Geschwindigkeitsverteilung $\bar{U} = A\xi^{\bar{m}}$ fällt zusammen mit der Berechnung der Grenzschicht an einem Keil vom Öffnungswinkel $\beta\pi = \frac{2m}{1+m}\pi$ mit $m = \frac{1}{3}\bar{m}$. Für $m = 1$, wozu der Öffnungswinkel $\vartheta_0 = \pi$ des Drehkegels gehört, erhält man speziell die Aussage, daß sich die Berechnung der rotationssymmetrischen Staupunktströmung zurückführen läßt auf diejenige der ebenen Keilströmung mit dem Keilwinkel $\pi/2$. Zum selben Ergebnis gelangte MÄGLER in [5] unter Anwendung der "Manglerschen Transformation".

c) *Linienquelle und -senke, räumliche Quell- und Senkenströmung.*

Deutet man in (5.18) das Netz von Parameterlinien für $n = -1$ als ebene Polarkoordinaten und $\bar{U}$ wieder als einzige, in der Außenströmung vorhandene Geschwindigkeitskomponente, so entspricht der Fall $m = -1$ für $A > 0$ einer Linienquelle (bzw. für $A < 0$ einer Liniensenke) senkrecht zur Wand, da dann die Außenströmung die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{U} = A/\xi$ aufweist.

Entsprechend tritt der Fall $m = -2$ auf bei Vorhandensein einer räumlichen Quelle bzw. Senke im Nullpunkt. Bei Beschränkung auf die allein physikalisch

sinnvolle Lösung $G \equiv 0$ für die Sekundärströmung erhält man für F wieder die Differentialgleichung

$$(6.3) \quad F''' + aFF'' + d(F'^2 - 1) = 0$$

ABB. 5. Außenströmung bei Vorhandensein einer räumlichen Quelle im Nullpunkt.

mit $a = d = A$ im Falle der Linienquelle ($A > 0$) bzw. Liniensenke ($A < 0$) und mit $a = \frac{1}{2}A$, $d = 2A$ im Falle der räumlichen Quelle ($A > 0$) bzw. Senke ($A < 0$).

d) *Drehströmungen um Rotationskörper und Strömungen um in sonst ruhender Flüssigkeit rotierende Rotationskörper.*

Wählt man auf einem Rotationskörper das Koordinatensystem so, daß die ξ -Linien mit den Parallelkreisen und die η -Linien mit den Meridiankurven zusammenfallen, so lautet das Bogenelementquadrat, wenn η die Bogenlänge einer Meridiankurve ist und $\bar{r} = \bar{r}(\eta)$ den mit L dimensionslos gemachten Abstand von der Drehachse bedeutet:

$$d\bar{s}^2 = \bar{r}^2(\eta) d\xi^2 + d\eta^2.$$

Danach kann die aus der unter (5.18) aufgeführten Lösung durch Vertauschung von ξ und η , $\bar{U}$ und $\bar{V}$, g_1 und g_2 entstehende Lösung

$$\bar{U} = A\eta^m \quad g_1 = \eta^n \quad g_2 = 1$$

gedeutet werden als Drehströmung um einen Rotationskörper, dessen Meridiankurve der Gleichung $\bar{r}(\eta) = \eta^n$ genügt.*¹⁾ Die Achse der Drehströmung fällt dabei mit der Achse des Rotationskörpers zusammen. Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} F''' + cGF'' + bF'G' &= 0 \\ G''' + cGG'' + \bar{d}G'^2 + \bar{e}(F'^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

*¹⁾Die Gestalt dieser Rotationskörper wird in [24] diskutiert.

Randbedingungen: $F'(0) = 0 \quad F'(\infty) = 1$

$$G(0) = G'(0) = 0 \quad G'(\infty) = 0$$

Hierbei ist

$$c = \frac{A}{2} \cdot (2n + m + 1) \quad b = -A(m + n)$$

$$\bar{d} = -Am \quad \bar{e} = An.$$

ABB. 6. Drehströmung um Rotationskörper.

Rotiert insbesondere die Flüssigkeit wie ein starrer Körper, so wird $U = \omega r$ (ω = Winkelgeschwindigkeit), also $m = n$. Der Fall $n = 1$ führt auf Drehströmungen um Drehkegel, speziell auf Drehströmungen über ebenem Grunde, wobei die Drehgeschwindigkeit proportional zu einer Potenz des Abstandes von der Rotationsachse ist.

Ist $m = -1$, so handelt es sich um einen Potentialwirbel, während für $m = n = 1$ die Flüssigkeit wie ein starrer Körper über einer Ebene rotiert. Der letztere Fall wurde von U. T. BÖDEWADT in [6] als exakte Lösung der vollen Navier-Stokesschen Gleichungen behandelt. Das bei BÖDEWADT auftretende, dem obigen System (6.4) äquivalente System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung und einer Differentialgleichung erster Ordnung wurde in recht mühevoller Weise durch Zusammenschluß einer Potenzreihenentwicklung um $\zeta = 0$ und einer asymptotischen Entwicklung bei einem mittleren Wert von ζ gelöst. Es ergab sich eine nichtmonotone Lösung für beide Geschwindigkeitskomponenten, wobei die Komponente in Hauptströmungsrichtung eine beträchtliche Übergeschwindigkeit aufwies.

Daß das Gleichungssystem (6.4) ganz allgemein für $m > 0$, $n > 0$ höchstens solche Lösungen besitzt, bei denen die Primärströmungskomponente F' eine Übergeschwindigkeit ($F' > 1$) aufweist, kann man folgendermaßen einsehen:

Aus $m > 0$, $n > 0$ folgt $c > 0$, $b < 0$, $\bar{d} < 0$, $\bar{e} > 0$, sodaß man das Gleichungssystem (6.4) auch so schreiben kann:

$$F''' + |c| GF'' - |b| F'G' = 0$$

$$G''' + |c| GG'' - |\bar{d}| G'^2 + |\bar{e}| (F'^2 - 1) = 0$$

Wäre nun stets $F' < 1$, also $(F'^2 - 1) < 0$, so könnte G' kein Maximum aufweisen, da sonst in der zweiten Gleichung ein Vorzeichenwiderspruch auftreten würde.

ABB. 7. Geschwindigkeitsprofile bei der Drehströmung über festem Grunde.

G' kann dann aber auf Grund der Randbedingungen $G'(0) = G'(\infty) = 0$ nur stets negativ sein. Damit die Randbedingung im Unendlichen erfüllt wird, muß dann von einer gewissen Stelle an aus geometrischen Gründen $G'' > 0$ und $G''' < 0$ sein, was wegen $G < 0$ in der zweiten Gleichung wiederum zu einem Vorzeichenwiderspruch führt. Es kann also nur Lösungen geben, für die einmal $F' > 1$ wird.

Betrachtet man statt der Drehströmung mit $U = \omega r$ ($m = n$) um einen Rotationskörper diejenige Grenzschichtströmung, die sich ausbildet, wenn ein Rotationskörper in sonst ruhender Flüssigkeit um seine Achse rotiert, so unterscheiden sich die zugehörigen Grenzschichtgleichungen gegenüber dem bisher betrachteten Fall der Drehströmung nur dadurch, daß das Druckglied verschwindet und die Randbedingungen für die Primärströmungskomponente an der Wand und am Außenrand der Grenzschicht (bzw. im Unendlichen) gerade vertauscht sind. Bei Drehkörpern der angegebenen Gestalt weist die Grenzschichtströmung also auch im letzteren Fall "ähnliche" Geschwindigkeitsprofile auf, wobei der Maßstabsfaktor für die beiden Komponenten u und v der Grenzschichtströmung jetzt die Oberflächengeschwindigkeit $U = \omega r$ des rotierenden Drehkörpers ist. Wegen $m = n$ und Verschwinden des Druckgliedes lauten nun die zugehörigen Differentialgleichungen, wenn man U mit ωL dimensionslos

macht, sodaß $\bar{U} = \bar{r}$ wird:

$$F'''' + \frac{3m+1}{2} GF'' - 2mF'G' = 0$$

$$G'''' + \frac{3m+1}{2} GG'' - mG'^2 + mF'^2 = 0$$

Unter Beschränkung auf den Fall $m > 0$ kann man unter Einführung eines neuen Maßstabsfaktors $f^{*2} = (1/m)f^2$ die obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$F'''' + cGF'' - 2F'G' = 0$$

(6.5)

$$G'''' + cGG'' - G'^2 + F'^2 = 0 \quad \text{mit} \quad c = \frac{3m+1}{2m} > 0.$$

Randbedingungen:

$$F'(0) = 1 \quad F'(\infty) = 0$$

$$G(0) = G'(0) = 0 \quad G'(\infty) = 0.$$

Der Fall $m = 1$ ($c = 2$), der der Strömung in der Nähe einer in sonst ruhender Flüssigkeit rotierenden Scheibe entspricht, ist bereits ausführlich behandelt (vgl. hierzu [7], [21] und [22]).

Für die Werte $m = 0,8$ und $m = 1,5$ (bzw. $c = 2,125$ und $c = 1,8333$) wurde das Randwertproblem (6.5) gelöst durch numerische Integration nach dem Adamsschen Interpolationsverfahren, ausgehend von den gegebenen Randwer-

ABB. 8. Geschwindigkeitsprofile für $m = 0,8$.

ten für $\zeta = 0$ und geschätzten Werten von $F'''(0) = A$ und $G'''(0) = B$. Die Werte von A und B wurden dabei so lange variiert, bis sich eine Lösung ergab, die das richtige asymptotische Verhalten aufwies.

Die numerischen Rechnungen lieferten das Ergebnis, daß der Einfluß des Parameters m auf die Gestalt der Profile bei nicht zu großer Abweichung von $m = 1$ äußerst gering ist.

Sowohl bei axialsymmetrischer Anströmung als auch bei Rotation eines Drehkegels treten "ähnliche" Lösungen auf. Dies legt die Frage nahe, ob man nicht auch bei axialsymmetrisch angeströmten und zugleich um ihre Achse rotierenden Drehkegeln "ähnliche" Lösungen erhält. Da man in diesem Fall zwangsläufig für die Primärströmungskomponente u die Geschwindigkeit U der Außenströmung und für die Komponente v die Oberflächengeschwindigkeit V des rotierenden Drehkegels als Maßstabsfaktor zu verwenden hat, und da nach (5.18) nur dann "ähnliche" Lösungen auftreten, wenn V proportional zu U ist, so erhält man nur für $\bar{U} = A\xi$ eine "ähnliche" dreidimensionale Grenzschicht. Diese äußere Geschwindigkeitsverteilung tritt auf, wenn der Öffnungswinkel des Kegels π ist, d. h. bei axialsymmetrischer Anströmung einer ebenen Scheibe. Man erhält also nur im Sonderfall einer axialsymmetrisch angeströmten rotierenden ebenen Scheibe "ähnliche" Geschwindigkeitsprofile. Dieser Fall wurde von D. M. HANNAH in [8] als exakte Lösung der vollen Navier-Stokesschen Gleichungen behandelt.

e) *Strömung über Ebene und Keil mit parabelförmigen Außenstromlinien.*

Bei der Umströmung eines Keils tritt in Richtung senkrecht zur Vorderkante die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{U} = A\xi^m$ auf (ξ, η rechtwinklige kartesische Koordinaten). Kommt nun parallel zur Vorderkante noch eine Geschwindig-

ABB. 9. Strömung um einen Keil mit parabelförmigen Außenstromlinien.

keitskomponente $\bar{V} = B\xi^n$ für $\xi > 0$ hinzu, so weisen die Außenstromlinien parabelförmige Gestalt auf. Gemäß der unter (5.8) angegebenen Lösung sind die Geschwindigkeitsprofile im Falle einer solchen Strömung "ähnlich". Das zugehörige System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zerfällt in diesem Fall, und zwar lautet es unter Einführung eines neuen Maßstabsfaktors

$$f^{*2} = (1/A)f^2:$$

$$F''' + \frac{m+1}{2} FF'' - m(F'^2 - 1) = 0 \quad (6.6)$$

$$G''' + \frac{m+1}{2} FG'' - n(F'G' - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Randbedingungen:} \quad F(0) = F'(0) = 0 \quad F'(\infty) = 1 \\ G'(0) = 0 \quad G'(\infty) = 1. \end{aligned}$$

Der Sonderfall $m = 0$, $n = 1$ (Parabelförmige Strömung über einer ebenen Platte) wurde von Loos in [15] behandelt. Für F' erhält man natürlich in diesem Fall das gewöhnliche Blasiusche Plattenprofil. Für die zweite Komponente G' ergibt sich dagegen eine Übergeschwindigkeit.

Zerlegt man den Geschwindigkeitsvektor nicht in Richtung der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten, sondern in eine Komponente tangential zur Richtung der Außenstromlinien und in eine Komponente normal zu diesen, so erhält man für die Primärströmungskomponente in Richtung der Außenstromlinien für verschiedene Werte des Winkels τ , den eine Stromlinie mit der positiven ξ -Richtung bildet, die in Abb. 11 angegebenen Geschwindigkeitsprofile, die natürlich nicht mehr "ähnlich" sind. Hätte man danach im Falle der jetzt betrachteten Strömung z. B. Stromlinienkoordinaten verwendet, so wäre man nicht auf

ABB. 10. "Ähnliche" Geschwindigkeitsprofile der Komponenten in Richtung der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten

ABB. 11. Geschwindigkeitsprofile der Primärströmungskomponente in Richtung der Außenstromlinien.

"ähnliche" Geschwindigkeitsprofile gestoßen. Dies illustriert die Tatsache, daß die Geschwindigkeitsprofile bei einer vorgegebenen Strömung bezüglich eines ganz bestimmten Koordinatensystems sehr wohl im angegebenen Sinn "ähnlich" sein können, während dies bezüglich irgendeines anderen Koordinatensystems nicht mehr der Fall zu sein braucht.

f) Strömungen mit spiralförmiger Außenströmung.

Deutet man bei der unter (5.18) angegebenen Lösung für $n = 1$ das Netz von Parameterlinien als ebene Polarkoordinaten und faßt man $\bar{U}$ und $\bar{V}$ als zwei in der Außenströmung vorhandene Geschwindigkeitskomponenten auf, so

erhält man wegen $\bar{V} = k\bar{U}$ Außenstromlinien, die mit den Parameterlinien konstanten Winkel bilden. Die Außenstromlinien sind hiernach logarithmische Spiralen. Die zugehörigen Differentialgleichungen lauten:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} F''' + \frac{m+3}{2k^2} FF'' - \frac{m}{k^2} (F'^2 - 1) + G'^2 - 1 &= 0 \\ G''' + \frac{m+3}{2k^2} FG'' - \frac{m+1}{k^2} (F'G' - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Randbedingungen: $F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1$
 $G'(0) = 0, \quad G'(\infty) = 1.$

Für $m = -1$ erhält man die Wirbelquelle, während es sich für $m = 1$ um eine rotationssymmetrische Staupunktströmung handelt, wobei die Flüssigkeit noch gleichzeitig wie ein starrer Körper rotiert.

ABB. 12. Außenstromlinien zur Geschwindigkeitsverteilung (5.18).

g) *Strömungen über einer Ebene mit den unter (5.4), (5.9) und (5.10) angegebenen Geschwindigkeitsverteilungen.*

Die unter (5.4) aufgeführte Lösung

$$\bar{U} = A\xi^m\eta^n \quad \bar{V} = B\xi^{m-1}\eta^{n+1} \quad g_1 = g_2 = 1$$

kann gedeutet werden als Strömung über einer Ebene, wobei die Gleichung der Stromlinien lautet:

$$\eta = \alpha\xi^C, \quad C = \frac{B}{A}.$$

Unter Beschränkung auf $A > 0$ (was keinen Verlust an Allgemeinheit bedeutet, da dieser Fall stets durch eine Drehung des Koordinatensystems erreicht werden kann) kann man die zugehörigen Differentialgleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
 (6.8) \quad & F''' + \frac{m+1}{2} FF'' + C \frac{n+2}{2} GF'' \\
 & + Cn(F'G' - 1) - m(F'^2 - 1) = 0 \\
 & G''' + \frac{m+1}{2} FG'' + C \frac{n+2}{2} GG'' \\
 & + (m-1)(F'G' - 1) - C(n+1)(G'^2 - 1) = 0 \\
 \text{Randbedingungen:} \quad & F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1 \\
 & G(0) = G'(0) = 0, \quad G'(\infty) = 1.
 \end{aligned}$$

ABB. 13. Außenströmung zur Geschwindigkeitsverteilung (5.4).

Der Sonderfall $m = 1, n = 0$ führt auf die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{U} = A\xi$, $\bar{V} = B\eta$, die, wie L. HOWARTH in [9] gezeigt hat, in der Umgebung eines Staupunkts auf einer beliebigen krummen Fläche auftritt. Die obigen Gleichungen (6.10) wurden für diesen Fall für verschiedene Werte von C in [9] gelöst.

Weisen $\bar{U}$ und $\bar{V}$ die unter (5.9) bzw. (5.10) angegebenen Geschwindigkeitsverteilungen

$$\bar{U} = A \cdot e^{\alpha \xi} \quad \bar{V} = B \cdot e^{\beta \xi}$$

bzw.

$$\bar{U} = A \cdot e^{\alpha \xi} \quad \bar{V} = (B \cdot \eta + D) e^{\alpha \xi}$$

auf, so sind die Außenstromlinien Exponentialkurven, und zwar im ersteren Fall von der Form

$$\eta = C \cdot e^{\delta \xi} + \text{const}, \quad C = \frac{B}{A} \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \delta = \beta - \alpha$$

im zweiten Fall von der Form $\eta = \text{const} \cdot e^{B/A \cdot \xi}$.

Universität Freiburg i. Br.

Diese Arbeit gibt einen Teil der an der Universität Freiburg i. Br. angefertigten Dissertation des Verfassers wieder.

Literaturhinweise.

- [1] W. D. HAYES: *The Three-Dimensional Boundary Layer*. Navord Rep. 1313, Nots 384, May 1951.
- [2] L. HOWARTH: The Boundary Layer in Three-Dimensional Flow. Part I: Derivation of the Equations for Flow Along a General Curved Surface. *Philosophical Magazine* (7) **42**, pp. 239–43, 1951.
- [3] F. K. MOORE: *Three-Dimensional Compressible Laminar Boundary-Layer Flow*. NACA T. N. No. 2279, 1951.
- [4] H. GÖRTLER: Zur laminaren Grenzschicht am schiebenden Zylinder, Teil I. *Archiv der Math.* **3**, 1952.
- [5] W. MÄGLER: Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten. *ZAMM* **28**, S. 97–103, 1948.
- [6] U. T. BÖDEWADT: Die Drehströmung über festem Grunde. *ZAMM* **20**, S. 241–248, 1940.
- [7] W. G. COCHRAN: The Flow Due to a Rotating Disc. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **30**, S. 365, 1934.
- [8] D. M. HANNAH: *Forced Flow against a Rotating Disc*. A. R. C. R. & M., No. 2772, 1952.
- [9] L. HOWARTH: The Boundary Layer in Three-Dimensional Flow. Part II: The Flow near a Stagnation Point. *Phil. Mag.* (7), **42**, pp. 1433–40, 1951.
- [10] L. HOWARTH: Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere. *Phil. Mag.* (7) **42**, pp. 1308–15, 1951.
- [11] F. K. MOORE: *Laminar Boundary Layer on a Circular Cone in Supersonic Flow at a Small Angle of Attack*. NACA T. N. 2521, 1951.
- [12] F. K. MOORE: *Laminar Boundary Layer on Cone in Supersonic Flow at Large Angle of Attack*. NACA T. N. 2844, 1952.
- [13] F. K. MOORE: Three-Dimensional Boundary Layer Flow. *J. Aero. Sci.* **20**, pp. 525–534, 1953.
- [14] F. K. MOORE: *Displacement Effect of a Three-Dimensional Boundary Layer*. NACA T. N. 2722, 1952.
- [15] H. G. LOOS: A Simple Laminar Boundary Layer with Secondary Flow. *J. Aero. Sci.* **22**, pp. 35–40, 1955.
- [16] A. MAGER: Three-Dimensional Laminar Boundary Layer with Small Cross-Flow. *J. Aero. Sci.* **21**, pp. 835–845, 1954.
- [17] A. MAGER & A. HANSEN: *Laminar Boundary Layer over Flat Plate in a Flow Having Circular Streamlines*. NACA T. N. 2568, 1952.
- [18] J. WILKINSON: Some Examples of Three-Dimensional Effects in Boundary Layer Flow. *The Aeron. Quart.* **5**, pp. 73–84, 1954.
- [19] W. MÄGLER: Die "ähnlichen" Lösungen der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. *ZAMM* **23**, S. 243 ff., 1943.
- [20] L. PRANDTL: Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. *Betz-Festschrift*, S. 134–141, 1945.
- [21] T. v. KÁRMÁN: Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM* **1**, S. 233, 1921.
- [22] J. T. STUART: On the Effects of Uniform Suction on the Steady Flow Due to a Rotating Disc. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **7**, p. 446, 1954.
- [23] H. SCHUH: Über die "ähnlichen" Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichung in inkompressibler Strömung. *Festschrift "50 Jahre Grenzschichtforschung"*, Verlag F. Vieweg, Braunschweig, 1955.
- [24] TH. GEIS: Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern. *Festschrift "50 Jahre Grenzschichtforschung"*, Verlag F. Vieweg, Braunschweig, 1955.