Zur Berechnung stationärer Grenzschichten bei kontinuierlicher Absaugung mit unstetig veränderlicher Absaugegeschwindigkeit

WERNER RHEINBOLDT

Vorgelegt von H. GÖRTLER

INHALTSVERZEICHNIS

Zusammenfassende Übersicht	540
§1 Problemstellung	542
§2 Ansatz des neuen Lösungsverfahrens	546
§3 Über die Lösungen der homogenen Gleichungen (37)	551
§4 Die Lösungen der inhomogenen Gleichungen für die ersten Koeffizienten $f_n(\tau)$	558
§5 Die asymptotische Entwicklung der Stromfunktion	569
§6 Zusammenstellung des Verfahrens für die praktische An- wendung	575
§7 Beispiele	580
Anhang Nr. 1: Tafeln der Funktionen $\bar{h}'_1, \bar{h}'_2, \bar{\gamma}'_1, \bar{\gamma}'_2, \bar{\gamma}'_3$	597
Anhang Nr. 2: Bemerkungen zum Differenzenverfahren von H. GÖRTLER bei Absaugung	599
Literaturverzeichnis	604

Zusammenfassende Übersicht.

Fast alle bisher bekannten Lösungen des Problems, die Geschwindigkeitsverteilung in einer Grenzschicht unter Einfluß kontinuierlicher Absaugung exakt zu berechnen, gehören zur Klasse der "ähnlichen" Lösungen. Bei ihnen handelt es sich also um einzelne partikuläre Integrale der Grenzschichtgleichungen unter speziellen Randbedingungen. Man findet sie etwa bei H. SCHLICHTING [1] oder E. J. WATSON [2] zusammengestellt.

Sieht man von den Arbeiten ab, welche die sogenannten POHLHAUSEN-Verfahren verwenden, also keine strengen Lösungen der Grenzschichtgleichungen liefern, so gibt es nur sehr wenige Untersuchungen, die sich mit der Absaugegrenzschicht bei beliebig vorgebbaren Randbedingungen beschäftigen. Hierher gehört z.B. die Arbeit von R. IGLISCH [3], in welcher der Anlauf der Grenzschichtströmung an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung behandelt wird. Demgegenüber wurde der praktisch überaus interessante Fall einer lediglich stückweisen Absaugung bei sonst undurchlässiger Wand bisher überhaupt noch nicht streng untersucht. Das liegt wohl im wesentlichen daran, daß beim Beginn bzw. Ende jedes Absaugebereiches der Wandwert der v -Geschwindigkeitskomponente unstetig wird und deshalb dort alle gebräuchlichen Rechenverfahren versagen.

In der vorliegenden Arbeit soll nun an dem Beispiel eines sprunghaften Absaugebeginns bei beliebiger äußerer Druckverteilung und beliebigem Absaugegesetz ein Verfahren entwickelt werden, das es gestattet, die raschen Veränderungen der (grenzschichttheoretischen) Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe beliebiger Strömungsunstetigkeiten der genannten Art exakt zu berechnen. Dabei wird vorausgesetzt, daß es sich um eine laminare, ebene und stationäre Grenzschicht einer inkompressiblen Flüssigkeit handelt. Weiter stromabwärts, wo die Änderungen der Geschwindigkeit in Richtung der Hauptströmung nicht mehr so groß sind, kann man dann wieder eines der üblichen Fortsetzungsverfahren benutzen.

Die verwendete Methode besteht im wesentlichen darin, nach einer geeigneten Variablentransformation eine Reihenentwicklung für die Stromfunktion anzusetzen. An diese nur in Wandnähe brauchbare Reihe wird dann für größere Wandabstände eine asymptotische Entwicklung angeschlossen.

Die Theorie des Verfahrens ist in den §§2–5 enthalten. Für die praktische Anwendung werden in §6 noch einmal alle notwendigen Formeln zusammengestellt. In §7 folgen einige Beispiele, an denen die gute Brauchbarkeit des Verfahrens zu erkennen ist.

Die vorliegende Arbeit, die den wesentlichen Teil der an der Universität Freiburg i. Br. angefertigten Dissertation des Verfassers wiedergibt, wurde von Herrn Prof. Dr. H. GÖRTLER angeregt. Für viele fruchtbare Diskussionen und für sein großes Interesse beim Fortgang der Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. GÖRTLER herzlich danken. Ebenso danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die mir durch ein Doktorandenstipendium die finanzielle Möglichkeit zur Durchführung der Arbeit gab. Schließlich gebührt mein Dank Fräulein HERLINDE KOMPE für ihre Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnungen.

§1 Problemstellung

Wenn ein Körper von einer Flüssigkeit mit geringer Reibung (laminar) umströmt wird, so kann man bekanntlich ausserhalb einer wandnahen Zone—der Grenzschicht—die Strömung als reibungsfrei ansehen. Zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Grenzschicht lassen sich nach PRANDTL [4] die Navier-Stokes'schen Gleichungen durch die einfacheren Grenzschichtgleichungen ersetzen. Diese lauten für den Fall der ebenen, stationären Strömung inkompressibler Flüssigkeiten

$$(1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Hierin bedeutet

x die Bogenlänge der Wand in Strömungsrichtung
 y den senkrechten Wandabstand
 $u = u(x, y)$ die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung
 $v = v(x, y)$ die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung
 ρ die (konstante) Dichte
 ν die (konstante) kinematische Zähigkeit

Der Druck $p(x)$ kann aus der als bekannt anzusehenden (reibungsfreien) Aussenströmung ermittelt werden.¹⁾ Bezeichnet $u_\infty(x)$ die Längsgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht, so gilt in grenzschichttheoretischer Näherung

$$(2) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_\infty(x) \frac{du_\infty(x)}{dx}$$

Saugt man nun die Grenzschicht durch die Wand des Körpers ganz oder teilweise ab, so bleiben bekanntlich die in den Navier-Stokes'schen Gleichungen durchgeführten Grenzschichtvernachlässigungen auch weiterhin gerechtfertigt, solange nur das Verhältnis der Absaugegeschwindigkeit zur Aussenströmung $u_\infty(x)$ hinreichend klein ist. Wenn dieses Verhältnis dagegen zu gross wird, so tritt eine Abhängigkeit des Grenzschichtdruckes p von der Querkoordinate y auf, der sogenannte Senkeneffekt. Wir wollen für das Folgende immer die Absaugegeschwindigkeit als so klein voraussetzen daß die Grenzschichtgleichungen (1) und die Druckgleichung (2) ihre Gültigkeit behalten.

Zu den Grenzschichtgleichungen kommen nun verschiedene Randbedingungen hinzu: Auf Grund des Haftens der Flüssigkeit an der Wand ist zunächst

$$(3) \quad u(x, 0) = 0$$

¹⁾Praktisch geschieht dies meist durch Messung des Druckes.

Weiterhin wird der Übergang der Grenzschichtströmung $u(x, y)$ in die Außenströmung $u_\infty(x)$ durch die Forderung

$$(4) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_\infty(x)$$

geregelt. Schließlich gilt bei kontinuierlicher Absaugung

$$(5) \quad v(x, 0) = -v_0(x)$$

wobei $v_0(x)$ die Absaugeverteilung darstellt ($v_0(x) > 0$ Absaugung, $v_0(x) < 0$ Ausblasung)²⁾. Speziell für $v_0(x) \equiv 0$, also

$$(6) \quad v(x, 0) = 0$$

ergibt (5) den Fall der undurchlässigen Wand.

Bei fast sämtlichen (strengen) theoretischen Untersuchungen über kontinuierliche Grenzschichtabsaugung wurde bisher—wie der zusammenfassende Bericht von H. G. LEW & R. D. MATHIEU [5] zeigt—die einschränkende Voraussetzung gemacht, daß überall längs des umströmten Körpers Absaugung herrscht und die Absaugeverteilung $v_0(x)$ (mindestens) stetig ist. Demgegenüber besitzt jedoch der umfassendere Fall erheblich grösseres praktisches Interesse, wenn die Wand stückweise abwechselnd sowohl undurchlässig als auch porös ist, also die Funktion $v_0(x)$ in gewissen x -Intervallen identisch verschwindet und beim Beginn bzw. Ende jedes Absaugebereiches (im allgemeinen) unstetig wird. Beispielsweise verwenden die meisten experimentellen Arbeiten, die dieses Gebiet behandeln, solche allgemeineren Absaugeverteilungen. Man vergleiche hierzu etwa die Berichte von Sir M. JONES [6], H. PFENNINGER [7] und A. v. DOENHOFF & L. K. LOFTIN [8].

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns nun mit der exakten Berechnung der Grenzschichtströmung bei derartigen stellenweise unstetigen Absaugeverteilungen beschäftigen. Dabei können wir uns auf den speziellen Fall beschränken, daß die Wand von ihrem Beginn ($x = 0$) an zunächst undurchlässig ist, bis an einer beliebigen Stelle $x = x_0 > 0$ sprunghaft die kontinuierliche Absaugung einsetzt. Demgemäß haben wir neben (3) und (4) als dritte Randbedingung

$$(7) \quad v(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < x_0 \\ -v_0(x) & \text{für } x_0 \leq x \end{cases} \quad (v_0(x_0) \neq 0)$$

zu verwenden. Wir werden später sehen, daß mit Hilfe des zur Lösung dieses Falles entwickelten Verfahrens ebenso auch das Problem eines sprunghaften Absauge-Endes, sowie jeder beliebigen unstetigen Änderung der Absaugeverteilung $v_0(x)$ gelöst werden kann und somit unsere obige Beschränkung auf den Absaugebeginn keineswegs wesentlich ist.

Die drei Randbedingungen (3), (4) und (7) reichen bekanntlich nicht aus, um die Grenzschichtströmung für alle $x \geq 0$ vollständig festzulegen. Vielmehr

²⁾Die Randbedingungen (3) und (5) zusammen entsprechen einer senkrechten (kontinuierlichen) Absaugung, wie sie sich technisch mit Hilfe poröser Wände, z.B. aus gesinterter Bronze, verwirklichen läßt.

braucht man dazu, dem parabolischen Charakter der Grenzschichtgleichungen entsprechend, in $x = 0$ noch eine Anfangsbedingung für $u(0, y)$.

Im Intervall $0 \leq x \leq x_0$ stellt unsere durch die Gleichungen (1), (2) und die Nebenbedingungen (3), (4), (7) sowie die Anfangsbedingung $u(0, y)$ definierte Anfangsrandwertaufgabe gerade das übliche Grenzschichtproblem ohne Absaugung dar. Damit dürfen wir im Hinblick auf das Ziel unserer Problemstellung ohne weiteres annehmen, daß in diesem Bereich mit Hilfe der bekannten Methoden, wie z.B. der Blasiuschen Reihe bzw. einem der üblichen Fortsetzungsverfahren, die gesuchte Lösung bereits berechnet worden ist. Dann kennen wir auch im Punkt $x = x_0$ die Geschwindigkeitsverteilung $u(x_0, y) = \tilde{u}(y)$. Diese Funktion $\tilde{u}(y)$ stellt wegen der Randbedingung (7) das Endprofil der Grenzschicht ohne Absaugung dar und enthält die gesamte Vorgeschichte der Strömung bis zum Punkt $x = x_0$. Für die weitere Berechnung der Grenzschicht im Bereich $x \geq x_0$ läßt sich nun an Stelle der Anfangsbedingung für $u(0, y)$ einfach

$$(8) \quad u(x_0, y) = \tilde{u}(y)$$

als neue Anfangsbedingung verwenden.

Mit Hilfe des Einlaufprofils $\tilde{u}(y)$ folgt aus den Grenzschichtgleichungen (1) und (2)

$$(9) \quad uu_x + vu_y = -uw_y + vu_y = -u^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right) = u_\infty u'_\infty = vu_{yy}$$

also

$$(10) \quad v(x_0, y) = \tilde{v}(y) = -\tilde{u} \int_0^y \frac{\tilde{u}''(y) + \frac{u_\infty(x_0)u'_\infty(x_0)}{(\tilde{u}(y))^2}} dy$$

und es gilt wie leicht zu bestätigen

$$(11) \quad v(x_0, 0) = \tilde{v}(0) = 0.$$

Die durch den sprunghaften Absaugebeginn hervorgerufene Unstetigkeit liegt somit im Punkt $x = x_0, y = 0$ am Übergang von den v -Randwerten $v(x, 0) = -v_0(x)$ auf $y = 0$ und den v -Anfangswerten $v(x_0, y) = \tilde{v}(y)$ auf $x = x_0$.

Wir wollen hier noch kurz bemerken, dass die Anfangsbedingung (8) und die äussere Randbedingung (4) durchaus nicht unabhängig voneinander sind. Wie nämlich der Verfasser in einer anderen Arbeit [9] gezeigt hat, gilt für jedes ebene, stationäre und inkompressible Grenzschichtproblem unabhängig von der Form der inneren Randbedingungen unter gewissen für den vorliegenden Fall nicht einschränkenden Voraussetzungen der Satz: Wenn an irgendeiner Stelle $x = x_1$ eine zu dem Problem passende Anfangsbedingung $u(x_1, y) = \tilde{u}(y)$ gestellt ist und das dabei auftretende Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ sich richtig an die Aussenströmung $u_\infty(x)$ anschliesst—d.h. $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(y) = u_\infty(x_1)$ —so ist die äussere Randbedingung (4) in einem Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ bereits von selbst erfüllt.

Für das Folgende ist es zweckmässig, die Grenzschichtgleichungen in dimensionsloser Form zu schreiben. Bedeutet L eine charakteristische Länge, U eine charakteristische Geschwindigkeit und $\text{Re} = UL/\nu$ die zugehörige Reynoldssche

Zahl, so setzen wir

$$(12) \quad \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & u^* &= \frac{u}{U} & u_\infty^* &= \frac{u_\infty}{U} & \tilde{u}^* &= \frac{\tilde{u}}{U} \\ y^* &= \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}} & v^* &= \frac{v}{U} \sqrt{\text{Re}} & v_0^* &= \frac{v_0}{U} \sqrt{\text{Re}} & p^* &= \frac{p}{\rho U^2} \end{aligned}$$

Da im folgenden bis zum §7 nur dieses Koordinatensystem benutzt wird, so können die Sterne zunächst weggelassen werden, ohne dass Verwechslungen zu befürchten sind.

Die Grenzschichtgleichungen (1), (2) lauten unter Verwendung dieser neuen Größen

$$(13) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_\infty u'_\infty + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

und die Randbedingungen werden zu

$$(14a) \quad u(x, 0) = 0 \quad v(x, 0) = -v_0(x) \quad (x \geq x_0)$$

$$(14b) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_\infty(x)$$

$$(14c) \quad u(x_0, y) = \tilde{u}(y)$$

In der vorliegenden Arbeit wollen wir nun ein Verfahren entwickeln, das es gestattet, die raschen Veränderungen der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht in der Nähe der Strömungsunstetigkeit streng zu berechnen. Weiter stromabwärts von der Stelle $x = x_0$, wo die Änderungen der Geschwindigkeitsverteilung nicht mehr so groß sind, kann man dann wieder eines der üblichen Fortsetzungsverfahren, wie z.B. das von H. GÖRTLER [10] entwickelte Differenzenverfahren, verwenden. Eine leichte Verbesserung dieses GÖRTLERschen Differenzenverfahrens, die sich bei derartigen Rechnungen mit Absaugung sehr bewährt hat, wird im Anhang beschrieben.

Abschließend ist noch zu bemerken, daß sich der Sprung der v -Randwerte im Punkt $x = x_0$, $y = 0$ als Unstetigkeit gewisser höherer Ableitungen der Lösung längs der Charakteristik $x = x_0$, $y > 0$ in die Strömung hinein fortpflanzt. Wir wollen auf diese Tatsache nicht näher eingehen, da sie für die weiteren Betrachtungen nicht benötigt wird. Man bestätigt ihre qualitative Richtigkeit etwa an den Ergebnissen unserer Beispiele (vgl. z.B. auch COURANT & HILBERT [11], Bd. II, s. 299). Die wirkliche physikalische Strömung besitzt natürlich auf $x = x_0$ keine derartige Unstetigkeit. Es handelt sich hier lediglich um eine lokale Ausartungserscheinung mathematischer Art, welche durch die Grenzschichtvernachlässigungen bedingt ist. In Wirklichkeit findet auf $x = x_0$ —in Übereinstimmung mit dem elliptischen Charakter der vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen—kein unstetiger Sprung, sondern ein zwar rascher, jedoch stetiger Übergang statt.

§2 Ansatz des neuen Lösungsverfahrens.

Für das durch die Gleichungen (13) und (14) definierte Anfangsrandwertproblem wollen wir im folgenden voraussetzen, daß die drei vorgegebenen Funktionen $\tilde{u}(y)$, $u_\infty(x)$ und $v_0(x)$ analytisch sind, sich also durch gleichmäßig konvergente Potenzreihen

$$(15) \quad \tilde{u}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n \quad ^3)$$

$$(16) \quad u_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x - x_0)^n$$

$$(17) \quad v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (x - x_0)^n \quad (v_0 \neq 0)$$

darstellen lassen.

Eine mit der Unstetigkeit der v -Randwerte im Punkt $x = x_0$, $y = 0$ (vgl. §1) verwandte Schwierigkeit hat R. IGLISCH [3] bei der Berechnung der Anlaufströmung an der Vorderkante der ebenen längsangeströmten Platte mit homogener Absaugung dadurch behoben, daß er im wesentlichen mit Hilfe einer Koordinatentransformation der Form $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y/\sqrt{x}$ die Gerade $x = 0$, also den Träger der Strömungsunstetigkeit, in den unendlich fernen Punkt $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \infty$ abbildet. Es liegt nahe, hier ähnlich vorzugehen. Wir werden jedoch sehen, dass in unserem Fall eine Transformation derselben Art nicht ausreicht und verwenden daher gleich die allgemeinere Transformation

$$(18) \quad \sigma = \sqrt[N]{x - x_0} \quad \tau = \frac{y}{N \sqrt[N]{x - x_0}}$$

$$\psi(x, y) = \sigma^{N-1} f(\sigma, \tau)$$

die zuerst S. GOLDSTEIN [12] bei der Berechnung des Nachlaufs hinter der ebenen Platte benutzte. Dabei ist N eine noch festzulegende natürliche Zahl und $\psi(x, y)$ die Stromfunktion unseres Problems, für die also

$$(19) \quad \psi_y(x, y) = u(x, y) \quad \psi_x(x, y) = -v(x, y)$$

gilt. Es wird dann

$$(20) \quad u = \frac{\sigma^{N-2}}{N} f$$

und die Differentialgleichungen (13) gehen, wie man leicht nachrechnet, über in

$$(21) \quad N^2 \sigma^{4-N} u_{\infty} u'_{\infty} + f_{rrr} - (N-2)f_{\tau}^2 + (N-1)ff_{rr} - \sigma f_{\tau} f_{r\sigma} + \sigma f_{\sigma} f_{r\tau} = 0.$$

³⁾Man beachte $\tilde{u}(0) = 0$, wegen $u(x, 0) = 0$.

Führen wir die Abkürzung

$$(22) \quad C_0(x) = \int_{x_0}^x v_0(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} (x - x_0)^n$$

als dimensionslosen Mengenbeiwert ein⁴⁾, so erhalten wir aus (14a) und (14b) als neue Randbedingungen

$$(23a) \quad f_\tau(\sigma, 0) = 0 \quad f(\sigma, 0) = \sigma^{1-N} C_0(\sigma^N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n+1} \sigma^{Nn+1} \quad 5)$$

und

$$(23b) \quad \frac{\sigma^{N-2}}{N} f_\tau(\sigma, \infty) = u_\infty(\sigma^N) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma^{Nn}$$

Da bei der Transformation (18) die Halbgerade $x = x_0$, $y > 0$ in den *einen* (unendlichfernen) Punkt $\sigma = 0$, $\tau = \infty$ übergeführt wird, so geht die Anfangsbedingung (14c), also das für unser Problem so wichtige Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$, zunächst völlig verloren.

Wir wollen als erstes zeigen, dass sich für $N = 2$, also bei Verwendung der von IGLISCH benutzten Transformation, keine Möglichkeit ergibt, das Einlaufprofil wieder zu berücksichtigen. Für $N = 2$ bekommt nämlich die Differentialgleichung (21) die Form

$$(24a) \quad 8\sigma^2 u_\infty u'_\infty + f_{\tau\tau\tau} + f f_{\tau\tau} - \sigma f_\tau f_{\tau\sigma} + \sigma f_\sigma f_{\tau\tau} = 0$$

und die Randbedingungen (23a/b) werden zu

$$(24b) \quad f_\tau(\sigma, 0) = 0 \quad f(\sigma, 0) = \frac{C_0(\sigma^2)}{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n+1} \sigma^{2n+1}$$

$$f_\tau(\sigma, \infty) = 2u_\infty(\sigma^2) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma^{2n}$$

Trotz der fehlenden Anfangsbedingung ist die Lösung $f(\sigma, \tau)$ von (24a/b) in einer Umgebung von $\sigma = 0$ völlig bestimmt. Macht man für sie nämlich einen Potenzreihenansatz

$$(25) \quad f(\sigma, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\tau) \sigma^n$$

so ergeben sich für die Koeffizienten $f_n(\tau)$ jeweils Differentialgleichungen dritter Ordnung mit Randbedingungen für $f(0)$, $f'(0)$ und für $f'(\infty)$. Es lässt sich

⁴⁾Hiermit beträgt die Absaugemenge im Intervall von x_0 bis x , wenn b die Breite des überströmten Absaugebereiches ist, in unseren dimensionslosen Koordinaten

$$Q = b C_0(x)$$

⁵⁾Hier wurde stillschweigend $f(0, 0) = 0$ gesetzt, da eine additive Konstante bei der Stromfunktion unwesentlich ist.

beweisen—was wir jedoch nicht durchführen wollen—, daß hierdurch alle $f_n(\tau)$ vollkommen festgelegt werden. Für $f_0(\tau)$ lautet z.B. die Differentialgleichung

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0$$

und die Randbedingungen haben die Form

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0 \quad f_0'(\infty) = \text{const.}$$

$f_0(\tau)$ ist also gerade gleich dem Blasius'schen Plattenprofil. Damit muss aber die fehlende Anfangsbedingung notwendig

$$f(0, \tau) = f_0(\tau)$$

sein und man kann $f(\sigma, \tau)$ nun ohne weiteres etwa—wie bei IGLISCH—statt durch die Reihe (25) mit Hilfe eines numerischen Fortsetzungsverfahrens berechnen. Es ist aber sofort einzusehen, daß die aus diesem $f(\sigma, \tau)$ durch die inverse Transformation (18) erhaltene Lösung $u(x, y)$, $v(x, y)$ von (13) nur einem konstanten Einlaufprofil $u(0, y) = \text{const.}$ genügt. Damit haben wir also lediglich die Lösung von IGLISCH wiedergewonnen, jedoch sogar bei beliebigem äusseren Druckverlauf und ohne die bei IGLISCH noch zusätzlich verwendeten Hilfsttransformationen.

Wir setzen nun $N = 3$. Dann lautet die Differentialgleichung (21)

$$(26) \quad 27\sigma u_\infty u'_\infty + f_{\tau\tau\tau} - f_\tau^2 + 2ff_{\tau\tau} - \sigma f_\tau f_{\tau\sigma} + \sigma f_\sigma f_{\tau\tau} = 0$$

und die Randbedingungen (23a/b) gehen über in

$$(27a) \quad f_\tau(\sigma, 0) = 0 \quad f(\sigma, 0) = \sigma^{-2} C_0(\sigma^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n+1} \sigma^{3n+1}$$

$$(27b) \quad \sigma f_\tau(\sigma, \infty) = 3u_\infty(\sigma^3) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma^{3n}$$

Hier ist nun $f(\sigma, \tau)$ in einer Umgebung von $\sigma = 0$ nicht mehr völlig festgelegt. Macht man nämlich, um dies einzusehen, wieder einen Potenzreihenansatz der Form (25), so ergibt sich zum Beispiel für $f_0(\tau)$ die Differentialgleichung

$$f_0''' + f_0 f_0'' - f_0'^2 = 0$$

mit den Randbedingungen

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0.$$

Die äußere Randbedingung (27b) dagegen verliert ihren Sinn und muß gestrichen werden. Damit ist aber $f_0(\tau)$ nicht mehr eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt für die anderen Koeffizienten $f_n(\tau)$. Jedesmal fehlt bei ihren Differentialgleichungen eine Randbedingung und es steht uns noch frei, sie geeignet zu wählen. Natürlich wird man versuchen, durch diese Wahl doch noch das Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ zu berücksichtigen, so wie dies S. GOLDSTEIN beim Nachlauf hinter der ebenen

Platte durchgeführt hat. Hierzu setzen wir vorübergehend $\sigma = y/3\tau$, gehen also in ein τ, y -Koordinatensystem über. Dann folgt aus (20) und (25)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_{n-1}(\tau)}{3^{n+1}\tau^n} y^n.$$

Da bei festem y der Grenzübergang $x \rightarrow 0$ im τ, y -Koordinatensystem $\tau \rightarrow \infty$ bedeutet, so geht (14c) und (15) über in

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_{n-1}(\tau)}{3^{n+1}\tau^n} y^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n,$$

was bei (vorauszusetzender) gleichmäßiger Konvergenz der Reihen

$$(28) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f'_{n-1}(\tau)}{\tau^n} = 3^{n+1} a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ergibt. Diese Relation läßt sich ohne weiteres als äußere Randbedingung für die $f_n(\tau)$ verwenden.

Der Wegfall der früheren äußeren Randbedingung $u(x, \infty) = u_{\infty}(x)$ ist für die weitere Rechnung ohne Belang. Denn wie schon in §1 gesagt, ist diese Randbedingung in einem Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ unter gewissen Voraussetzungen stets von selbst erfüllt, wenn nur die Strömung dem Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ entspricht—was wir durch (28) erreichen—und wenn für dieses Einlaufprofil

$$(29) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(y) = u_{\infty}(x_0)$$

gilt—was natürlich schon auf Grund der Vorgeschichte der Strömung der Fall sein muß. Wir werden hierauf in §5 noch näher eingehen.

Um nun die Differentialgleichungen für die Koeffizienten $f_n(\tau)$ im einzelnen zu finden, haben wir mit den Ansätzen (16) und (25) in die Differentialgleichung (26) einzugehen. Schreiben wir hierbei abkürzend

$$(30) \quad p_n = \sum_{m=0}^n (m+1) u_{m+1} u_{n-m},$$

also

$$(31) \quad u_{\infty} u'_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sigma^{3n},$$

so ergibt sich nach Koeffizientenvergleich

$$(32) \quad \begin{aligned} f_0''' + 2f_0 f_0'' - f_0'^2 &= 0 \\ f_n''' + 2f_0 f_n'' - (n+2)f_0' f_n' + (n+2)f_0'' f_n &= F_n(\tau) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

mit

$$(33) \quad F_n(\tau) = \sum_{m=1}^{n-1} [(m+1)f_m' f_{n-m}' - (m+2)f_m f_{n-m}''] - \begin{cases} 27p_i & \text{für } n = 3j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dieses unendliche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann rekursiv gelöst werden.

Als Randbedingungen bekommen wir aus (27a) und (28) für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(34a) \quad f_n(0) = \begin{cases} v_i & \text{für } n = 3j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(34b) \quad f'_n(0) = 0$$

$$(34c) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f'_n(\tau)}{\tau^{n+1}} = 3^{n+2} a_{n+1}.$$

Die erste Gleichung (32) läßt sich unmittelbar integrieren. Man findet als Lösung zu den Randbedingungen (34)

$$(35) \quad f_0(\tau) = \frac{9}{2} a_1 \tau^2.$$

Führt man dies in die anderen Gleichungen (32) ein, so ist es zweckmäßig, gleichzeitig als neue Variable

$$(36) \quad \eta = \sqrt[3]{9a_1} \tau, \quad f_n(\tau) \equiv g_n(\eta) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

zu wählen. Hiermit erhalten wir für $n = 1, 2, \dots$ die Folge der linearen Differentialgleichungen

$$(37) \quad g_n''' + \eta^2 g_n'' - (n+2)\eta g_n' + (n+2)g_n = G_n(\eta)$$

mit

$$(38) \quad G_n(\eta) = \frac{1}{\sqrt[3]{9a_1}} \sum_{m=1}^{n-1} [(m+1)g'_m g'_{n-m} - (m+2)g_m g''_{n-m}] - \begin{cases} 27p_i & \text{für } n = 3j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Randbedingungen

$$(39a) \quad g_n(0) = \begin{cases} v_i & \text{für } n = 3j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(39b) \quad g'_n(0) = 0$$

$$(39c) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{g'_n(\eta)}{\eta^{n+1}} = \left[\frac{3}{\sqrt[3]{9a_1}} \right]^{n+2} a_{n+1}.$$

§3 Über die Lösungen der homogenen Gleichungen (37)

Für das Weitere ist es wichtig, die volle Lösungsmannigfaltigkeit der zu den Differentialgleichungen (37) gehörigen homogenen Gleichungen

$$(40) \quad g_n''' + \eta^2 g_n'' - \eta(n+2)g_n' + (n+2)g_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

zu kennen und auch das asymptotische Verhalten dieser Lösungen für große η zu beherrschen.

Zunächst sieht man sofort, daß stets $g_n = \eta$ eine Lösung von (40) sein muß. Damit läßt sich (40) durch den Ansatz

$$g_n = \eta \int \bar{g}_n(\eta) d\eta$$

auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(41) \quad \eta \bar{g}_n''(\eta) + (3 + \eta^2) \bar{g}_n'(\eta) - n\eta^2 \bar{g}_n(\eta) = 0$$

für eine neue gesuchte Funktion $\bar{g}_n(\eta)$ zurückführen. (41) wiederum geht in die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen

$$(42) \quad \xi w''(\xi) + (b - \xi)w'(\xi) - aw(\xi) = 0$$

über, wenn man

$$\xi = -\frac{1}{3}\eta^3, \quad w = \bar{g}_n \quad \text{und} \quad a = -\frac{1}{3}n, \quad b = \frac{5}{3}$$

setzt. Ist also $w(\xi)$ eine Lösung von (42) mit $a = -\frac{1}{3}n$, $b = \frac{5}{3}$, so stellt $\bar{g}_n(\eta) = w(-\frac{1}{3}\eta^3)$ eine Lösung von (41) dar.

Die Differentialgleichung (42) besitzt bekanntlich die zwei linear unabhängigen Lösungen

$$w_1(\xi) = {}_1F_1(a, b, \xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{\xi^n}{n!}$$

$$w_2(\xi) = \xi^{1-b} {}_1F_1(a - b + 1; 2 - b; \xi),$$

wobei abkürzend $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$; $(a)_0 = 1$ geschrieben wurde. Damit sind

$$h_n(\eta) = \eta \int {}_1F_1(-\frac{1}{3}n, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\eta^3) d\eta$$

$$(43) \quad k_n(\eta) = \eta \int \eta^{-2} {}_1F_1(-\frac{1}{3}(n+2), \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\eta^3) d\eta$$

$$= 1 + \eta \int \eta^{-2} [{}_1F_1(-\frac{1}{3}(n+2), \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\eta^3) - 1] d\eta$$

zwei Lösungen von (40). Diese Lösungen sind beide ganz-analytische Funktionen von η . Bei $h_n(\eta)$ ist das unmittelbar ersichtlich, da bekanntlich ${}_1F_1(a, b, \xi)$ diese Eigenschaft hat. Bei $k_n(\eta)$ folgt es aus der zweiten Darstellung, da auch hier der Integrand ganz-analytisch ist. Überdies sind die drei gefundenen Lösungen η , $h_n(\eta)$, $k_n(\eta)$ von (40) linear unabhängig. Das ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß die Potenzreihenentwicklung von $h_n(\eta)$ die Form

$$(44) \quad h_n(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n(n-3) \cdots (n-3(m-1))}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (5+3(m-1))} \frac{\eta^{3m+2}}{3^m m! (3m+1)}$$

hat, also mit η^2 anfängt, während diejenige von $k_n(\eta)$ —wie man leicht nachrechnet—mit 1 beginnt.

Um nun die asymptotischen Entwicklungen der Funktionen $h_n(\eta)$ und $k_n(\eta)$ zu finden, wird man zunächst versuchen, für ${}_1F_1$ die bekannte asymptotische Entwicklung in (43) einzutragen und dann zu integrieren. Auf diese Weise bleiben jedoch die konstanten Glieder der gesuchten Entwicklungen unbestimmt. Man muß also anders vorgehen. Dazu wollen wir die Funktionen $h_n(\eta)$ und $k_n(\eta)$ zunächst durch gewisse Integrale vom Mellin-Typus darstellen, die sich dann—wie wir sehen werden—in der gewünschten Weise auswerten lassen.⁶⁾

Wie man etwa aus den bei E. WHITTAKER und G. N. WATSON [13] angegebenen Formeln bestätigt, gilt für die konfluente hypergeometrische Funktion für $\Re \xi > 0$ und beliebige, nicht negativ-ganzzahlige a, b die Darstellung

$$(45) \quad {}_1F_1(a, b, \xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\Gamma(z)\Gamma(a-z)}{\Gamma(b-z)} \xi^{-z} dz.$$

⁶⁾Diese Methode wird häufig in der Theorie der hypergeometrischen Funktionen verwendet.

Hierbei muß der Integrationsweg die beiden von $\Gamma(z)$ und $\Gamma(a - z)$ herrührenden Polketten trennen, dann konvergiert auch das Integral gleichmäßig. Trägt man dies in (43) ein und vertauscht, was offenbar erlaubt ist, die Reihenfolge der Integrationen, so erhält man die Darstellungen

$$(46) \quad \begin{aligned} h_n(\eta) &= \eta \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}n)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\Gamma(z)\Gamma(-\frac{1}{3}n - z)}{\Gamma(\frac{5}{3} - z)} \frac{\eta^{-3z+1}}{3^{-z}(-3z+1)} dz \\ k_n(\eta) &= \eta \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}(n+2))} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\Gamma(z)\Gamma(-\frac{1}{3}(n+2) - z)}{\Gamma(\frac{1}{3} - z)} \frac{\eta^{-3z+1}}{3^{-z}(-3z+1)} dz. \end{aligned}$$

Um hieraus die gesuchten asymptotischen Entwicklungen abzuleiten, werden die Integrale erst über einen ganz im Endlichen gelegenen Weg W berechnet; dann lassen sich ihre Werte abschätzen, wenn W stückweise ins Unendliche übergeht. Der Weg W soll in der Ebene von $z = \zeta + i\vartheta$ die nebenstehend gezeichnete Form haben. Dabei mögen durch $\times$ Pole von $\Gamma(z)$ und durch $\circ$ Pole von $\Gamma(-\frac{1}{3}n - z)$ bzw. $\Gamma(-\frac{1}{3}(n+2) - z)$ bezeichnet sein. Der Punkt M habe für das erste Integral den Wert $-\frac{1}{3}n + m + \chi$ und für das zweite $-\frac{1}{3}(n+2) + m + \chi$ ($m = 2, 3, \dots$), mit einer geeigneten reellen Zahl χ zwischen Null und Eins.

Die Integrale (46), erstreckt über W , lassen sich nach dem Residuensatz sofort berechnen. Im Inneren von W sind nämlich beide Integranden für $\Re \eta > 0$ sicher regulär, abgesehen von den Polen in

$$-\frac{1}{3}n, -\frac{1}{3}n + 1, \dots, -\frac{1}{3}n + m \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} \quad (m = 2, 3, \dots; n = 1, 2, \dots)$$

bzw.

$$-\frac{1}{3}(n+2), -\frac{1}{3}(n+2) + 1, \dots, -\frac{1}{3}(n+2) + m \quad \text{und} \quad -\frac{1}{3}$$

Für $n \neq 3j - 1$ (j nat. Zahl) ist der Pol in $\frac{1}{3}$ bzw. $-\frac{1}{3}$ von den übrigen verschieden und wie diese von erster Ordnung. Man erhält also nach dem Residuensatz in diesem Falle

$$(47a) \quad \begin{aligned} \eta \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}n)} \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\Gamma(z)\Gamma(-\frac{1}{3}n - z)}{\Gamma(\frac{5}{3} - z)} \frac{\eta^{-3z+1}}{3^{-z}(-3z+1)} dz \\ = \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{3^{\frac{1}{3}n}\Gamma(\frac{1}{3}(n+5))} \sum_{\nu=0}^m \frac{(-\frac{1}{3}n)_{\nu}(-\frac{1}{3}(n+2))_{\nu}}{\nu!(n+1-3\nu)} 3^{\nu} \eta^{n+2-3\nu} \\ + \frac{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(-\frac{1}{3}(n+1))}{\Gamma(-\frac{1}{3}n)} \eta \end{aligned}$$

bzw.

$$(48a) \quad \begin{aligned} \eta \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}(n+2))} \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\Gamma(z)\Gamma(-\frac{1}{3}(n+2) - z)}{\Gamma(\frac{1}{3} - z)} \frac{\eta^{-3z+1}}{3^{-z}(-3z+1)} dz \\ = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{3^{\frac{1}{3}(n+2)}\Gamma(\frac{1}{3}n+1)} \sum_{\nu=0}^m \frac{(-\frac{1}{3}(n+2))_{\nu}(-\frac{1}{3}n)_{\nu}}{\nu!(n+1-3\nu)} 3^{\nu} \eta^{n+2-3\nu} \\ - \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(-\frac{1}{3}(n+1))}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(-\frac{1}{3}(n+2))} \eta \end{aligned}$$

Im Fall $n = 3j - 1$ fällt der Pol in $-\frac{1}{3}n + j$ (bzw. $-\frac{1}{3}(n + 2) + j$) mit dem Pol in $\frac{1}{3}$ (bzw. $-\frac{1}{3}$) zusammen. Damit verschwindet in (47a) bzw. (48a) das Glied mit $\nu = j$ und das Zusatzglied ändert sich bei (47a) in

$$(47b) \quad \eta \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}n)} \operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(z)\Gamma(-\frac{1}{3}n - z)\eta^{-3z+1}}{\Gamma(\frac{5}{3} - z)3^{-z}(-3z + 1)}$$

$$= \eta \frac{\Gamma(\frac{5}{3})3^{\frac{1}{3}}(-1)^j}{\Gamma(\frac{1}{3} - j)\Gamma(j + 1)} [\ln \frac{1}{3}\eta^3 + \bar{\psi}(j + 1) - \bar{\psi}(\frac{1}{3}) - \bar{\psi}(\frac{4}{3})]$$

und bei (48a) entsprechend in

$$(48b) \quad -\eta \frac{\Gamma(\frac{1}{3})(-1)^j}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(-\frac{1}{3} - j)\Gamma(j + 1)} [\ln \frac{1}{3}\eta^3 + \bar{\psi}(j + 1) - \bar{\psi}(\frac{2}{3}) - \bar{\psi}(\frac{1}{3})]$$

Hierin bedeutet $\bar{\psi}$ die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion.

Wir wollen zur Abkürzung die bei $\nu = m$ abgebrochene Entwicklung auf der rechten Seite von (47a) mit $\tilde{h}_{n,m}(\eta)$ und von (48a) mit $\tilde{k}_{n,m}(\eta)$ bezeichnen, wobei natürlich für $n = 3j - 1$ die Änderungen (47b) bzw. (48b) berücksichtigt sein sollen. Dann lautet unsere Behauptung, daß $\tilde{h}_{n,\infty}(\eta)$ bzw. $\tilde{k}_{n,\infty}(\eta)$ in einem Winkelbereich der Form

$$\Omega: \quad \Re \eta > 0 \quad |\arg \eta| < \frac{1}{6}\pi - \epsilon \quad (\epsilon > 0 \text{ klein})$$

gerade die gesuchten asymptotischen Entwicklungen von $h_n(\eta)$ bzw. $k_n(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ sind. Da der Beweis hierfür bei beiden Funktionen völlig analog verläuft, beschränken wir uns darauf, ihn für $h_n(\eta)$ durchzuführen.

Zunächst kann man das Integral auf der linken Seite von (47a) in folgender Weise aufspalten:

$$(49) \quad \int_W = \int_{-i\theta}^{+i\theta} \underset{(I)}{+} \int_{+i\theta}^{-\frac{1}{3}n+m+\chi+i\theta} \underset{(II)}{+} - \int_{-\frac{1}{3}n+m+\chi-i\theta}^{-\frac{1}{3}n+m+\chi+i\theta} \underset{(III)}{-} - \int_{-i\theta}^{-\frac{1}{3}n+m+\chi-i\theta} \underset{(IV)}{+}$$

Wir wollen zeigen, daß für festes m und jedes η aus dem Winkelbereich Ω die beiden Integrale (II) und (IV) für $\theta \rightarrow \infty$ verschwinden. Bezeichnen wir dazu abkürzend den Integranden mit $I(z, \eta)$, also

$$I(z, \eta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(-\frac{1}{3}n - z)}{\Gamma(\frac{5}{3} - z)} \frac{\eta^{-3z+1}}{3^{-z}(-3z + 1)}$$

dann wird unter Benutzung der Stirlingschen Formel

$$I(z, \eta) = \sqrt{2\pi} e^{(z-\frac{1}{2})\ln z} \cdot e^{-z} \cdot e^{(-\frac{1}{3}n-5/3)\ln(-z)} 3^{-z} \frac{e^{(-3z+1)\ln \eta}}{(-3z + 1)} e^{\mu(z)}$$

mit $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \mu(z) = 0$, also

$$(50) \quad |I(z, \eta)| = \sqrt{2\pi} e^{(\zeta - \frac{1}{2}) \ln |z| - \vartheta \arg z} e^{-\zeta} e^{(-\frac{1}{2}n - 5/3) \ln |z|} \cdot e^{(-3\zeta + 1) \ln |\eta| + 3\vartheta \arg \eta} \cdot \frac{e^{\zeta \ln 3}}{|-3z + 1|} e^{\Re \mu(z)}$$

Für den Logarithmus ist stets der Hauptwert zu nehmen, d.h. es ist $|\arg z| < \pi$ und $\vartheta \arg z$ stets positiv. Damit wird

$$|I(z, \eta)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{3\zeta + 1} |z|^{\zeta - \frac{1}{2}n - 5/3 - \frac{1}{2}} e^{-\zeta(1 - \ln 3 + 3 \ln |\eta|) + \ln |\eta| + \Re \mu(z)} e^{-|\vartheta| (|\arg z| + 3 \arg \eta)}$$

wobei für $\vartheta < 0$ das obere, für $\vartheta > 0$ das untere Vorzeichen gelten soll. Wegen $|\arg z| \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ für $\theta \rightarrow \infty$ auf den Integrationsstrecken der Integrale (II) und (IV) und wegen $|\arg \eta| < \frac{1}{6}\pi - \epsilon$ läßt sich für jedes feste $\eta \in \Omega$ bei vorgegebenem $\delta > 0$ sicher ein $\theta_0 > 0$ so finden, daß

$$0 < 2\delta < |\arg z| \pm 3 \arg \eta$$

für alle $\theta > \theta_0$ und jedes Vorzeichen erfüllt ist. Ferner gelten im ganzen Streifen

$$0 < \zeta < -\frac{1}{3}n + m + \chi, \quad \vartheta \text{ beliebig}$$

für festes $\eta \in \Omega$ offenbar die Abschätzungen

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{3\zeta + 1} e^{-\zeta(1 - \ln 3 + 3 \ln |\eta|) + \ln |\eta| + \Re \mu(z)} < C_1$$

und

$$|z|^{\zeta - \frac{1}{2}n - 5/3 - \frac{1}{2}} < C_2 |\vartheta|^{-\frac{1}{2}n - 5/3 - \frac{1}{2}}$$

Damit wird

$$|I(z, \eta)| < C_1 \cdot C_2 |\vartheta|^{-\frac{1}{2}n - 5/3 - \frac{1}{2}} e^{-2\delta |\vartheta|}$$

und wenn man θ_0 so groß wählt, daß

$$|\vartheta|^{-\frac{1}{2}n - 5/3 - \frac{1}{2}} < e^{\delta |\vartheta|}$$

ist, schließlich

$$|I(z, \eta)| < \text{const} \cdot e^{-\delta |\vartheta|}$$

Für $0 < \zeta < -\frac{1}{3}n + m + \chi$ und festes $\eta \in \Omega$ konvergieren also die Integrale (II) und (IV) über die Horizontalstrecken des Weges W für $\theta \rightarrow \infty$ gegen Null.

Damit wird nun für $\theta \rightarrow \infty$ aus (49)

$$\int_W = \int_{-i\infty}^{+i\infty} - \int_{-\frac{1}{3}n+m+\chi-i\infty}^{-\frac{1}{3}n+m+\chi+i\infty}$$

oder wenn man die Integralwerte einsetzt

$$(51) \quad \tilde{h}_{n,m}(\eta) = h_n(\eta) - \eta \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}n)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{3}n+m+\chi-i\infty}^{-\frac{1}{3}n+m+\chi+i\infty} I(z, \eta) dz$$

Um nun zu zeigen, daß $\tilde{h}_{n,\infty}(\eta)$ für $\eta \in \Omega$ die asymptotische Entwicklung von $h_n(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ ist, müssen wir nachweisen, daß für jedes feste m

$$(52) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} [h_n(\eta) - \tilde{h}_{n,m}(\eta)] \eta^{-n+3m-2} = 0$$

gilt. Dazu haben wir—wegen (51)—das Integral

$$(53) \quad [h_n(\eta) - \tilde{h}_{n,m}(\eta)] \eta^{-n+3m-2} = \eta^{-n+3m-1} \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(-\frac{1}{3}n)} \int_{-\frac{1}{3}n+m+\chi-i\infty}^{-\frac{1}{3}n+m+\chi+i\infty} I(z, \eta) dz$$

für festes m und $\eta \rightarrow \infty$ ($\eta \in \Omega$) abzuschätzen. Zunächst ist, wenn wir abkürzend

$$M = -\frac{1}{3}n + m + \chi$$

schreiben

$$(54) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} I(z, \eta) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |I(M + i\vartheta, \eta)| d\vartheta$$

Aus (50) folgt dann

$$|I(M + i\vartheta, \eta)| = H(\eta) \frac{e^{(M-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(n+5)) \ln |M+i\vartheta|} e^{-\vartheta (\arg(M+i\vartheta) - 3\arg \eta)} e^{3\mu(M+i\vartheta)}}{|-3(M+i\vartheta) + 1|}$$

mit

$$H(\eta) = \sqrt{2\pi} e^{-M(1-\ln 3)} |\eta|^{-3M+1}$$

$H(\eta)$ kann man vor das Integral ziehen, der Rest läßt sich analog wie früher abschätzen durch

$$|I(M + i\vartheta, \eta)| \leq H(\eta) C |M + i\vartheta|^{M-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(n+5)} e^{-|\vartheta| (|\arg(M+i\vartheta)| - 3\arg \eta)}$$

wo C eine Konstante ist und das obere Vorzeichen wieder für $\vartheta < 0$, das untere für $\vartheta > 0$ gilt. Wir spalten nun das Integral (54) auf in

$$(55) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} I(z, \eta) dz \right| \leq \frac{C}{2\pi} H(\eta) \left[\int_{-\infty}^{-\theta_0} I^*(\vartheta, \eta) d\vartheta + \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} I^*(\vartheta, \eta) d\vartheta + \int_{\theta_0}^{\infty} I^*(\vartheta, \eta) d\vartheta \right]$$

mit

$$I^*(\vartheta, \eta) = |M + i\vartheta|^{M-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(n+5)} e^{-|\vartheta| (|\arg(M+i\vartheta)| - 3\arg \eta)}$$

Wie oben ist nun wieder wegen $|\arg \eta| < \frac{1}{6}\pi - \epsilon$ und $|\arg (M + i\vartheta)| \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ für $\vartheta \rightarrow \infty$ bei vorgegebenem $\delta > 0$ ein $\theta_0 > 0$ so zu finden, daß

$$0 < 2\delta < |\arg (M + i\vartheta)| \pm 3 \arg \eta$$

für alle $|\vartheta| > \theta_0$ und jedes Vorzeichen gilt. Damit folgt auf dieselbe Weise

$$I^*(\vartheta, \eta) < C e^{-\delta |\vartheta|} \quad \text{für } |\vartheta| > \theta_0, \quad m \text{ fest,} \quad \eta \in \Omega$$

d.h. die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite von (55) sind sicher beschränkt. Für das eigentliche Integral gilt dies natürlich auch und wir bekommen also insgesamt aus (53)

$$|h_n(\eta) - \tilde{h}_{n,m}(\eta)| |\eta|^{-n+3m-2} \leq \text{const } |\eta|^{-n+3m-1} H(\eta) \leq \text{const } |\eta|^{-3\epsilon}$$

Damit ist nun aber tatsächlich (52) für jedes feste m und $|\eta| \rightarrow \infty$ mit $\eta \in \Omega$ erfüllt, d.h. $\tilde{h}_{n,\infty}(\eta)$ ist, wie behauptet in Ω die asymptotische Entwicklung von $h_n(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$.

Genauso beweist man, daß auch $\tilde{k}_{n,\infty}(\eta)$ die asymptotische Entwicklung von $k_n(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ mit $\eta \in \Omega$ darstellt.

Für später merken wir noch an, daß

$$(56) \quad \tilde{k}_{n,\infty}(\eta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^2}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})^2} \tilde{h}_{n,\infty}(\eta) + \frac{4\Gamma(\frac{1}{3})}{3^{7/3}\Gamma(\frac{2}{3})} (\bar{\psi}(\frac{1}{3}) - \bar{\psi}(\frac{1}{3}))\eta$$

ist, wie man leicht nachrechnet. Dies bedeutet, daß es Lösungen von (40) gibt, die für $\eta \rightarrow \infty$ asymptotisch Null sind.

§4 Die Lösung der inhomogenen Gleichungen für die ersten Koeffizienten $f_n(\tau)$.

a) Funktion $f_1(\tau)$

Unter Verwendung der Variablen $\eta = \sqrt[3]{9a_1}\tau$ gilt gemäß (37) und (39) für den Koeffizienten $f_1(\tau) = g_1(\eta)$ die Differentialgleichung

$$(57) \quad g_1''' + \eta^2 g_1'' - 3\eta g_1' + 3g_1 = -3 \frac{p_0}{a_1}$$

unter den Randbedingungen

$$(58) \quad g_1(0) = v_0 \quad (>0), \quad g_1'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{g_1'(\eta)}{\eta^2} = 3 \frac{a_2}{a_1}$$

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung (57), welche den ersten beiden Randbedingungen (58) genügt, findet man mit einem Polynomansatz dritter Ordnung zu

$$v_0 - \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1} \eta^3$$

Also lautet gemäß §3 die allgemeinste Lösung von (57), welche jene beiden Randbedingungen erfüllt

$$(59) \quad g_1(\eta) = v_0 - \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1} \eta^3 + \delta_1 h_1(\eta).$$

Die Konstante δ_1 ist durch die dritte Randbedingung (58) zu bestimmen. Gemäß (47a) lautet die asymptotische Entwicklung von $h_1(\eta)$

$$(60) \quad h_1(\eta) \sim \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}} \eta^3 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3})\eta - \frac{2\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}}$$

also gilt für $\eta \rightarrow \infty$

$$(61) \quad g_1(\eta) \sim \left[\delta_1 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1} \right] \eta^3 + \delta_1 \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3})\eta - \left[\delta_1 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}} - v_0 \right]$$

Wir brauchen zur Festlegung von δ_1 die asymptotische Entwicklung von $g_1'(\eta)/\eta^2$. Nach einem bekannten Satz⁷⁾ stellt die formal differenzierte asymptotische Entwicklung von $g_1(\eta)$ die asymptotische Entwicklung von $g_1'(\eta)$ dar, wenn $g_1'(\eta)$ überhaupt eine solche Entwicklung besitzt. Dies ist aber der Fall, denn aus (59) ergibt sich zunächst

$$g_1'(\eta) = -3 \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1} \eta^2 + \delta_1 h_1'(\eta)$$

⁷⁾Siehe etwa K. KNOPP [14] oder E. BOREL [15].

und

$$h_1'(\eta) = \int {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\eta^3\right) d\eta + \eta {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\eta^3\right)$$

besitzt nach §3 sicher eine asymptotische Entwicklung. Damit ist klar, daß

$$g_1'(\eta) \sim 3\left(\delta_1 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1}\right)\eta^2 + \delta_1 \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3})$$

also

$$\frac{g_1'(\eta)}{\eta^2} \sim 3\left(\delta_1 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1}\right) + \frac{1}{\eta^2} \delta_1 \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3})$$

gilt. Lassen wir hierin $\eta \rightarrow \infty$ gehen, so erhalten wir unter Benutzung der dritten Randbedingung (58)

$$3\left(\delta_1 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{a_1 v_0 + p_0}{2a_1}\right) = 3 \frac{a_2}{a_1}$$

oder

$$(62) \quad \delta_1 = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0\right) = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \delta_1^*$$

mit

$$\delta_1^* = \frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0$$

Zur numerischen Berechnung von $g_1(\eta)$ brauchen wir lediglich die Funktion $h_1(\eta)$ zu vertafeln. Man wird als erstes versuchen, dies durch numerische Integration der Differentialgleichung

$$h_1''' + \eta^2 h_1'' - 3\eta h_1' + 3h_1 = 0$$

unter den Anfangsbedingungen

$$h_1(0) = h_1'(0) = 0, \quad h_1''(0) = 2$$

zu erreichen. Für diese Differentialgleichung sind aber leider Fortsetzungsverfahren, wie etwa das von ADAMS oder RUNGE & KUTTA, instabil. Das liegt an den mit η wachsenden Koeffizienten, die überdies verschiedene Vorzeichen besitzen. Daher darf man, um nicht zuviel Genauigkeit zu verlieren, nur ein kurzes Stück mit diesen Verfahren arbeiten, d.h. man muß so weit wie möglich die Potenzreihe (44), also

$$(63) \quad h_1(\eta) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\eta^{3m+2}}{(3m-1)(3m+1)(3m+2)3^m m!}$$

verwenden. Wir haben mit Hilfe von (63) die Funktion

$$\bar{h}_1(\eta) = \frac{1}{2}h_1(\eta)$$

sowie ihre ersten beiden Ableitungen—bei erträglichem Rechenaufwand—im Intervall $0 \leq \eta \leq 2,5$ berechnet. Für $2,5 \leq \eta \leq 3,0$ wurde dann das Adams-Verfahren benutzt und bei $\eta = 3,0$ zeigte sich bereits bis auf 5 Stellen hinter dem Komma Übereinstimmung mit den Werten der Entwicklung (60). Die Vertafelung von $\bar{h}_1'(\eta)$ für $0 \leq \eta \leq 6,0$ ist im Anhang wiedergegeben.

Für spätere Zwecke brauchen wir noch die asymptotische Entwicklung der Funktion $f_1(\tau)$. Sie ergibt sich unmittelbar aus (61) zu

$$(64) \quad f_1(\tau) \sim B_{13}\tau^3 + B_{11}\tau + B_{10}$$

mit

$$B_{13} = 9a_2 \quad B_{11} = \frac{3\Gamma(\frac{1}{3})}{2\sqrt[3]{3}\Gamma(\frac{2}{3})} \sqrt[3]{9a_1} \delta_1^* \quad B_{10} = -\frac{2a_2 + p_0}{a_1}$$

b) Funktion $f_2(\tau)$.

Für den Koeffizienten $g_2(\eta) = f_2(\tau)$ folgt aus (37) und (39) die Differentialgleichung

$$(65) \quad g_2'' + \eta^2 g_2'' - 4\eta g_2' + 4g_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{9a_1}} (-3g_1 g_1'' + 2g_1'^2)$$

mit den Randbedingungen

$$(66) \quad g_2(0) = g_2'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{g_2'(\eta)}{\eta^3} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot 3a_3}{a_1^{4/3}}$$

Damit die zur Berechnung von $g_2(\eta)$ zu vertafelnden Funktionen unabhängig von den Daten des speziellen Problems werden, spalten wir die rechte Seite von (65) folgendermaßen auf:

$$(67) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{9a_1}} (-3g_1 g_1'' + 2g_1'^2) &= \frac{\delta_1^2}{\sqrt[3]{9a_1}} (-3h_1 h_1'' + 2h_1'^2) \\ &+ \sqrt[3]{3} \delta_1 \frac{a_1 v_0 + p_0}{a_1^{4/3}} \left(\frac{h_1''}{2} \eta^3 - 2h_1' \eta^2 + 3h_1 \eta \right) \\ &- \frac{\sqrt[3]{3} \delta_1 v_0}{a_1^{1/3}} h_1'' + 3 \sqrt[3]{3} v_0 \frac{a_1 v_0 + p_0}{a_1^{4/3}} \eta \end{aligned}$$

und betrachten entsprechend die Differentialgleichungen

$$(68a) \quad \gamma_1''' + \eta^2 \gamma_1'' - 4\eta \gamma_1' + 4\gamma_1 = -3h_1 h_1'' + 2h_1'^2$$

$$(68b) \quad \gamma_2''' + \eta^2 \gamma_2'' - 4\eta \gamma_2' + 4\gamma_2 = \frac{h_1''}{2} \eta^2 - 2h_1' \eta^2 + 3h_1 \eta$$

$$(68c) \quad \gamma_3''' + \eta^2 \gamma_3'' - 4\eta \gamma_3' + 4\gamma_3 = h_1''$$

$$(68d) \quad \gamma_4''' + \eta^2 \gamma_4'' - 4\eta \gamma_4' + 4\gamma_4 = \eta$$

jeweils unter den Anfangsbedingungen

$$(69) \quad \gamma_\nu(0) = \gamma_\nu'(0) = \gamma_\nu''(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

Für die Gleichung (68d) ergibt sich als Lösung dieses Anfangswertproblems

$$(70) \quad \gamma_4(\eta) = \frac{\eta^4}{24}$$

Es seien $\gamma_1 = \gamma_1(\eta)$, $\gamma_2 = \gamma_2(\eta)$, $\gamma_3 = \gamma_3(\eta)$ die gesuchten Lösungen der anderen Gleichungen. Dann ist offenbar

$$(71) \quad \begin{aligned} \bar{g}_2(\eta) = & \frac{\delta_1^2}{\sqrt[3]{9a_1}} \gamma_1(\eta) + \sqrt[3]{3} \delta_1 \frac{a_1 v_0 + p_0}{a_1^{4/3}} \gamma_2(\eta) \\ & - \frac{\sqrt[3]{3} \delta_1 v_0}{a_1^{\frac{1}{3}}} \gamma_3(\eta) + 3 \sqrt[3]{3} \frac{a_1 v_0 + p_0}{a_1^{4/3}} \frac{\eta^4}{24} \end{aligned}$$

eine Lösung von (65) mit $\bar{g}_2(0) = \bar{g}_2'(0) = \bar{g}_2''(0) = 0$ und demzufolge stellt

$$(72) \quad g_2(\eta) = \bar{g}_2(\eta) + \delta_2 h_2(\eta)$$

die allgemeinste Lösung von (65) dar, welche die ersten beiden Randbedingungen erfüllt.

Um δ_2 zu bestimmen, haben wir wieder das asymptotische Verhalten der Lösung $g_2(\eta)$ zu untersuchen. Zunächst ist gemäß (47a/b) für $\eta \rightarrow \infty$

$$(73) \quad \begin{aligned} h_2(\eta) \sim \tilde{h}_{2,\infty}(\eta) \equiv & \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{6\Gamma(\frac{1}{3})} \eta^4 \\ & + \frac{4 \sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{9\Gamma(\frac{1}{3})} [-\ln 3 + \bar{\psi}(2) - \bar{\psi}(\frac{1}{3}) - \bar{\psi}(\frac{4}{3})] \eta \\ & + \frac{4 \sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{3\Gamma(\frac{1}{3})} \eta \ln \eta \\ & + \frac{4 \sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{3\Gamma(\frac{1}{3})} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[1 \cdot 4 \cdots (3n-5)][(-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-7)]}{n! 3^n (1-n)\eta^{3n-4}} \end{aligned}$$

Es kommt also darauf an, Aussagen über das asymptotische Verhalten von $\gamma_1(\eta)$, $\gamma_2(\eta)$, $\gamma_3(\eta)$ zu gewinnen. Dazu verwenden wir eine Schlußweise aus der Poincaréschen Theorie der asymptotischen Reihen⁸⁾. Ersetzt man in den drei Differentialgleichungen (68a-c) die rechten Seiten jeweils durch ihre asymptotischen Entwicklungen, so entstehen die zugehörigen sogenannten asymptoti-

⁸⁾Siehe etwa E. BOREL [15].

schen Differentialgleichungen

$$(74a) \quad \tilde{\gamma}_1''' + \eta^2 \tilde{\gamma}_1'' - 4\eta \tilde{\gamma}_1' + 4\tilde{\gamma}_1 = -\frac{2}{3} \Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{2}{3}) \eta^2 + 4 \left[\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{3}} \right]^2 \eta + \frac{2}{3} (\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3}))^2$$

$$(74b) \quad \tilde{\gamma}_2''' + \eta^2 \tilde{\gamma}_2'' - 4\eta \tilde{\gamma}_2' + 4\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3}) \eta^2 - \frac{2\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{3}} \eta$$

$$(74c) \quad \tilde{\gamma}_3''' + \eta^2 \tilde{\gamma}_3'' - 4\eta \tilde{\gamma}_3' + 4\tilde{\gamma}_3 = \frac{2\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{3}} \eta$$

Es ist nun sofort einzusehen, daß die asymptotische Entwicklung einer Lösung von (68)⁹⁾ formal die entsprechende asymptotische Gleichung (74) erfüllen muß. Für jede dieser Gleichungen läßt sich sofort ein partikuläres Integral angeben, nämlich

$$(75a) \quad \tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{6} \left[\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{3}} \right]^2 \eta^4 + \frac{1}{3} \Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{2}{3}) \eta^2 + \frac{1}{18} (\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3}))^2$$

$$(75b) \quad \tilde{\gamma}_2 = -\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{12 \sqrt[3]{3}} \eta^4 - \frac{1}{6} \sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{1}{3}) \eta^2$$

$$(75c) \quad \tilde{\gamma}_3 = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{12 \sqrt[3]{3}} \eta^4$$

Hieraus erhalten wir die vollständigen Lösungen von (74) durch Addition einer beliebigen Linearkombination der drei Lösungen $h_2(\eta)$, $k_2(\eta)$, η der zugehörigen homogenen Gleichung. Diese Linearkombinationen sind wegen (56) für $\eta \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich $\bar{c}_1 \tilde{h}_{2,\infty}(\eta) + \bar{c}_2 \eta$ zuzüglich einer Nullentwicklung

$$\bar{c}_3 e^{-\eta} \left(\bar{\alpha}_0 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\eta} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\eta^2} + \dots \right)$$

Somit haben wir in

$$(76) \quad \tilde{\gamma}_\nu(\eta) + \bar{c}_1 \tilde{h}_{2,\infty}(\eta) + \bar{c}_2 \eta + \bar{c}_3 e^{-\eta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_{m\nu}}{\eta^m} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

⁹⁾Sofern eine solche Entwicklung überhaupt existiert, was wir aber stets voraussetzen wollen.

die allgemeinsten asymptotischen Entwicklungen gewonnen, welche die Gleichungen (74a-c) erfüllen. Diese Form müssen also insbesondere auch die asymptotischen Entwicklungen unserer Lösungen γ_1 , γ_2 , γ_3 von (68/69) besitzen. Es sei etwa

$$(77) \quad \gamma_\nu(\eta) \sim \gamma_\nu(\eta) + c_1 \tilde{h}_{2\infty}(\eta) + c_{2\nu} \eta + c_3 e^{-\eta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{m\nu}}{\eta^m} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

Wenn es gelingt, die hierin auftretenden Konstanten c_1 , numerisch zu berechnen, so folgt aus (75) und (73) sofort

$$(78) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1'(\eta)}{\eta^3} &= \frac{2}{3} \left[\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{3}} \right]^2 + c_{11} \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\gamma_2'(\eta)}{\eta^3} &= -\frac{1}{3} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt[3]{3}} + c_{12} \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\gamma_3'(\eta)}{\eta^3} &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3 \sqrt[3]{3}} + c_{13} \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \end{aligned}$$

Damit bekommen wir aus (72) unter Beachtung von (71), (73) und der äußeren Randbedingung (66) eine einfache Bestimmungsgleichung für δ_2 , deren Lösung

$$(79) \quad \begin{aligned} \delta_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{9a_1}} \left[\frac{27\Gamma(\frac{1}{3})}{2\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})} \frac{a_3}{a_1} - \frac{27}{4\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})} \delta_1^{*2} c_{11} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \delta_1^* \left(v_0 + \frac{p_0}{a_1} \right) c_{12} \right. \\ \left. + \frac{9\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \delta_1^* v_0 c_{13} - \frac{9\Gamma(\frac{1}{3})}{2\sqrt[3]{3} \Gamma(\frac{2}{3})} \frac{a_2}{a_1} \frac{2a_2 + p_0}{a_1} \right] \end{aligned}$$

lautet.

Wir haben nun noch die Konstanten c_1 , zu bestimmen. Dazu sind zunächst die Funktionen $\gamma_\nu(\eta)$ bis zu hinreichend großen η zu berechnen. Wie bei $h_1(\eta)$ erfordert auch hier wieder die numerische Instabilität der Differentialgleichungen, daß man soweit, wie es der Rechenaufwand zuläßt, mit den Potenzreihen zu arbeiten hat. Bei den von uns vertafelten Funktionen

$$\tilde{h}_2'(\eta) = \frac{1}{2} h_2'(\eta), \quad \tilde{\gamma}_1'(\eta) = \frac{1}{2} \gamma_1'(\eta), \quad \tilde{\gamma}_2'(\eta) = 5 \gamma_2(\eta), \quad \tilde{\gamma}_3'(\eta) = \frac{1}{2} \gamma_3'(\eta)$$

haben wir jeweils für $0 \leq \eta \leq 2, 5$ die Reihen verwendet und sind erst dann ab $\eta = 2, 5$ auf das Adamsverfahren übergegangen. Für $\tilde{h}_2'(\eta)$ gilt dabei gemäß (44)

$$(80) \quad \tilde{h}_2'(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3\nu - 5)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3\nu - 1)} \frac{\eta^{3\nu+1}}{(3\nu + 1)\nu! 3^\nu}$$

Für die $\tilde{\gamma}'(\eta)$ ergibt sich aus den Differentialgleichungen

$$(81) \quad \tilde{\gamma}'_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_{3\nu+1}^{(1)} \eta^{3\nu+1}; \quad \tilde{\gamma}'_2 = \sum_{\nu=2}^{\infty} E_{3\nu+2}^{(2)} \eta^{3\nu+2}; \quad \tilde{\gamma}'_3 = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_{3\nu+2}^{(3)} \eta^{3\nu+2}$$

wobei die ersten Koeffizienten E die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte besitzen.

1. Koeffizienten der Potenzreihe von $\tilde{\gamma}'_1(\eta)$.

$3\nu + 1$	$E_{3\nu}^{(1)}$			$3\nu + 1$	$E_{3\nu}^{(1)}$		
1	0			40	+29 684 711		−26
4	+83 333 333	− 9		43	+45 458 070		−28
7	−67 460 317	−10		46	−42 030 747		−30
10	+48 941 799	−11		49	+10 678 059		−30
13	−29 674 544	−12		52	−45 994 712		−32
16	+15 232 538	−13		55	+14 900 549		−33
19	−67 289 106	−15		58	−42 190 905		−35
22	+25 916 779	−16		61	+10 986 648		−36
25	−87 786 347	−18		64	−26 944 258		−38
28	+26 232 353	−19		67	+63 044 703		−40
31	−68 793 432	−21		70	−14 189 493		−41
34	+15 489 412	−22		73	+30 826 575		−43
37	−27 947 829	−24					

Hierbei bedeutet abkürzend 83 333 333 | −9: 83 333 333 · 10^{−9}

2. Koeffizienten der Potenzreihe von $\tilde{\gamma}'_2(\eta)$.

$3\nu + 2$	$E_{3\nu+2}^{(2)}$			$3\nu + 2$	$E_{3\nu+2}^{(2)}$		
2	0			38	+10 092 101		−23
5	0			41	−24 052 323		−25
8	+44 642 857	−10		44	+53 487 992		−27
11	−45 093 795	−11		47	−11 149 234		−28
14	+32 044 675	−12		50	+21 869 789		−30
17	−18 329 982	−13		53	−40 511 235		−32
20	+88 663 821	−15		56	+71 087 162		−34
23	−37 287 360	−16		59	−11 849 619		−35
26	+13 891 308	−17		62	+18 810 840		−37
29	−46 484 507	−19		65	−28 503 156		−39
32	+14 123 777	−20		68	+41 310 492		−41
35	−39 306 312	−22		71	−57 376 598		−43

3. Koeffizienten der Potenzreihe von $\tilde{\gamma}'_3(\eta)$.

$3\nu + 2$	$E_{3\nu+2}^{(3)}$		$3\nu + 2$	$E_{3\nu+2}^{(3)}$	
2	+50 000 000	- 8	35	+71 304 684	-24
5	+25 000 000	- 9	38	-16 576 145	-25
8	-94 246 032	-11	41	+36 085 121	-27
11	+45 093 795	-12	44	-73 841 439	-29
14	-20 739 108	-13	47	+14 252 289	-30
17	+87 285 627	-15	50	-26 026 919	-32
20	-33 320 536	-16	53	+45 095 094	-34
23	+11 558 047	-17	56	-74 320 380	-36
26	-36 609 952	-19	59	+11 677 902	-37
29	+10 648 904	-20	62	-17 531 552	-39
32	-28 602 324	-22	65	+25 195 265	-41

Die Koeffizienten $c_{1\nu}$ wird man nun derart zu bestimmen suchen, daß die Werte der Funktionen $\gamma_\nu(\eta)$ und ihrer ersten beiden Ableitungen für große η mit den aus (77) berechneten Werten übereinstimmen. Die Gleichungen (77) stellen zusammen mit den durch ein- bzw. zweimalige Differentiation nach η daraus folgenden Gleichungen bei festem $\eta = \eta_0$ für jedes $\nu = 1, 2, 3$ ein lineares Gleichungssystem für $c_{1\nu}$, $c_{2\nu}$ und $c_{3\nu}$ dar. Leider ist aber der Koeffizient von $c_{3\nu}$, nämlich die Nullentwicklung, numerisch nicht bekannt. Jedoch wird dieser Koeffizient mit wachsendem η immer kleiner und ist also schließlich zu vernachlässigen. Wir betrachten daher nun das Gleichungssystem

$$\gamma_\nu(\eta_0) = \tilde{\gamma}_\nu(\eta_0) + c_{1\nu}\tilde{h}_{2,\infty}(\eta_0) + c_{2\nu}\eta$$

$$\gamma'_\nu(\eta_0) = \tilde{\gamma}'_\nu(\eta_0) + c_{1\nu}\tilde{h}'_{2,\infty}(\eta_0) + c_{2\nu}$$

$$\gamma''_\nu(\eta_0) = \tilde{\gamma}''_\nu(\eta_0) + c_{1\nu}\tilde{h}''_{2,\infty}(\eta_0)$$

Das aus den ersten beiden Gleichungen errechnete $c_{1\nu}$ stimmt für hinreichend großes η_0 immer besser mit dem aus der letzten Gleichung gefundenen Wert überein. Diese Übereinstimmung stellt offenbar ein Maß für das Abklingen der Nullentwicklung in (77) dar; sie war auf 5 Dezimalen hinter dem Komma für $\tilde{\gamma}_3$ bei $\eta_0 = 3,0$ und für $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ bei $\eta_0 = 3,5$ erreicht. Dabei ergaben sich die Werte

$$(82) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}c_{11} &= -1,12150, & 5c_{12} &= 8,46731, & \frac{1}{2}c_{13} &= 0,47041 \\ \frac{1}{2}c_{21} &= -0,41497, & 5c_{22} &= -0,90750, & \frac{1}{2}c_{23} &= -0,12001 \end{aligned}$$

Die Vertafelungen der Funktionen $\tilde{h}'_2(\eta)$, $\tilde{\gamma}'_1(\eta)$, $\tilde{\gamma}'_2(\eta)$, $\tilde{\gamma}'_3(\eta)$ für $0 \leq \eta \leq 6,0$ sind im Anhang wiedergegeben.

Für das Weitere brauchen wir wiederum noch die asymptotische Entwicklung der Funktion $f_2(\tau)$. Man erhält sie nach leichter Rechnung, wenn man die asymptotischen Entwicklungen (47a/b) und (77) von $h_2(\eta)$ und $\gamma_\nu(\eta)$ ($\nu = 1, 2, 3$) in (73) einträgt und dann zur alten Variablen τ übergeht. Es ergibt sich

$$(83) \quad f_2(\tau) \sim B_{24}\tau^4 + B_{22}\tau^2 + \bar{B}_{22}\tau \ln \tau + B_{21}\tau + B_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2,-m}}{\tau^m}$$

mit

$$(83a) \quad \begin{aligned} B_{24} &= \frac{81}{4} a_3 \\ B_{22} &= \frac{9\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{a_1^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0 \right) \\ \bar{B}_{22} &= 18 \frac{a_3}{a_1} - 6 \frac{a_2(2a_2 + p_0)}{a_1^2} \\ B_{21} &= \left(6 \frac{a_3}{a_1} - 2 \frac{a_2(2a_2 + p_0)}{a_1^2} \right) (\ln a_1 + \ln 3 + \bar{\psi}(2) - \bar{\psi}(\frac{1}{3}) - \bar{\psi}(\frac{2}{3})) \\ &\quad - 0,41497 \frac{9 \left[\frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right]^2}{2} \frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0 \\ &\quad - 0,90750 \frac{9\sqrt[3]{3}}{10\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{a_1 v_0 + p_0}{a_1} \left(\frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0 \right) \\ &\quad + 0,12001 \frac{9\sqrt[3]{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} v_0 \left(\frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0 \right) \\ B_{20} &= \frac{1}{8} \left[\frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{a_1^{\frac{1}{3}}} \right]^2 \frac{1}{a_1^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0 \right]^2 \end{aligned}$$

c) *Bemerkungen zur Funktion $f_3(\tau)$.*

Für den Koeffizienten $g_3(\eta) = f_3(\tau)$ folgt aus (37) und (39) die Differentialgleichung

$$(84) \quad g_3''' + \eta^2 g_3'' - 5\eta g_3' + 5g_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{9a_1}} (-4g_2 g_1'' + 5g_2' g_1' - 3g_1 g_2'')$$

mit den Randbedingungen

$$(85) \quad g_2(0) = g_2'(0) = 0 \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{g_3'(\eta)}{\eta^4} = 3^{5/3} \frac{a_4}{a_1^{5/3}}$$

Wenn man wieder die Berechnung von $g_3(\eta)$ auf gewisse universelle Funktionen zurückführen will, so hat man die rechte Seite von (84) z.B. in folgender Weise

aufzuspalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{9a_1}} (-4g_2g_1'' + 5g_2'g_1' - 3g_1g_2'') &= \frac{1}{(9a_1)^{\frac{2}{3}}} [3\delta_1^2\beta_1K_1(\eta) + 9\delta_1\beta_1^2K_2(\eta) \\ &- 9\delta_1v_0\beta_1K_3(\eta) + 3\sqrt[3]{9a_1}\delta_2\beta_1K_4(\eta) - \frac{3}{2}\delta_1v_0\beta_1K_5(\eta) \\ &+ \delta_1^3K_6(\eta) + 3\delta_1^2\beta_1K_7(\eta) + 3\delta_1v_0K_8(\eta) + 4\sqrt[3]{9a_1}\delta_1\delta_2K_9(\eta) \\ &- 3\delta_1^2v_0K_{10}(\eta) - 9\delta_1v_0\beta_1K_{11}(\eta) - 9\delta_1v_0^2K_{12}(\eta) \\ &- 3\sqrt[3]{9a_1}v_0\delta_2K_{13}(\eta) + \frac{3}{8}v_0^2\beta_1K_{14}(\eta)] \end{aligned}$$

wobei δ_1 und δ_2 die Ausdrücke (62) bzw. (79) bezeichnen,

$$\beta_1 = \frac{a_1v_0 + p_0}{a_1}$$

gesetzt ist und schließlich die 14 Funktionen $K_\nu(\eta)$ die Form besitzen

$$\begin{aligned} K_\nu(\eta) &= \gamma_\nu'\eta^3 - 5\gamma_\nu'\eta^2 + 8\gamma_\nu\eta & (\nu = 1, 2, 3) \\ K_4(\eta) &= h_2'\eta^3 - 5h_2'\eta^2 + 8h_2\eta \\ K_5(\eta) &= h_1'\eta^4 - 5h_1'\eta^3 + 9h_1\eta^2 \\ (87) \quad K_\nu(\eta) &= -4\gamma_\nu h_1'' + 5\gamma_\nu' h_1' - 3\gamma_\nu'' h_1 & (\nu = 6, 7, 8) \\ K_9(\eta) &= -4h_2 h_1'' + 5h_2' h_1' - 3h_2'' h_1 \\ K_\nu(\eta) &= \gamma_\nu'' & (\nu = 10, 11, 12) \\ K_{13}(\eta) &= h_2'' \\ K_{14}(\eta) &= -36\eta^2 \end{aligned}$$

Damit haben wir (84) in die 14 universellen Differentialgleichungen

$$(88) \quad \omega_\nu''' + \eta^2\omega_\nu'' - 5\eta\omega_\nu' + 5\omega_\nu = K_\nu(\eta) \quad (\nu = 1, 2, \dots, 14)$$

aufgespalten, die zunächst unter den Anfangsbedingungen

$$(89) \quad \omega_\nu(0) = \omega_\nu'(0) = \omega_\nu''(0) = 0$$

zu betrachten sind. Man kann die Zahl dieser Differentialgleichungen übrigens etwas verringern. In (86) haben nämlich jeweils K_1 und K_7 , sowie K_3 , K_8 und K_{11} und ferner K_8 und K_{10} bis auf einen konstanten Zahlenfaktor denselben

Koeffizienten, d.h. man kann die entsprechenden Differentialgleichungen zusammenfassen. Wir haben das lediglich aus Symmetriegründen nicht getan.

Die letzte Gleichung (88) besitzt als Lösung zu den Anfangsbedingungen (89)

$$\omega_{14} = 12\eta^2$$

Die übrigen 13 Funktionen $\omega_r(\eta)$ wird man nur durch numerische Integration der Differentialgleichungen (88) berechnen können, was wieder wegen der numerischen Instabilität dieser Gleichungen einige Mühe machen dürfte. Faßt man dann aber die $\omega_r(\eta)$ auf dieselbe Weise, wie es in (86) mit den $K_r(\eta)$ geschieht, zu einer Funktion $\bar{g}_3(\eta)$ zusammen, so stellt offenbar $\bar{g}_3(\eta)$ ein Integral von (84) dar, für das

$$\bar{g}_2(0) = \bar{g}_2'(0) = \bar{g}_2''(0) = 0$$

gilt. Wir haben also als allgemeinste Lösung von (84), welche den ersten beiden Randbedingungen (85) genügt

$$g_3(\eta) = \bar{g}_3(\eta) + \delta_3 h_3(\eta)$$

Die noch freie Konstante δ_3 ist wieder aus der verbleibenden äußeren Randbedingung zu bestimmen. Dazu hat man genau wie bei $g_2(\eta)$ die asymptotischen Entwicklungen der universellen Funktionen $\omega_r(\eta)$ zu suchen. Wir wollen dies hier jedoch nicht mehr durchführen.

§5 Die asymptotische Entwicklung der Stromfunktion.

Unsere bisherige Methode zur Lösung des Grenzsichtproblems (13), (14) bestand darin, die Stromfunktion in Abhängigkeit von den Variablen

$$\sigma = \sqrt[3]{x - x_0}, \quad \tau = \frac{y}{3\sqrt[3]{x - x_0}}$$

in eine Potenzreihe

$$(90) \quad \psi(x, y) = \sigma^2 f(\sigma, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\tau) \sigma^{n+2}$$

zu entwickeln. Der Konvergenzbereich dieser Reihe wird bei jedem festem τ ein Intervall $0 \leq \sigma \leq \sigma_1(\tau)$ sein. Dabei gilt jedoch für $\tau \rightarrow \infty$ sicherlich $\sigma_1(\tau) = O(1/\tau)$; denn einerseits streben ja die $f_n(\tau)$ auf Grund der Randbedingung (34c) wie τ^{n+2} gegen unendlich, andererseits geht (90) beim gleichzeitigen Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$ mit $\sigma \cdot \tau = y/3 = \text{const.}$ in die voraussetzungsgemäß konvergente Potenzreihe des Einlaufprofils $\tilde{u}(y)$ über. Insgesamt folgt damit nun, daß die Reihe (90) bei festgehaltenem (kleinen) σ lediglich für kleine τ (d.h. also kleine y) verwendbar ist. Zur Berechnung der Stromfunktion für große y brauchen wir also—wie es in der Grenzsichttheorie häufig notwendig ist—eine asymptotische Entwicklung von ψ .

Um hierfür einen Hinweis zu erhalten, wollen wir untersuchen, wie sich (90) beim Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, \sigma \cdot \tau = \text{const.}$ verhält, sofern dieser Grenzübergang im Konvergenzbereich stattfindet. Da also insbesondere $\tau \rightarrow \infty$ gehen soll, so können wir—wie dies in der Theorie der asymptotischen Reihen üblich ist—in (90) für die Funktionen $f_n(\tau)$ ihre asymptotischen Entwicklungen eintragen. Das ergibt zufolge (64) und (83) den Anfang der asymptotischen Reihe

$$(91) \quad \begin{aligned} \sigma^2 f(\sigma, \tau) &\sim \frac{9}{2} a_1 \sigma^2 \tau^2 + \sigma^3 (B_{13} \tau^3 + B_{11} \tau + B_{10}) \\ &+ \sigma^4 (B_{24} \tau^4 + B_{22} \tau^2 + B_{21} \tau + \bar{B}_{22} \tau \ln \tau + B_{20} + B_{2,-2} \tau^{-2} + \dots) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

welche für den Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, \sigma \cdot \tau = \text{const.}$ gültig ist (solange dabei (90) konvergiert). Um zur Stromfunktion $\psi(x, y)$ zu gelangen, muß man hierin das x, y -, oder einfacher das σ, y -Koordinatensystem einführen. Das geschieht durch die Substitution $\tau = y/3\sigma$ und nachfolgende Umordnung

nach σ -Gliedern (die bei asymptotischen Reihen stets erlaubt ist):

$$\begin{aligned}
 \psi \sim & \left(\frac{a_1}{2} y^2 + \frac{B_{13}}{27} y^3 + \frac{B_{24}}{81} y^4 + \dots \right) \\
 & + \sigma^2 \left(\frac{B_{11}}{3} y + \frac{B_{22}}{9} y^2 + \dots \right) + \sigma^3 \ln \sigma \left(-\frac{\bar{B}_{22}}{3} y + \dots \right) \\
 (92) \quad & + \sigma^3 \left(B_{10} + \frac{\bar{B}_{22}}{3} y \ln y + \frac{1}{3} (B_{21} - \bar{B}_{22} \ln 3) y + \dots \right) \\
 & + \sigma^4 (B_{20} + \dots) + \dots .
 \end{aligned}$$

Dabei ist nun aus dem Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, $\sigma \cdot \tau = \text{const.}$ der einfache Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ bei festem y geworden, wie wir dies schon umgekehrt bei der Herleitung der Randbedingung (34c) verwendet haben. (92) stellt also eine asymptotische Entwicklung von $\psi(\sigma, y)$ für $\sigma \rightarrow 0$ bei festem (großem) $y^{10)}$ der verallgemeinerten Form

$$(93) \quad \psi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k s_{kl}(y) \sigma^k \ln^{k-l} \sigma$$

dar. Mit derartigen Reihen darf man, wie der Verfasser in einer anderen Arbeit zeigen wird, genauso wie mit gewöhnlichen asymptotischen Entwicklungen rechnen, sofern nur für sie die Definition

$$(94) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} [\psi - (s_{00} + s_{10}\sigma \ln \sigma + \dots + s_{MN}\sigma^M \ln^{M-N} \sigma)] \frac{1}{\sigma^M \ln^{M-N} \sigma} = 0$$

—mit beliebigem M und $N \leq M$, sowie festem y —verwendet wird.

Die in der Herleitung von (92) enthaltene Voraussetzung, daß σ und y nur im Konvergenzbereich von (90) variieren dürfen, können wir jetzt fallen lassen. Vielmehr muß die Entwicklung (92) überall, wo sie sinnvoll ist, auch die asymptotische Reihe der Stromfunktion $\psi(\sigma, y)$ darstellen. da jede Funktion $\psi(\sigma, y)$ nur höchstens eine asymptotische Reihe der Form (93) für $\sigma \rightarrow 0$ besitzen kann, wie der Verfasser in der erwähnten weiteren Arbeit beweisen wird. Wir wissen nun aber nicht, in welchem Bereich (92) überhaupt definiert ist, da wir ja über die Konvergenz der Koeffizientenentwicklungen zunächst keine Aussage machen können. Aber selbst wenn wir diese Konvergenz für alle y voraussetzen, so läßt sich aus (92) doch nicht die Stromfunktion für beliebig große y wirklich berechnen. Denn praktisch kennen wir ja stets nur endlich viele Glieder der Koeffizientenreihen von (92), da wir ja auch nur endlich viele Funktionen $f_n(\tau)$ in (90) bestimmen können. Es ist sogar nicht einmal zu erwarten, daß man dabei über die drei Funktionen $f_0(\tau)$, $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ weit hinauskommt.

Damit müssen wir nun, um (92) bei der Berechnung von $\psi(\sigma, y)$ für alle

¹⁰⁾Für kleine y ist die Reihe (92) entsprechend ihrer Herleitung natürlich nicht mehr gültig, d.h. sie erfüllt auch nicht die beiden inneren Randbedingungen (12a).

großen y verwenden zu können, für die Koeffizienten der σ -Glieder—statt der bisherigen Reihen—eine für alle y gültige andersartige Berechnungsvorschrift suchen. Das gelingt tatsächlich, wenn man beachtet, daß (92) den Grenzschichtgleichungen (13) genügen muß. Schreiben wir also (92) abkürzend in der Form

$$(95) \quad \psi \sim s_0(y) + s_2(y)\sigma^2 + \bar{s}_3(y)\sigma^3 \ln \sigma + s_3(y)\sigma^3 + s_4(y)\sigma^4 + \dots$$

und setzen dies in (13) ein, so erhalten wir durch Koeffizientenvergleich der ersten 4 auftretenden σ -Ausdrücke die Differentialgleichungen¹¹⁾

$$(96a) \quad s'_0 s'_2 - s''_0 s_2 = 0$$

$$(96b) \quad s'_0 \bar{s}'_3 - s'_0 \bar{s}_3 = 0$$

$$(96c) \quad s'_0 (s'_3 + \frac{1}{3} \bar{s}'_3) - s''_0 (s_3 + \frac{1}{3} \bar{s}_3) = p_0 + s''_0$$

$$(96d) \quad s'_0 s'_4 - s'_0 s_4 = \frac{1}{2} (s_2 s''_2 - s_2'^2)$$

Hieraus haben wir diejenigen Lösungen $s_r(y)$ zu berechnen, welche für kleine y mit den Koeffizienten von (92) übereinstimmen. Auf Grund der bekannten Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen, werden sie dann überall gleich diesen Koeffizienten sein. Mit den derart gefundenen Funktionen $s_r(y)$ stellt nun (95) den Anfang der gesuchten asymptotischen Reihe von $\psi(\sigma, y)$ für $\sigma \rightarrow 0$ dar, da ja, wie schon erwähnt, jede Funktion höchstens eine asymptotische Entwicklung der Form (93) besitzen kann.

Bevor wir die Integration von (96) durchführen, noch eine Bemerkung. Es liegt nahe, von vornherein gleich mit einem Ansatz (93) für die gesuchte asymptotische Entwicklung von $\psi(\sigma, y)$ in die Grenzschichtgleichungen einzugehen. Entsprechend der Definition (94) hat man dann für irgend zwei Werte M und N den Koeffizientenvergleich der σ -Ausdrücke bis zu $\sigma^M \ln^{M-N} \sigma$ durchzuführen.

Dabei erhält man ein System von $\binom{M+1}{2} + N + 1$ gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Koeffizienten $a_{00}, \dots, s_{MN}$. Hieraus können wir jedoch niemals ohne die Kenntnis von $\psi(\sigma, y)$, also von (90) und den Funktionen $f_n(\tau)$, auf die asymptotische Entwicklung (92) bzw. (95) schließen, da wir ja nicht einmal wissen, welche s_{ki} überhaupt auftreten und welche identisch verschwinden.

Nunmehr sollen die Differentialgleichungen (96) unter den durch (92) gegebenen Anfangsbedingungen integriert werden. Da natürlich gemäß unserer Problemstellung die Stromfunktion ψ für $\sigma \rightarrow 0$ dem Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ entsprechen muß, so haben wir als erstes

$$(97) \quad s'_0(y) = \tilde{u}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n,$$

¹¹⁾Das entspricht wieder einem Gedanken von S. GOLDSTEIN, wie er ihn für die Berechnung des Nachlaufs hinter der ebenen Platte ([12]) und in [16] für die Strömung in der Nähe der Ablösung verwendete.

was selbstverständlich mit (92) übereinstimmt. Somit ergibt sich aus (96a)

$$(98) \quad s_2(y) = \lambda_2 s'_0(y) = \lambda_2 \tilde{u}(y),$$

wobei wegen (92)

$$\lambda_2 = \frac{B_{11}}{3a_1}$$

ist. Genauso erhalten wir

$$(99) \quad \bar{s}_3(y) = \bar{\lambda}_3 s'_0(y) = \bar{\lambda}_3 \tilde{u}(y)$$

mit

$$\bar{\lambda}_3 = -\frac{\bar{B}_{22}}{3a_1}.$$

Die Differentialgleichung (96c) ist unter der für $y \neq 0$ sicher gültigen Voraussetzung $s'_0(y) = \tilde{u}(y) \neq 0$ gleichbedeutend mit

$$\frac{s'_0(s'_3 + \frac{1}{3}\bar{s}_3') - s''_0(s_3 + \frac{1}{3}\bar{s}_3)}{s_0'^2} = \frac{p_0 + s_0'''}{s_0'^2}$$

woraus unmittelbar

$$(100) \quad s_3 + \frac{1}{3}\bar{s}_3 = s'_0 \int_0^y \frac{p_0 + s_0'''}{s_0'^2} dy = \tilde{u}(y) \int_0^y \frac{p_0 + \tilde{u}''}{\tilde{u}^2} dy$$

folgt. Da sowohl die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (96c), als auch $\bar{s}_3$ gemäß (99) ein Vielfaches von $s'_0 = \tilde{u}$ ist, so bekommen wir insgesamt, wenn noch abkürzend

$$I(y) = \int_0^y \frac{p_0 + \tilde{u}''}{\tilde{u}^2} dy$$

gesetzt wird,

$$(101) \quad s_3(y) = \lambda_3 \tilde{u}(y) + \tilde{u}(y) \cdot I(y)$$

Wie man leicht nachrechnet, lautet der Anfang der Entwicklung von $s_3(y)$

$$(102) \quad s_3(y) = -\frac{2a_2 + p_0}{a_1} + \left(\lambda_3 a_1 - \frac{a_2(2a_2 + p_0)}{a_1^2} \right) y + \left(\frac{6a_3}{a_1} - \frac{2a_2(2a_2 + p_0)}{a_1^2} \right) y \ln y \\ + \left(\lambda_3 a_2 + \frac{12a_4}{a_1} - \frac{12a_2 a_3}{a_1^2} + 3 \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^3} (2a_2 + p_0) \right) y^2 + \dots$$

so daß

$$\lambda_3 = \frac{a_2(2a_2 + p_0)}{a_1^3} + \frac{1}{3a_1} (B_{21} - \bar{B}_{22} \ln 3)$$

ist.

Die Differentialgleichung (96d) läßt sich wegen (98) in der Form

$$s_0' s_4' - s_0'' s_4 = \frac{B_{11}^2}{18a_1^2} (s_0' s_0''' - s_0''^2)$$

schreiben. Ein partikuläres Integral ist

$$s_4 = \frac{B_{11}^2}{18a_1^2} s_0''$$

also haben wir als allgemeine Lösung

$$(103) \quad s_4(y) = \frac{B_{11}^2}{18a_1^2} \tilde{u}' + \lambda_4 \tilde{u}.$$

Die Konstante λ_4 läßt sich aus (92) nicht mehr sofort bestimmen, wenn man nicht noch weitere Koeffizienten $f_n(\tau)$ in (90) berechnet.

Damit ist es nun ohne weitere Schwierigkeiten möglich, die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ in einem kleinen Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ für alle $y \geq 0$ zu berechnen. Für kleine y geschieht das direkt mit Hilfe der Reihe (90), für größere y hat man die daraus folgende asymptotische Entwicklung (95) zu verwenden.

Bei der Herleitung dieser Lösung $u(x, y)$ der Grenzschichtgleichungen (13) haben wir die äußere Randbedingung

$$(104) \quad u(x, \infty) = u_\infty(x)$$

garnicht weiter beachtet. Wie schon zu Beginn erwähnt, hat jedoch der Verfasser in einer anderen Arbeit ([3]) gezeigt, daß diese Randbedingung unter gewissen Voraussetzungen in einem Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ stets von selbst erfüllt ist, wenn nur das Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ sich richtig an die Außenströmung anschließt:

$$(105) \quad u(x_0, \infty) = \tilde{u}(\infty) = u_\infty(x_0).$$

Wir wollen uns hier nicht weiter um die genauen Voraussetzungen jenes Satzes kümmern, sondern einfach verifizieren, daß unsere Lösung $u(x, y)$, soweit wir sie in x -Richtung berechnet haben, für $y \rightarrow \infty$ tatsächlich der äußeren Randbedingung (104) genügt.

Für große y und kleine σ gilt für $u(x, y)$ die Gleichung (95), also unter Beachtung der für die $s_i(y)$ gefundenen Formeln

$$(106) \quad u = \psi_s \sim \tilde{u} + \lambda_2 \tilde{u}' \sigma^2 + \bar{\lambda}_3 \tilde{u}' \sigma^3 \ln \sigma + s_3'(y) \sigma^3 + \left(\lambda_4 \tilde{u}' + \frac{B_{11}^2}{18a_1^2} \tilde{u}'' \right) \sigma^4 + \dots$$

Für $\tilde{u}(y)$ soll zunächst einmal (105) richtig sein. Weiterhin nehmen wir an, daß $\tilde{u}(y)$ samt allen seinen Ableitungen für $y \rightarrow \infty$ asymptotische Entwicklungen besitzt¹²⁾. Ist etwa

$$\tilde{u}(y) \sim u_\infty(x_0) + \frac{\alpha_1}{y} + \frac{\alpha_2}{y^2} + \dots$$

¹²⁾Diese Voraussetzung ist auch für den allgemeinen Satz grundlegend. Sie entspricht dem Charakter der Grenzschichtströmung, die asymptotisch in die Außenströmung übergehen soll.

so erhält man hieraus bekanntlich die asymptotischen Entwicklungen der Ableitungen durch formale Differentiation nach y . Damit ist u.a. die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}^{(n)}(y) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

gewährleistet und wir bekommen aus (106) für festes σ

$$(107) \quad \begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) &\sim \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(y) + \sigma^3 \lim_{y \rightarrow \infty} s'_3(y) + \dots \\ &= u_\infty(x_0) + (x - x_0) \lim_{y \rightarrow \infty} s'_3(y) + \dots \end{aligned}$$

Für den auf der rechten Seite verbleibenden Grenzwert findet man aus (96c)

$$\begin{aligned} u_\infty(x_0) \lim_{y \rightarrow \infty} s'_3(y) &= p_0 + \lim_{y \rightarrow \infty} s'_0(s_3 + \tfrac{1}{3}s_3) \\ &= p_0 + \lim_{y \rightarrow \infty} s'_0 s'_0 I(y) \\ &= p_0 + u_\infty(x_0) \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}' I(y) \end{aligned}$$

Das Integral $I(y)$ besitzt auf Grund unserer Voraussetzungen über $\tilde{u}$ für $y \rightarrow \infty$ sicher eine asymptotische Entwicklung. Wie man leicht nachrechnet, beginnt diese mit

$$I(y) \sim \frac{p_0}{u_\infty^2(x_0)} y - \frac{2\alpha_1 p_0}{u_\infty^3(x_0)} \ln y + \text{Potenzen von } \frac{1}{y}$$

Da die Entwicklung von $\tilde{u}'(y)$

$$\tilde{u}'(y) \sim -\frac{\alpha_1}{y^2} - \frac{2\alpha_2}{y^3} - \dots$$

lautet, so erkennt man sofort, daß

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}' \cdot I(y) = 0$$

und demgemäß

$$\lim_{y \rightarrow \infty} s'_3(y) = \frac{p_0}{u_\infty(x_0)} = \frac{u_\infty(x_0) u'_\infty(x_0)}{u_\infty(x_0)} = u'_\infty(x_0)$$

ist. Aus (107) wird also tatsächlich

$$u(x, \infty) \sim u_\infty(x_0) + u'_\infty(x_0)(x - x_0) + \dots = u_\infty(x)$$

und hierin darf man auf Grund der Konvergenz der Reihe von $u_\infty(x)$ das Asymptotik-Zeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzen.

Damit haben wir für die abgebrochenen Reihen (90) bzw. (95)—soweit sie die Lösung $u(x, y)$ annähern—die Gültigkeit der äußeren Randbedingung (104) nachgewiesen. Nimmt man noch weitere Glieder der Reihen hinzu, so verläuft für diese der Beweis völlig analog.

§6 Zusammenstellung des Verfahrens für die praktische Anwendung.

Unser bisher entwickeltes Verfahren stellt eine Lösung der in §1 formulierten Aufgabe dar, die Grenzschichtströmung in der Nähe eines sprunghaften Absaugebeginns zu berechnen. Wie jedoch ebenfalls in §1 gesagt, sind damit die Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens keineswegs erschöpft. Bei seiner Herleitung haben wir ja—wie man sofort bestätigt—kein einziges Mal von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, daß das Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ an der Stelle $x = x_0$ des Absaugebeginns ein Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht *ohne* Absaugung ist. Demnach darf also $\tilde{u}(y)$ ohne weiteres auch ein Profil einer Grenzschicht *mit* Absaugung sein, wobei dann eben in $x = x_0$ lediglich eine plötzliche Änderung der Absaugegeschwindigkeit eintritt, oder die Absaugung sprunghaft aufhört. In jedem Fall läßt sich unser Verfahren zur Berechnung der Strömung kurz hinter der Unstetigkeitsstelle $x = x_0$ verwenden. Um die praktische Durchführung dieser Aufgaben zu erleichtern, wollen wir im folgenden nochmal alle notwendigen Formeln zusammenstellen.

Für das zu betrachtende Beispiel sei zunächst die äußere Geschwindigkeitsverteilung in Form einer Potenzreihe

$$(108) \quad u_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x - x_0)^n$$

gegeben, von der wir allerdings nur die ersten Koeffizienten u_0 und u_1 benötigen. An der Stelle $x = x_0$ soll nun die Absaugegeschwindigkeit $v_0(x)$ unstetig werden, und zwar gelte etwa

$$(109) \quad v(x_0, 0) = v_0 \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} v(x, 0) = \bar{v}_0$$

Für den früher allein zugelassenen Spezialfall des plötzlichen Absaugebeginns ist z.B. $v_0 \neq 0$, $\bar{v}_0 = 0$; beim sprunghaften Ende der Absaugung hat man dagegen $v_0 = 0$, $\bar{v}_0 \neq 0$. Wir wollen annehmen, daß die Berechnung der Grenzschicht bis zum Unstetigkeitspunkt $x = x_0$ schon durchgeführt ist. Damit kennt man dann prinzipiell das Einlaufprofil $\tilde{u}(y)$ —leider jedoch im allgemeinen nur numerisch in den äquidistanten Punkten $y_n = nl$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) einer festen Schrittweite l . Wir brauchen aber auch von $\tilde{u}(y)$ wenigstens den Anfang der Potenzreihe

$$(110) \quad \tilde{u}(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \dots$$

Bei der Bestimmung der hierin auftretenden Koeffizienten a_n hat man stets die bekannten Wandbindungen

$$(111) \quad a_2 = -2u_0 u_1 + 2\bar{v}_0 a_1 \quad a_3 = 6\bar{v}_0 a_2$$

zu beachten. Durch sie werden a_2 und a_3 eindeutig an a_1 gekoppelt, bzw.—für $\bar{v}_0 = 0$ —sogar völlig festgelegt; a_1 und a_4 dagegen bleiben völlig unbestimmt. a_1 ermittelt man nun zunächst näherungsweise etwa durch numerische oder graphische Differentiation von $\tilde{u}(y)$ in $y = 0$. Damit lassen sich a_2 und a_3 berech-

nen. Für eine hinreichend kleine Ordinate $y = y_1$ finden wir dann aus den Abweichungen der ersten drei Glieder von (110) gegenüber dem Wert $\tilde{u}(y_1)$ eine erste Verbesserung von a_1 . Darauf wird für ein etwas größeres $y = y_2$ der Koeffizient a_4 in der ersten Näherung bestimmt und schließlich mit seiner Hilfe eine zweite Verbesserung von a_1 (also auch von a_2 und a_3) durchgeführt. Im allgemeinen ist hiernach für a_1 eine genügende Genauigkeit erreicht, während der ungenaueste Koeffizient a_4 sowieso nur geringen Einfluß besitzt.¹³⁾

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun die immer wiederkehrenden Konstanten

$$p_0 = u_0 u_1, \quad \sqrt[3]{9a_1}, \quad \delta_1^* = \frac{2a_2 + p_0}{a_1} + v_0$$

$$\beta_1 = v_0 + \frac{p_0}{a_1}, \quad \beta_2 = \frac{2a_2 + p_0}{a_1^2}$$

berechnen und mit ihnen die Koeffizienten

$$(112a) \quad A_0 = \frac{9a_1}{\sqrt[3]{9a_1}}$$

$$A_{11} = 1,5 \sqrt[3]{9a_1} \beta_1, \quad A_{12} = 3,195\,253 \sqrt[3]{9a_1} \delta_1^*$$

sowie

$$(112b) \quad A_{21} = 5,104\,819 (\delta_1^*)^2, \quad A_{22} = 0,958\,576 \beta_1 \delta_1^*$$

$$A_{23} = 9,585\,757 v_0 \delta_1^*, \quad A_{24} = 1,5 v_0 \beta_1$$

$$A_{25} = 37,03647 \frac{a_3}{a_1} + 11,45011 (\delta_1^*)^2 - 16,23311 \beta_1 \delta_1^*$$

$$+ 9,01847 v_0 \delta_1^* - 12,34549 a_2 \beta_2$$

Hieraus bekommen wir dann unter Verwendung der im Anhang wiedergegebenen Tabellen

$$(113a) \quad \sqrt[3]{9a_1} g'_1(\eta) = -A_{11} \eta^2 + A_{12} \bar{h}'_1(\eta)$$

und

$$(113b) \quad \sqrt[3]{9a_1} g'_2(\eta) = A_{21} \bar{\gamma}'_1 + A_{22} \bar{\gamma}'_2 - A_{23} \bar{\gamma}'_3 + A_{24} \eta^3 + A_{25} \bar{h}'_2$$

also für kleines σ

$$(114) \quad u(\sigma, \eta) = A_0 \eta \frac{\sigma}{3} + \sqrt{9a_1} g'_1(\eta) \frac{\sigma^2}{3} + \sqrt{9a_1} g'_2(\eta) \frac{\sigma^3}{3} + \dots$$

Die Wahl von σ hängt von den Erfordernissen der einzelnen Beispiele ab. Wir haben bei unserer praktischen Erprobung höchstens Zahlenwerte $\sigma \leq 0,15$

¹³⁾Eine ausführliche Darstellung der hier geschilderten Methode zur Bestimmung der a_n findet man für den Spezialfall $v_0 = 0$ bei H. GÖRTLER [17].

zugelassen, um möglichst wenig Genauigkeit zu verlieren. Diese—im Grunde kleine—Schrittweite in x -Richtung brachte uns jedoch jedesmal bereits soweit über den Einfluß der Strömungsunstetigkeit in $x = x_0$ hinweg, daß ein Differenzenverfahren wider anwendbar war.

Führt man nun—was ohne weiteres mit einfacher linearer Interpolation geschehen kann—in (114) die Variable

$$y = \frac{3\sigma}{\sqrt[3]{9a_1}} \eta$$

ein, so ist damit schon das gesuchte Geschwindigkeitsprofil $u(x, y)$ für kleine y gewonnen. Wie weit dieses $u(x, y)$ in y -Richtung berechnet werden muß, kommt auf den einzelnen Fall an. Im allgemeinen wird man bei (114) die Tabellen der universellen Funktionen bis zu $\eta = 4,0$ oder $5,0$ benutzen. Oft ist jedoch bereits früher der automatische Anschluß an die asymptotische Entwicklung von $u(x, y)$ erreicht. Für y -Werte jenseits dieses Anschlusses macht sich übrigens dann auch langsam die Verschlechterung der Näherungsformel (114) bemerkbar.

Für große y ist nun die asymptotische Entwicklung von $u(x, y)$ gemäß §5 aufzustellen. Dazu berechnen wir zunächst die Konstanten

$$B_{11} = 2,057\,582 \sqrt[3]{9a_1} \delta_1^* \quad (115a)$$

$$\bar{B}_{22} = 18 \frac{a_3}{a_1} - 6a_2\beta_2$$

$$B_{21} = (0,333\,333 \ln a_1 + 1,595\,155) \bar{B}_{22} - 2,11835(\delta_1^*)^2 - 0,86991\beta_1\delta_1^* + 1,15039\nu_0\delta_1^* \quad (115b)$$

$$\beta_3 = 12 \frac{a_4}{a_1} - \frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} \bar{B}_{22} - \frac{a_2^2 + 2a_1a_3}{a_1^2} \beta_2$$

¹⁴⁾Hierin ist übrigens die Bestimmung der in Tabellenwerken selten zu findenden Werte $\bar{\psi}(\frac{1}{3}), \bar{\psi}(\frac{2}{3})$ der logarithmischen Derivierten der Gamma-Funktion enthalten. Aus den bekannten Formeln

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \Gamma\left(\frac{x}{3}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{2\pi\Gamma(x)}{3^{x-\frac{1}{2}}}$$

gewinnt man durch logarithmische Differentiation und Einsetzen von $x = \frac{1}{3}$ bzw. $x = 1$ ein lineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten $\bar{\psi}(\frac{1}{3}), \bar{\psi}(\frac{2}{3})$, dessen Lösung

$$\bar{\psi}\left(\frac{1}{3}\right) = -C - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln 3, \quad \bar{\psi}\left(\frac{2}{3}\right) = -C - \frac{3}{2} \ln 3$$

lautet. ($C = 0,577\,215\,66$ Eulersche Konstante) Dementsprechend bekommen wir für den in (73) und (83) auftretenden Ausdruck

$$\begin{aligned} -\ln 3 + \bar{\psi}(2) - \bar{\psi}\left(\frac{1}{3}\right) - \bar{\psi}\left(\frac{2}{3}\right) &= -2 + 2 \ln 3 + C + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ &= 2,588\,239\,61 \end{aligned}$$

Hiermit lauten die ersten Koeffizientenfunktionen jener Entwicklung

$$\begin{aligned}
 s'_0 &= \tilde{u}(y) \\
 s'_2 &= \frac{B_{11}}{3a_1} \tilde{u}'(y) \\
 (116) \quad s'_3 &= -\frac{\overline{B}_{22}}{3a_1} \tilde{u}'(y) \\
 s'_3 &= \lambda_3 \tilde{u}' + \frac{\tilde{u}'' + p_0}{\tilde{u}} + \tilde{u} \int_0^y \frac{\tilde{u}'' + p_0}{\tilde{u}^2} dy
 \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_3 = \frac{1}{a_1} (\beta_2 + 0,333 \ 333 \overline{B}_{21} - 0,366 \ 204 \overline{B}_{22})$$

Zur Auswertung des bei s'_3 auftretenden Integrals spaltet man dieses am besten an einer beliebigen aber kleinen Stelle $\hat{y}$ auf:

$$\int_0^y \frac{\tilde{u}'' + p_0}{\tilde{u}^2} dy = I(\hat{y}) + \int_{\hat{y}}^y \frac{\tilde{u}'' + p_0}{\tilde{u}^2} dy$$

wobei dann

$$I(\hat{y}) = -\beta_2 \frac{1}{\hat{y}} + 0,333 \ 333 \overline{B}_{22} \ln \hat{y} + \beta_3 \hat{y} + \dots$$

ist und sich für das übrigbleibende Integral nun ohne Schwierigkeiten eine der bekannten Quadraturformeln, wie etwa die Trapezregel, verwenden läßt.

Wenn das Einlaufprofil $\tilde{u}$ nur numerisch an den Stellen $y_n = nl$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) gegeben ist, so macht die Berechnung der Ableitungen $\tilde{u}'$ und $\tilde{u}''$ eventuell gewisse Schwierigkeiten. Nach unseren Erfahrungen genügt es im allgemeinen jedoch vollkommen, wenn man $\tilde{u}'$ und $\tilde{u}''$ durch sogenannte überspringende Differenzen erster bzw. zweiter Ordnung approximiert. Schreiben wir abkürzend

$$\tilde{u}(y_n) = \tilde{u}_n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \nabla_n = \tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\nabla_n^2 = \nabla_{n+1} - \nabla_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

so wird also

$$\tilde{u}' = \frac{\nabla_n}{2l} \quad \tilde{u}'' = \frac{\nabla_n^2}{4l^2}$$

gesetzt und die Gleichungen (115) bekommen die finite Gestalt

$$s'_0(y_n) = \tilde{u}_n$$

$$s'_2(y_n) = \frac{B_{11}}{6a_1 l} \nabla_n$$

$$\bar{s}'_3(y_n) = -\frac{\bar{B}_{22}}{6a_1 l} \nabla_n$$

$$s'_3(y_n) = L_n + \nabla_n \left[\frac{\lambda_3 + I(y_k)}{2l} + \frac{1}{4}L_k^* + \frac{1}{2}L_{k+1}^* + \cdots + \frac{1}{2}L_{n-1}^* + \frac{1}{4}L_n^* \right]$$

mit

$$y_k = \hat{y}, \quad L_n = \frac{1}{\tilde{u}_n} \left(\frac{\nabla_n^2}{4l^2} + p_0 \right), \quad L_n^* = \frac{L_n}{\tilde{u}_n}$$

Die Formel für $s'_3(y)$ gilt nur für $n \geq 2$. Für kleinere Werte von y —soweit solche überhaupt gebraucht werden—verwendet man am besten die Potenzreihenentwicklung (102).

Mit Hilfe der $s'_n(y)$ erhalten wir nun sofort

$$(118) \quad u(\sigma, y) = s'_0(y) + s'_2(y)\sigma^2 + s'_3(y)\sigma^3 \ln \sigma + s'_3(y)\sigma^3 + \cdots$$

Dabei ist σ genauso wie bei (114) zu wählen. Diese $u(x, y)$ schließen sich stets automatisch richtig an die Werte aus (114) an, so daß wir nunmehr für die ganze Skala der y die Geschwindigkeiten u vorliegen haben.

§7 Beispiele

1. *Beispiel:* Grenzschicht an einer längsangeströmten ebenen Platte mit konstanter äußerer Geschwindigkeitsverteilung u_∞ bei sprunghaftem Absaugebeginn an einer Stelle $x = x_0$

Wir verwenden für die Einführung der dimensionslosen Koordinaten gemäß (12) als charakteristische Größen $L = x_0$ und $U = u_\infty$. Dann hat die äußere Geschwindigkeitsverteilung $u_\infty^{*15)}$ stets den Wert 1 und die Absaugung beginnt an der Stelle $x^* = 1$. Bis zu dieser Stelle konnte sich die bekannte Blasius'sche Plattengrenzschicht frei entwickeln, deren Werte man etwa bei H. SCHLICHTING [1] auf Seite 103 vertafelt findet. Für das Einlaufprofil $\tilde{u}^*(y^*)$ in $x^* = 1$ bekommen wir demgemäß, wie man sofort bestätigt,

$$\tilde{u}^*(y^*) = 0,33206y^* - 0,00230y^{*4} + \dots$$

Als Absaugegesetz wählten wir nacheinander

$$v_0^*(x^*) = \frac{v_0(x)}{u_\infty} \sqrt{\frac{u_\infty x_0}{\nu}} = 0,5; 1,0; 1,5.$$

In jedem dieser drei Fälle wurde nun zum Übergang über die Strömungsunstetigkeit in $x^* = 1$ unser Rechenverfahren benutzt und zwar bis zur Stelle $x^* = 1,0015$. Hier war dann bereits der Einfluß der Unstetigkeit soweit abgeklungen, daß sich für die weitere Rechnung das im Anhang Nr 2 beschriebene Differenzenverfahren anwenden ließ. Ein Kriterium für diese Anwendbarkeit ist die Gestalt der zweiten Ableitung des Geschwindigkeitsprofils nach y^* . Entsprechend den Wandbindungen (111) wird nämlich u_{y^*,y^*}^* auf $x^* = 1$ unstetig. Diese Unstetigkeit glättet sich etwa in der Weise aus, wie es Abb. 1 an unserem Beispiel des Absaugewertes $v_0^* = 0,5$ zeigt. Das Differenzenverfahren arbeitet erst dann befriedigend, wenn das Minimum von $-u_{y^*,y^*}^*$ mindestens beim dritten bzw. vierten Gitterpunkt liegt, ohne daß die Schrittweite l in y^* -Richtung zu klein ist.

Für jeden der drei Absaugewerte begann also in $x^* = 1,0015$ die Rechnung mit dem Differenzenverfahren. Als Schrittweite wurde dabei in y^* -Richtung zunächst $l = 0,2$ und später $l = 0,4$ gewählt, während in x^* -Richtung—dem langsamen Abklingen des Einflusses der Unstetigkeit entsprechend— h von 0,0035 (beim ersten Schritt) bis zu 0,1 anwuchs.

¹⁵⁾Im Folgenden sollen die gemäß (12) eingeführten dimensionslosen Koordinaten ihrer Definition entsprechend mit einem Stern versehen werden, da die bisherige vereinfachte Schreibweise ohne Stern jetzt zu Verwechslungen mit den ursprünglichen dimensionsbehafteten Variablen Anlaß geben könnte.

ABB. 1. Die zweiten Ableitungen $u_{y^*y^*}^*$ an einigen Stellen x^* für das Beispiel der ebenen Platte mit $v_0^* = 0,5$.

Beim Absaugewert $v_0^* = 0,5$ führten wir diese Rechnung bis zur Stelle $x^* = 1,15$ durch, wo sich—wie Abb. 1 zeigt—die zweite Ableitung u_{y^*,v^*}^* annähernd ausgeglättet hatte. Abb. 2 zeigt die auf diese Weise erhaltenen Kurven der Geschwindigkeit bei konstantem Wandabstand. Man erkennt daran, wie sich die Unstetigkeit der v -Randwerte in $x^* = 1$, $y^* = 0$ längs der Charakteristik $x^* = 1$ in die Strömung fortgepflanzt hat.

Genauso wie bei $v_0^* = 0,5$ wurde auch bei $v_0^* = 1,5$ bis zur Stelle $x^* = 1,15$ gerechnet. Für $v_0^* = 1,0$ dagegen verwendeten wir das Differenzenverfahren solange, bis die Geschwindigkeitsprofile im Rahmen der Rechengenauigkeit (etwa 1%) gleich dem asymptotischen Absaugeprofil

$$u_a^*(y^*) = 1 - e^{-v_0^* y^*}$$

geworden waren. Dies trat bei $x^* = 2,3$ ein. Abb. 3 zeigt einige der dabei erhaltenen Geschwindigkeitsprofile und Abb. 4 das zugehörige Stromlinienbild. Auch in Abb. 4 erkennt man wieder die Unstetigkeit längs der Charakteristik $x^* = 1$.

Die vier folgenden Abbildungen dienen zur Veranschaulichung der Unterschiede bei den verschiedenen Absaugewerten.

Beim Absaugewert $v_0^* = 1,5$ nahmen wir nun weiter an, daß hinter $x^* = 1,15$ die Wand wieder undurchlässig ist und somit an dieser Stelle die Absaugung sprunghaft endet. Zur Überbrückung der hierdurch in $x^* = 1,15$ entstehenden Strömungsunstetigkeit wendeten wir erneut unser in der Arbeit entwickeltes Verfahren an. Dabei wurde für das letzte Absaugeprofil in $x^* = 1,15$ der gemäß §6 bestimmte Anfang der Potenzreihe

$$u^*(1,15; y^*) = 1,0430y^* - 0,7823y^{*2} + 0,3911y^{*3} - 0,0035y^{*4} + \dots$$

benutzt. Von der Stelle $x^* = 1,152$ diente zur Weiterrechnung wieder das Görtlersche Differenzenverfahren, diesmal in der von H. WITTING verbesserten Form, und zwar mit den Schrittweiten $l = 0,4$ sowie h zwischen 0,003 und 0,1. Die Abbildungen 9 bis 11 zeigen einige Ergebnisse dieser Rechnungen. An Abb. 11 erkennt man, daß die Verdrängungsdicke durch den Absaugeschlitz eine langanhaltende Verkleinerung erfährt, während bei der Wandschubspannung die Wirkung der Absaugung rasch wieder vergeht.

2. Beispiel: Grenzschicht am Kreiszylinder mit potentialtheoretischer Druckverteilung bei sprunghaftem Absaugebeginn an einer Stelle $x = x_0$

Es sei R der Radius des Kreiszylinders und U_0 die Anströmgeschwindigkeit. Wenn dann die dimensionslosen Koordinaten (12) auf die Größen $L = R/2$ und $U = U_0$ bezogen werden, so lautet die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung an der Wand

$$u_w^*(x^*) = 2 \sin \frac{x^*}{2}$$

ABB. 2. Geschwindigkeitsverteilung bei konstantem Wandabstand für die ebene Platte mit $v_0^* = 0,5$.

ABB. 3. Einige berechnete Geschwindigkeitsprofile bei der ebenen Platte mit $v^* = 1,0$.
Bemerkenswert ist die starke Änderung der Profilform durch die Absaugung.

ABB. 4. Stromlinienbild für die ebene Platte mit $v_0^* = 1,0$.

ABB. 5. Vergleich der Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Absaugewerte an der Stelle $x^* = 1,15$.

ABB. 6. Kurven der Verdrängungsdicke δ^* bei der ebenen Platte für verschiedene Absaugewerte.

ABB. 7. Vergleich des Profilparameters δ^*/θ für verschiedene Absaugewerte.

ABB. 8. Kurven der Wandschubspannung $u_{y^*}^*(x^*, 0)$ bei verschiedenen Absaugewerten.

Als Stelle des Absaugebeginns wählten wir $x_0^* = 3,0$, das entspricht einem Zentriwinkel $\varphi = 87,38^\circ$. Bis zu diesem Wert $x^* = 3,0$ ließ sich die Grenzschicht ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der Blasius'schen Reihe berechnen. Dabei wurden die Vertafelungen von A. ULRICH [18] benutzt.

Für die in $x^* = 3,0$ sprunghaft beginnende Absaugung nahmen wir zunächst $v_0^* = 0,5$ an. Zur Überbrückung der Strömungsunstetigkeit mußte dann im Bereich $3,0 \leq x \leq 3,002$ unser in der Arbeit entwickeltes Verfahren angewendet werden. Hinter $x^* = 3,002$ erwies sich das Differenzenverfahren wieder als arbeitsfähig.

Um die Ablösungsstelle möglichst weit nach hinten zu schieben, war es angebracht, mit wachsendem x^* auch den Absaugewert v_0^* stetig zu vergrößern. Eine derartige stetige Veränderung des v-Randwertes $v_0^*(x^*)$ vermag ein Differenzenverfahren durchaus zu bewältigen, sofern nur die bei jedem Fortsetzungsschritt entstehenden Änderungen $v_0^*(x^* + h) - v_0^*(x^*)$ höchstens Zahlenwerte bis zu 0,1 annehmen, ohne daß dabei die Schrittweite h kleiner als sonst üblich gewählt wird. Wenn jedoch diese Änderungen über 0,1 hinausgehen, oder zur Verhinderung dessen h sehr klein sein müßte, so versagt das Differenzenverfahren ziemlich schnell. Dann ist man allein darauf angewiesen, v_0^* sprunghaft zu vergrößern und dabei unser Rechenverfahren zur Überbrückung der Sprungstellen zu verwenden.

Unter Anwendung des eben Gesagten berechneten wir nun mit Hilfe des Differenzenverfahrens von $x^* = 3,002$ beginnend die Grenzschicht bei folgendem

Abb. 9. Einige berechnete Geschwindigkeitsprofile bei der ebenen Platte mit Absaugung $v_0^* = 1,5$ im Bereich $1,0 \leq x^* \leq 1,15$.

ABB. 9a. Ausschnitt aus Abb. 9: Einige Geschwindigkeitsprofile innerhalb des Absaugebereiches.

Absaugegesetz:

$$v_0^* = \begin{cases} 0,5 + (x^* - 3,0) 0,75 & \text{für } 3,0 \leq x^* \leq 3,1 \\ 1,1 + (x^* - 3,8) & \text{für } 3,8 \leq x^* \end{cases}$$

Die Schrittweite in y^* -Richtung betrug dabei $l = 0,4$, während h zunächst im Bereich $3,0 \leq x^* \leq 3,1$ zwischen 0,003 und 0,02 und für $x^* \geq 3,1$ zwischen 0,05 und 0,1 variierte.

Es ergab sich bei dieser Rechnung die Ablösung an der Stelle $x^* = 5,1$. Das entspricht einem Zentriwinkel $\varphi = 146,1^\circ$. Beim Kreiszyylinder ohne Absaugung fand demgegenüber H. WITTING [19] bereits Ablösung bei $x^* = 3,80$, d.h. $\varphi = 108,9^\circ$.

Die folgenden Abbildungen dienen zur Veranschaulichung der Ergebnisse.

ABB. 10. Stromlinienbild für die ebene Platte mit Absaugung $v_0^* = 1,5$
im Bereich $1,0 \leq x^* \leq 1,15$.

ABB. 11. Verdrängungsdicke und Wandschubspannung für die ebene Platte mit Absaugung $v_0^* = 1,5$ im Bereich $1,0 \leq x \leq 1,15$.

ABB. 12. Einige berechnete Geschwindigkeitsprofile beim Kreiszylinder mit Absaugung.

ABB. 13. Geschwindigkeitsverteilung bei konstantem Wandabstand für den Kreiszyylinder mit Absaugung.

ABB. 14. Verdrängungsdicke und drei Geschwindigkeitsprofile beim Kreiszyylinder mit Absaugung.

ABB. 15. Vergleich der Wandschubspannung beim Kreiszyylinder mit und ohne Absaugung.

Anhang Nr. 1

Tafeln der Funktionen $\bar{h}'_1$, $\bar{h}'_2$, $\bar{\gamma}'_1$, $\bar{\gamma}'_2$, $\bar{\gamma}'_3$.

η	$\bar{h}'_1 = \frac{1}{2}h'_1$	$\bar{h}'_2 = \frac{1}{2}h'_2$	$\bar{\gamma}'_1 = \frac{1}{2}\gamma'_1$	$\bar{\gamma}'_2 = 5\gamma'_2$	$\bar{\gamma}'_3 = \frac{1}{2}\gamma'_3$
0,0	0	0	0	0	0
0,1	0,10000	0,10008	0,00001	0,00000	0,00500
0,2	0,20007	0,20013	0,00013	0,00000	0,02001
0,3	0,30034	0,30068	0,00067	0,00000	0,04506
0,4	0,40106	0,40213	0,00212	0,00000	0,08026
0,5	0,50259	0,50520	0,00516	0,00002	0,12578
0,6	0,60536	0,61076	0,01061	0,00007	0,18193
0,7	0,70988	0,71988	0,01947	0,00025	0,24915
0,8	0,81674	0,83381	0,03277	0,00071	0,32804
0,9	0,92661	0,95394	0,05161	0,00179	0,41937
1,0	1,04015	1,08181	0,07705	0,00404	0,52410
1,1	1,15810	1,21906	0,11004	0,00840	0,64336
1,2	1,28116	1,36747	0,15137	0,01622	0,77847
1,3	1,41001	1,52883	0,20162	0,02941	0,93087
1,4	1,54531	1,70501	0,26112	0,05069	1,10217
1,5	1,68773	1,89788	0,32993	0,08322	1,29406
1,6	1,83756	2,10934	0,40787	0,13100	1,50833
1,7	1,99549	2,34123	0,49453	0,19864	1,74679
1,8	2,16180	2,59540	0,58937	0,29123	2,01130
1,9	2,33678	2,87363	0,69174	0,41419	2,30370
2,0	2,52066	3,17768	0,80096	0,57312	2,62582
2,1	2,71362	3,50927	0,91640	0,77359	2,97948
2,2	2,91576	3,87005	1,03750	1,02104	3,36646
2,3	3,12716	4,26166	1,16379	1,32062	3,78850
2,4	3,34788	4,68571	1,29499	1,67717	4,24735
2,5	3,57795	5,14377	1,43120	2,09522	4,74468
2,6	3,81739	5,63740	1,57154	2,57897	5,28221
2,7	4,06621	6,16814	1,71615	3,13239	5,86159
2,8	4,32441	6,73752	1,86509	3,75920	6,48449
2,9	4,59199	7,34705	2,01847	4,46299	7,15257
3,0	4,86897	7,99825	2,17627	5,24721	7,86747

η	$\bar{h}'_1 = \frac{1}{2}h'_1$	$\bar{h}'_2 = \frac{1}{2}h'_2$	$\bar{\gamma}'_1 = \frac{1}{2}\gamma'_1$	$\bar{\gamma}'_2 = 5\gamma'_2$	$\bar{\gamma}'_3 = \frac{1}{2}\gamma'_3$
3,1	5,15533	8,69262	2,33856	6,75936	8,63084
3,2	5,45109	9,43165	2,50542	7,07063	9,44433
3,3	5,75623	10,21685	2,67692	8,11634	10,30959
3,4	6,07076	11,04968	2,85318	9,25549	11,22824
3,5	6,39467	11,93166	3,03426	10,49157	12,20193
3,6	6,72898	12,86426	3,22028	11,82765	13,23229
3,7	7,07068	13,84896	3,41134	13,26687	14,32096
3,8	7,42276	14,88724	3,60754	14,81237	15,46958
3,9	7,78424	15,98058	3,80898	16,46731	16,67977
4,0	8,15510	17,13046	4,01578	18,23482	17,95318
4,1	8,50535	18,33834	4,22805	20,11787	19,29142
4,2	8,92499	19,60571	4,44588	22,11970	20,69615
4,3	9,32402	20,93404	4,66940	24,24337	22,16899
4,4	9,73244	22,32479	4,89872	26,49183	23,71156
4,5	10,15025	23,77944	5,13396	28,86825	25,32550
4,6	10,57745	25,29946	5,37522	31,37567	27,01244
4,7	11,01403	26,88631	5,62262	34,01707	28,77401
4,8	11,46001	28,54147	5,87628	36,79559	30,61184
4,9	11,91537	30,26640	6,13632	39,71421	32,52756
5,0	12,38012	32,06257	6,40286	42,77598	34,52279
5,1	12,85427	33,93145	6,67600	45,98397	36,59918
5,2	13,33780	35,87449	6,95588	49,34105	38,75833
5,3	13,83072	37,89317	7,24262	52,85038	41,00189
5,4	14,33302	39,98895	7,53632	56,51492	43,33147
5,5	14,84472	42,16229	7,83825	60,32919	45,74825
5,6	15,36581	44,41767	8,14514	64,32172	48,25525
5,7	15,89628	46,75353	8,46050	68,46992	50,85269
5,8	16,43615	49,17236	8,78330	72,78548	53,54268
5,9	16,98540	51,67560	9,11369	77,27121	56,32683
6,0	17,54404	54,26473	9,45178	81,93026	59,20677

Anhang Nr. 2

Bemerkungen zum Differenzenverfahren von H. Görtler bei Absaugung.

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Verfahren gestattet es, eine Grenzschichtströmung über den Einfluß einer Unstetigkeit des Wandwertes $v(x, 0)$ der v -Geschwindigkeitskomponente hinweg weiter zu berechnen. Für die übrigen Strömungsgebiete mit stetigem $v(x, 0)$ läßt sich dann—wie schon in §2 gesagt—ohne Schwierigkeiten eines der üblichen Verfahren zur Grenzschichtberechnung anwenden. Wir haben hierfür bei unseren Beispielen—sofern keine exakten Lösungen zur Verfügung standen—stets das von H. GÖRTLER [10] entwickelte Differenzenverfahren benutzt. Dabei erwies sich für die Strömung *ohne* Absaugung die Berücksichtigung der von H. WITTING [19] angegebenen Verbesserungen als sehr günstig. Diese Verbesserungen laufen auf eine genauere Behandlung des wandnahen Gebietes hinaus und bewirken besonders in der Nähe der Ablösung eine wesentliche Genauigkeitssteigerung. Bei der Berechnung der Strömung *mit* Absaugung dagegen lohnt sich die Benutzung jener Verbesserungen nicht mehr, einmal weil sie dann etwas umständlicher werden, zum anderen, weil jetzt das ursprüngliche Görtlersche Verfahren auch in Wandnähe viel befriedigender arbeitet. Letzteres liegt vor allem daran, daß die u -Geschwindigkeitsprofile bei Absaugung eine "völligere" Form bekommen, also etwa Geschwindigkeitsprofilen ohne Absaugung entsprechen, wie sie weit vor der Ablösung auftreten.

Anstelle der Witting'schen Verbesserungen haben sich bei den Absaugeströmungen andere kleine Änderungen des Differenzenverfahrens von Görtler außerordentlich bewährt, die wir im folgenden schildern wollen. Dabei beziehen wir uns auf die zitierte Originalarbeit [10] und können uns deshalb kurz fassen.

Bei dem Görtlerschen Differenzenverfahren werden die Grenzschichtgleichungen in ihrer dimensionslosen Form

$$(1) \quad \begin{aligned} uu_x + vu_y &= u_\infty u'_\infty + u_{yy} \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$(1a) \quad u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = u_\infty(x)$$

die wir in

$$(1b) \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = -v_0(x), \quad u(x, \infty) = u_\infty(x)$$

abändern, durch finite Differenzengleichungen ersetzt. Hierzu wird als erstes in der Halbebene $y \geq 0$ ein Gitternetz

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih & (i = 0, 1, \dots) & \quad (h > 0) \\ y_k &= kl & (k = 0, 1, \dots) & \quad (l > 0) \end{aligned}$$

eingeführt und zur Abkürzung

$$(2) \quad u_{ik} = u(x_i, y_k), \quad v_{ik} = v(x_i, y_k), \quad (u_\infty u'_\infty)_i = u_\infty(x_i) \cdot u'_\infty(x_i)$$

geschrieben. Nun nähert H. GÖRTLER die Ableitungen u_x , u_y und u_{yy} durch die finiten Ausdrücke

$$(3a) \quad u_x(x_i, y_k) = \frac{\Delta_{ik}}{2h} = \frac{1}{2h} (u_{i+1,k} - u_{i-1,k})$$

$$(3b) \quad u_y(x_i, y_k) = \frac{\nabla_{ik}}{2l} = \frac{1}{2l} (u_{i,k+1} - u_{i,k-1}) \quad (k \geq 1)$$

$$(3c) \quad u_{yy}(x_i, y_k) = \frac{\nabla_{ik}^2}{4l^2} = \frac{1}{4l^2} (\nabla_{i,k+1} - \nabla_{i,k-1}) \quad (k \geq 2)$$

$$= \frac{1}{4l^2} (u_{i,k+2} - 2u_{i,k} + u_{i,k-2})$$

an. Diese Approximationen mittels Quotienten "überspringender" Differenzen haben gegenüber denjenigen durch die üblichen Differenzenquotienten den Vorteil größerer Genauigkeit. Andererseits bringen sie aber auch verschiedene Schwierigkeiten mit sich.

Bei Verwendung der Näherungsgleichung (3a) hängen je zwei aufeinanderfolgende Funktionswerte u_{ik} und $u_{i+1,k}$ lediglich mittelbar über die Differentialgleichung zusammen. Dadurch zeigt sich in der Rechnung, daß die beiden Folgen $u_{-1,k}$, $u_{1,k}$, $u_{3,k}$, $\dots$ und $u_{0,k}$, $u_{2,k}$, $u_{4,k}$, $\dots$ bei festem k zwar jeweils einen glatten Verlauf haben, sich aber mit wachsendem ersten Index mehr und mehr voneinander entfernen. Diese "Aufspaltung" der Lösung erfordert eine laufende Glättung der Rechenergebnisse. Wir verweisen hierfür auf die ausführlichen Überlegungen bei H. WITTING [19]. Diese Schwierigkeit wird nun weitgehend behoben, wenn man statt (3a) die Approximation durch gewöhnliche Differenzen

$$(3a^*) \quad u_x(x_i, y_k) = \frac{d_{ik}}{h} = \frac{1}{h} (u_{i+1,k} - u_{ik})$$

verwendet. Dadurch nimmt man zwar (bei gleicher Schrittweite) eine leichte Vergrößerung des Abbrechfehlers in Kauf, der aber—wie H. WITTING [20] zeigt—weitaus durch eine wesentliche Erhöhung der Stabilität des Verfahrens bezüglich kleiner numerischer Störungen aufgewogen wird. Das wirkt sich in der Rechnung gerade durch eine starke Verminderung der oben genannten Aufspaltung aus.

Eine weitere ungünstige Folgeerscheinung der Approximationen (3) liegt darin, daß sie die Ableitungen

$$(4) \quad u_y(x_i, 0), \quad u_{yy}(x_i, 0), \quad u_{yy}(x_i, l)$$

unbestimmt lassen. Das ist bei $u_y(x_i, 0)$ und $u_{yy}(x_i, 0)$ nicht sehr schlimm, da diese Werte in das laufende Verfahren nicht weiter eingehen. Dafür benötigt man aber für $u_{yy}(x_i, l)$ —wegen der Wandnähe—einen umso genaueren finiten Ausdruck. Bei Strömungen *ohne* Absaugung hat man hierbei den großen

Vorteil, daß auf Grund der ersten Wandbindung

$$u_{yy}(x_i, 0) = -(u_\infty u'_\infty)_i$$

die Ableitung $u_{yy}(x_i, 0)$ bekannt ist. Setzen wir also

$$\nabla_{i0}^2 = 4l^2 u_{yy}(x_i, 0) = -4l^2 (u_\infty u'_\infty)_i,$$

so läßt sich die fehlende zweite Differenz $\nabla_{i1}^2 = 4l^2 u_{yy}(x_i, l)$ nunmehr etwa durch kubische Interpolation in den Differenzen zweiten Grades gewinnen, was zu

$$\nabla_{i1}^2 = \frac{1}{8} \nabla_{i0}^2 + \frac{1}{2} \nabla_{i2}^2 - \frac{1}{8} \nabla_{i3}^2$$

führt. Hiermit erhält man schließlich auch $\nabla_{i0} = 2l u_y(x_i, 0)$ aus

$$\nabla_{i0} = \nabla_{i2} - \nabla_{i1}^2$$

Bei Strömungen *mit* Absaugung ist die eben geschilderte Methode zur Bestimmung von ∇_{i1}^2 nicht anwendbar, da die erste Wandbindung jetzt

$$u_{yy}(x_i, 0) = -(u_\infty u'_\infty)_i + u_y(x_i, 0) v_{i0}$$

lautet, also die Größen beider Seiten unbekannt sind. Somit wäre man darauf angewiesen, durch Extrapolation zu einem finiten Ausdruck für ∇_{i1}^2 zu gelangen, wobei jedoch kaum eine befriedigende Genauigkeit zu erzielen ist. Wie die Erfahrung zeigt, wirkt sich nun aber eine sehr wechselnde Approximationsgüte weitaus ungünstiger auf ein Verfahren aus, als eine durchweg gleiche Näherung niedrigeren Grades. Dementsprechend liegt es nahe, ähnlich wie bei u_x , auch die Ableitungen u_{yy} durch gewöhnliche Differenzenquotienten

$$(3c^*) \quad u_{yy}(x_i, y_k) = \frac{\delta_{ik}}{l^2} = \frac{\delta_{ik+1} - \delta_{ik}}{l^2} = \frac{1}{l^2} (u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1})$$

($k \geq 1$) zu approximieren, denn hierdurch ist ja dann auch $u_{yy}(x_i, l)$ bestimmt. Diese Näherungsformel (3c*) hat gegenüber (3c) noch einen weiteren Vorteil. (3c*) bedeutet nämlich geometrisch für jedes x_i die Annäherung der Krümmung der Kurve $u(x_i, y_k)$ mittels des Kreises durch die Punkte $u_{i,k+1}$, u_{ik} , $u_{i,k-1}$, während bei (3c) für dieselbe Aufgabe die weiter auseinander liegenden Punkte $u_{i,k+2}$, u_{ik} , $u_{i,k-2}$ verwendet werden, was sich bei stärkeren Krümmungsänderungen, wie sie z.B. ein ganzes Stück hinter dem sprunghaften Absaugebeginn immer noch auftreten, offenbar sehr ungünstig auswirkt.

Nunmehr kann man das Differenzenverfahren völlig analog entwickeln, wie GÖRTLER es angegeben hat. Hierzu wird zunächst das aus der Kontinuitätsgleichung für die Geschwindigkeitskomponente v folgende Integral

$$v(x, y) = v(x, 0) - \int_0^y u_x(x, y) dy$$

unter Beachtung der Randbedingungen (1b) und der Approximation (3c*) mit Hilfe der Trapezregel ausgewertet:

$$(5) \quad v_{ik} = v_{i0} - \frac{l}{2h} d_{ik} - \frac{l}{h} \sum_{\nu=1}^{k-1} d_{i\nu}$$

Führt man dann (2), (3a*), (3b), (3c*) und (5) in (1) ein, so ergibt sich bei Auflösung nach der Unbekannten d_{ik}

$$(6) \quad d_{ik} = \frac{2h(u_\infty u'_\infty)_i + \frac{2h}{l^2} \delta_{ik}^2 + \nabla_{ik} \left(\sum_{\nu=1}^{k-1} d_{i\nu} - \frac{h}{l} v_{i0} \right)}{2u_{ik} - \frac{1}{2} \nabla_{ik}}$$

Zur Durchführung eines Rechenschrittes—also der numerischen Berechnung der d_{ik} für festes i —verwendet man zweckmäßig etwa folgendes Schema

$$l = \dots \quad h = \dots \quad 2h(u_\infty u'_\infty)_i = \dots \quad -\frac{h}{l} v_{i0} = \dots$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
y_k	u_{ik}	∇_{ik}	δ_{ik}^2	$2u_{ik} - 0,5\nabla_{ik}$	$-\frac{h}{l} v_{i0} + \sum_{\nu=1}^{k-1} d_{i\nu}$	d_{ik}	$u_{i+1,k}$
0	0				$-\frac{h}{l} v_{i0}$	0	0
l	u_{i1}	∇_{i1}	δ_{i1}^2	$2u_{i1} - 0,5\nabla_{i1}$	$-\frac{h}{l} v_{i0}$	d_{i1}	$u_{i1} + d_{i1}$
$2l$	u_{i2}	∇_{i2}	δ_{i2}^2	$2u_{i2} - 0,5\nabla_{i2}$	$-\frac{h}{l} v_{i0} + d_{i1}$	d_{i2}	$u_{i2} + d_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Man berechnet also als erstes jeweils in einem Arbeitsgang auf der Maschine

$$(3) = \nabla_{ik} = u_{i,k+1} - u_{i,k-1}$$

$$(4) = \delta_{ik}^2 = u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}$$

$$(5) = N_{ik} = 2u_{ik} - 0,5\nabla_{ik}$$

Dann lassen sich die beiden letzten Spalten zeilenweise ausfüllen, wobei man für jedes k den Wert

$$(7) = d_{ik} = \frac{(3) \cdot (6) + (2h/l^2) \cdot (4) + 2h(u_\infty u'_\infty)_i}{(5)}$$

wieder in einem Gang gewinnen kann. Für die Ausführung eines solchen Rechenschrittes mit etwa 20 Profilkpunkten y_k benötigt ein eingetübter Rechner ungefähr eine halbe Stunde.

Bezüglich der Schrittweiten h und l haben wir die Erfahrung gemacht, daß für $2h/l^2$ Zahlenwerte bis zu höchstens 1,0 am günstigsten sind. Für $2h/l^2 > 1$

macht sich dagegen bald eine gewisse Fehleraufschaukelung bei den wandnahen Werten von d_{ik} bemerkbar. Kleine Schrittweiten l erfordern also auch kleine h . Es gibt dabei, wie man bald feststellt, für jedes Beispiel ein ausgesprochenes Optimum. Eine Aufspaltungserscheinung der oben beschriebenen Art wird im allgemeinen nur schwach bei u_{i1} , u_{i2} und eventuell noch bei u_{i3} auftreten. Zur Behebung ist die von H. WITTING angegebene Glättungsvorschrift

$$(7) \quad d_{ik}^* = 0,25d_{i+1,k} - 0,5d_{ik} + 0,25d_{i-1,k}$$

sehr brauchbar. Man berechnet zunächst (was wenig Aufwand bedeutet) vom $(i+1)$. Schritt die drei ersten Werte $d_{i+1,k}$, bestimmt damit die verbesserten d_{ik}^* gemäß (7) und wiederholt eventuell dasselbe noch einmal iterativ. Diese Glättung der wandnahen d -Werte kann mechanisch etwa bei jedem dritten oder vierten Schritt durchgeführt werden und bewirkt dann einen sehr befriedigenden Verlauf sämtlicher Wertefolgen.

Nachdem die Rechnung auf die beschriebene Weise durchgeführt ist, sind nun noch die bisher nichtbenötigten Werte $u_y(x_i, 0)$ der Wandschubspannung zu berechnen. Dabei kann man verschiedene Wege einschlagen. Kommt es nur auf einen ersten Überblick an, so wird man etwa

$$u_y(x_i, 0) = \frac{\delta_{i2} - \delta_{i1}^2}{l} = \frac{1}{l} (u_{i3} - 2u_{i2} + 2u_{i1})$$

setzen. Einen besseren finiten Ausdruck erhält man—analog wie bei H. WITTING—vermittels des Ansatzes

$$\delta_{i0} = K\Theta_i + \sum_{\nu=1}^5 A_\nu u_{i\nu}, \quad (\Theta_i = -4l^2(u_\infty u'_\infty)_i)$$

wenn man diesen nach Taylor entwickelt und die ersten beiden Wandbindungen

$$u_{yy}(x, 0) = -u_\infty u'_\infty - u_y(x, 0)v_0(x)$$

$$u_{yyy}(x, 0) = -u_{yy}(x, 0)v_0(x)$$

beachtet. Durch Koeffizientenvergleich entsteht dann ein System von vier linearen Gleichungen für die sechs unbekannten Koeffizienten. Hierfür hat es sich nun nach dem Vorgang von H. WITTING bewährt, der schlechten Fehlerfortpflanzung an der Wand wegen, einfach $A_1 = A_2 = 0$ zu setzen. Dann lautet schließlich der finite Ausdruck für δ_{i0}

$$\delta_{i0} = \frac{1}{N} [-(21150 + 9000\bar{v}_i)\Theta_i + 80000u_{i3} - 50625u_{i4} + 10368u_{i5}]$$

mit

$$N = 89740 + 84600\bar{v}_i + 36000\bar{v}_i^2$$

und

$$\bar{v}_i = -lw_0(x_i).$$

Das entspricht für $\bar{v}_i = 0$ genau der von H. WITTING für die Strömung ohne Absaugung angegebenen Formel.

Universität Freiburg i. Br.

Literaturverzeichnis.

- [1] H. SCHLICHTING, Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1951.
- [2] E. J. WATSON, The Asymptotic Theory of Boundary Layer Flow with Suction, A. R. C., R M 2619 (Sept. 1947).
- [3] R. IGLISCH, Exakte Berechnung der laminaren Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung, Schriften d. Deutschen Akad. d. Luftfahrtforschung, Bd. 8 B (1944) Heft 1.
- [4] L. PRANDTL, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verh. d. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904, Verlag Teubner, Leipzig 1905.
- [5] H. G. LEW & R. D. MATHIEU, Boundary Layer Control by Porous Suction, The Pennsylv. State Univ., Dep. of Aerodyn. Engineering, Techn. Rep. No. 3 (1954).
- [6] Sir M. JONES & M. HEAD, The Reduction of Drag by Distributed Suction, Third Anglo-American Aeronautical Conference, Brighton 1951. Published by "The Roy. Aeron. Soc.", London 1952.
- [7] H. PFENNINGER, Investigations on Reductions of Friction on Wings, in Particular by Means of Boundary Layer Suction, NACA—TM 1181, August 1947.
- [8] A. E. v. DOENHOFF & L. K. LOFTIN, JR., Present Status of Research on Boundary Layer Control, NACA—RM No. L8J29, January 1949.
- [9] W. RHEINBOLDT, Über die äußere Randbedingung bei den Grenzschichtgleichungen, Festband "50 Jahre Grenzschichtforschung" Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1955.
- [10] H. GÖRTLER, Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, S. 173 (1948).
- [11] R. COURANT & D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Springer Verlag, Berlin 1937 (1.Aufl.).
- [12] S. GOLDSTEIN, Concerning some Solutions of the Boundary Layer Equations in Hydrodynamics, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26, S.19 (1930).
- [13] E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON, A Course of Modern Analysis, The Univ. Press, Cambridge 1952 (4.Aufl.).
- [14] K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer Verlag, Berlin und Heidelberg 1947 (4.Aufl.).
- [15] É. BOREL, Leçons sur les Séries Divergentes, Verlag Gauthier-Villars, Paris 1901.
- [16] S. GOLDSTEIN, On Laminar Boundary Layer Flow near a Position of Separation, Quart. Journ. of Mech. a.Appl. Math. Bd. 1 (1948) S. 43.
- [17] H. GÖRTLER, Weiterentwicklung eines Grenzschichtprofils bei gegebenem Druckverlauf, ZAMM, 19, S. 129 (1939).
- [18] A. ULRICH, Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder, Arch. d. Math. 2, S. 33 (1949).
- [19] H. WITTING, Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten, Dissertation Freiburg/Br. 1953, abgedruckt in ZAMP, Bd. IV, S. 376.
- [20] H. WITTING, Über die Instabilitäten der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen, Festband "50 Jahre Grenzschichtforschung" Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1955.