Etude Electromagnétique et Thermodynamique d'un Fluide Relativiste Chargé

PHAM MAU QUAN

Mémoire transmis par A. LICHNEROWICZ

SOMMAIRE

INTRODUCTION 476

Chapitre I. CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES.

1. Considérations géométriques 479
2. Processus matériels et principaux schémas de distribution
énergétique 480
3. Les équations du fluide thermodynamique 482

Chapitre II. LES EQUATIONS DU CHAMP POUR UN SCHEMA FLUIDE- CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.

I. Les équations macroscopiques de l'électromagnétisme

4. Les tenseurs champ électrique-induction magnétique $H_{\alpha\beta}$ et
induction électrique-champ magnétique $G_{\alpha\beta}$ 484
5. Les vecteurs champs, inductions électriques et magnétiques
 $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ et les équations de liaison 486
6. Les conditions de conservation et le vecteur courant électrique . 488
7. Les équations relativistes du champ électromagnétique 490

II. Le tenseur électrodynamique et les équations relativistes de l'électrodynamique.

8. Forme globale des équations de MAXWELL 490
9. Le tenseur électrodynamique et la généralisation relativiste
des équations de l'électrodynamique 491

III. Le schéma fluide-champ électromagnétique

10. Le tenseur d'impulsion-énergie	495
11. Les équations de mouvement	497
12. Cas d'un fluide parfait	499

*Chapitre III. LA STRUCTURE DES EQUATIONS DU CHAMP RELATIF A UN
SCHEMA FLUIDE PARFAIT-CHAMP ELECTROMAGNETIQUE. LE SCHEMA
CHAMP ELECTROMAGNETIQUE PUR.*

I. Le problème de Cauchy.

13. Les équations fondamentales du champ	500
14. Le problème intérieur	502
15. Détermination de δ	503
16. Détermination des $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_{00} \theta$	504
17. Détermination des $\partial_0 H_{\alpha\beta}$	507
18. La solution du problème intérieur et les conditions de con- servation	508

II. Les variétés exceptionnelles.

19. Préliminaires	511
20. Les variétés caractéristiques V_3^C des équations d'EINSTEIN . .	512
21. Les fronts d'ondes hydrodynamiques V_3^H	512
22. Les variétés caractéristiques V_3^M des équations de MAXWELL .	517

III. Le schéma champ électromagnétique pur.

23. Les équations du champ du vide	518
24. Le problème de Cauchy relatif au vide et l'interprétation des équations de MAXWELL-EINSTEIN	519

*Chapitre IV. LE PROBLEME DE RACCORDEMENT.**I. Le raccordement de deux milieux fluides.*

25. Conditions géométriques du raccordement	521
26. Raccordement du champ de température	522
27. L'expression relativiste des théorèmes de GAUSS, d'AMPÈRE et de FARADAY	523
28. Raccordement du champ électromagnétique	526
29. Interprétation locale et étude de ω et K^α	527
30. Une évaluation de la discontinuité du champ électromag- nétique dans le cas où σ , $\bar{\sigma}$ sont finis	529
31. Composantes continues du tenseur d'impulsion-énergie . . .	531

II. Le problème du prolongement.

32. Position du problème	533
33. Les conditions de raccordement avec le vide	534
34. Prolongement de l'intérieur vers l'extérieur	535
35. Prolongement de l'extérieur vers l'intérieur	537

NOTATIONS

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} : \text{dérivées partielles,}$$

∇_α : dérivée covariante,

$\alpha, \beta, \dots$, tout indice grec = 0, 1, 2, 3.

$i, j, \dots$, tout indice latin = 1, 2, 3.

INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans ce travail, d'établir les équations qui peuvent apparaître en Relativité Générale, comme les équations rigoureuses d'une théorie phénoménologique des fluides chargés. Elles constituent une étude électromagnétique et thermodynamique de ces fluides.

Notre point de vue reste essentiellement classique.

Nous considérons le fluide chargé comme un milieu continu au sein duquel se passent des phénomènes électromagnétiques et thermodynamiques qui réagissent mutuellement. En ce qui concerne l'étude des phénomènes thermodynamiques, le lecteur se reporte utilement à notre travail antérieur [8]. Nous nous contenterons d'en rappeler les équations. Par contre, il convient de dire quelques mots précis sur l'étude des phénomènes électromagnétiques.

Notre traitement se base sur les données de l'expérience et sur les équations macroscopiques de MAXWELL.

Les phénomènes électromagnétiques qui se passent au sein de la matière, sont bien connus depuis longtemps. On peut en rendre compte en introduisant quatre vecteurs: champs, inductions électriques $\vec{E}$, $\vec{D}$ et magnétiques $\vec{H}$, $\vec{B}$. L'expérience met en évidence, si la matière est au repos, l'existence des charges électriques et du courant de conduction électrique accompagné de ses effets magnétiques et calorifiques. Si la matière se met en mouvement, il doit se manifester selon l'expérience, outre les phénomènes précédents, un courant de convection (ROWLAND, 1876), un champ magnétique produit par le mouvement d'un diélectrique dans un champ électrique (ROENTGEN-EICHENWALD, 1888), des charges superficielles sur un diélectrique en mouvement dans un champ magnétique (H. A. WILSON, 1904).

L'ancienne théorie de HERTZ n'expliquant pas convenablement tous ces phénomènes, ceux-ci devaient servir de point de départ à une étude macroscopique du champ électromagnétique par MINKOWSKI.

D'autre part, la théorie des électrons de LORENTZ a apporté en 1896, de plus grands progrès à l'électrodynamique. C'est une théorie microscopique où l'on suppose l'existence d'un champ électrique $\vec{e}$ et d'un champ magnétique $\vec{h}$, variant considérablement au voisinage de particules élémentaires, porteuses de charges électriques. D'où l'introduction du courant microscopique de convection $\delta\vec{v}$.

Les grandeurs macroscopiques $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$, ... qui varient peu dans les domaines occupés par de la matière chargée, se déduisent des grandeurs microscopiques par la formation de moyennes. Ainsi, LORENTZ lui-même a traité le cas où la matière est au repos. Puis, BORN et DALLENBACH ont étendu l'étude au cas où la matière est en mouvement. L'électrodynamique de LORENTZ explique convenablement les phénomènes cités que la théorie de HERTZ n'interprétait pas.

Mais, lorsque H. A. WILSON et M. WILSON répétèrent en 1914 la première

expérience de H. A. WILSON, avec un diélectrique artificiel possédant une perméabilité magnétique notable, ils mirent en évidence un désaccord entre l'expérience et la prévision à laquelle conduisait la théorie de LORENTZ. Signalons cependant qu'aucun calcul n'a été refait pour vérifier cette assertion.

Par ailleurs, la théorie de LORENTZ a été construite à une époque où les théories quantiques n'apparaissaient pas encore. Il en résulte que si l'on se plie aujourd'hui aux exigences quantiques modernes, le traitement macroscopique à partir des valeurs moyennes demande de notables modifications et présente alors certaines difficultés.

La théorie des électrons de LORENTZ a été transposée en Relativité générale avec une extrême élégance par A. LICHNEROWICZ. Il a réalisé l'étude mathématique des équations relativistes de l'électromagnétisme et a réussi leur intégration. Mais, pour des raisons exposées précédemment, nous avons préféré essayer un traitement phénoménologique direct de l'Electromagnétisme. On verra que notre étude fournit avec beaucoup de simplicité, l'interprétation des phénomènes connus et qu'elle contient en première approximation le traitement macroscopique de MINKOWSKI.

Notre choix du formalisme de la Relativité est tout indiqué et suggéré par les propriétés d'invariance des équations de MAXWELL dans le groupe de LORENTZ. En effet, le problème de la propagation des ondes électromagnétiques trouve sa solution géométrique dans la structure hyperbolique normale de la variété espace-temps. La réalité physique attribuée à celle-ci fournit la méthode pour établir les équations générales de la théorie et pour les interpréter localement.

J'adopte ici le même point de vue que celui que j'ai choisi dans mon travail "Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques" [8]. J'établis les équations générales du champ; j'envisage le problème de leur intégration; j'interprète les variétés exceptionnelles qui se présentent. J'étudie ensuite quelques problèmes d'un intérêt particulier.

Aussi, ai-je divisé le travail actuel en quatre chapitres.

Le 1^{er} chapitre très court est une introduction. J'y rappelle les idées essentielles préluant à une étude relativiste des milieux continus. La structure locale d'espace-temps de MINKOWSKI que possède l'univers, permet d'introduire un repère galiléen local par rapport auquel la matière est au repos. Ce repère est appelé *repère propre*. Il suffit d'écrire, dans ce repère, les équations relatives à la matière au repos. Puis par un changement de repère, on en déduit l'expression générale invariante des équations relativement au repère naturel associé à un système quelconque de coordonnées locales.

Le chapitre II est consacré précisément à l'établissement, suivant cette méthode, des équations du champ relatif à un schéma fluide-champ électromagnétique. Nous étions partis des équations de MAXWELL dans la matière au repos. Les équations générales obtenues d'une manière rigoureuse, interprètent très simplement les résultats de la théorie macroscopique du champ électromagnétique, élaborée par MINKOWSKI. Nous avons ensuite proposé une expression

du tenseur d'impulsion-énergie relatif au schéma considéré, auquel on est amené assez naturellement et qui trouve sa justification dans les conséquences.

Une étude mathématique des équations fondamentales du champ fait l'objet du chapitre III. C'est le problème de leur intégration étudié au moyen d'une analyse du problème de Cauchy. Les variétés exceptionnelles ont reçu une interprétation naturelle dans le langage de la théorie de la propagation par ondes.

Un dernier chapitre, le chapitre IV, achève l'unité de ce travail. Il est consacré à l'étude des problèmes à la frontière de deux milieux différents. Nous les abordons en faisant d'abord l'extension relativiste des théorèmes de GAUSS, d'AMPÈRE et de FARADAY. Les résultats obtenus sont généraux, puisqu'ils se rapportent au champ électromagnétique pris dans son ensemble. Ils confirment les résultats classiques qui ont été déduits des considérations d'électrostatique et de magnétisme séparément. Nous les avons ensuite appliqués à l'étude du problème du prolongement.

Chapitre I—CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES

1. Considérations géométriques.

La représentation de la matière s'effectue, en Relativité générale, par des schémas du type hydrodynamique. La notion de fluide y joue donc un rôle primordial. Nous allons rappeler quelques définitions précises.

Dans l'étude des milieux continus, nous représentons le fluide considéré par un domaine connexe de l'espace-temps, variété différentiable à quatre dimensions V_4 de classe c^2 et de classe (c^4 par morceaux) douée de la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta.$$

du type hyperbolique normal. Les $g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de classe c^1 et de classe (c^3 par morceaux).

Un fluide relativiste peut être considéré comme un milieu matériel continu, déformable, doué des propriétés suivantes:

- 1) il possède une densité propre ρ .
- 2) il est possible de définir un vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ pour chaque point du milieu.

Considérons dans la variété espace-temps V_4 un domaine D occupé par un milieu fluide.

$\vec{u}$ désigne le vecteur vitesse unitaire en chaque point du fluide. Ses trajectoires orientées dans le temps, sont appelées lignes de courant.

On appelle *repère propre* en un point x du domaine D , un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$, orientés dans l'espace, sont normés par la condition $(\vec{V}^{(i)})^2 = -1$.

Dans le repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes locales quelconque, nous avons:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta &= +1 \\ g_{\alpha\beta} V^{(i)\alpha} V^{(i)\beta} &= -1. \end{aligned}$$

Dans ces formules et dans la suite de ce travail, tout indice grec prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et tout indice latin les valeurs 1, 2, 3.

Le repère propre ainsi défini doit être identifié à un repère galiléen local. L'axe de temps a la direction du vecteur $\vec{u}$. L'espace associé est défini par le tri-plan $(\vec{V}^{(i)})$.

On peut naturellement rapporter le voisinage d'un point de V_4 au repère propre en ce point. La métrique d'univers de V_4 prend la forme

$$ds^2 = \delta_{\alpha'\beta'} \omega^{\alpha'} \omega^{\beta'} = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2.$$

où les ω^a forment un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes.

La considération du repère propre est fort utile.

En effet, un tenseur peut être défini en un point de V_4 par ses composantes relatives au repère propre. Ses composantes générales quelconques se déduisent des premières par les formules de transformation connues.

Quant à l'interprétation locale des équations, on s'appuie sur la remarque suivante:

Dans la théorie de la Relativité générale, l'univers est regardé comme une variété dont les systèmes de référence en un point se repèrent entre eux comme dans la Relativité restreinte. Dans celle-ci, l'espace temps rapporté au repère propre, admet la métrique

$$ds^2 = (dx^{0'})^2 - (dx^{1'})^2 - (dx^{2'})^2 - (dx^{3'})^2$$

où $x^{0'} = ct$, c désigne la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

2. Processus matériels et principaux schémas de distribution énergétique.

Considérons un domaine D de l'espace-temps V_4 , traversé par une forme quelconque d'énergie. A l'intérieur de ce domaine, la métrique d'univers $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ satisfait aux dix équations d'EINSTEIN

$$(2.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + k)g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où χ est une constante, $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la variété riemannienne V_4 :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \partial_\alpha \Gamma_{\rho\beta}^\rho + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\sigma$$

$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ et k la constante cosmologique.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ de signification purement physique, doit généraliser la densité d'impulsion-énergie. Il décrit la distribution énergétique dans D et son mouvement.

Comme nous avons dit, toute distribution énergétique peut être schématisée sous forme de fluide. Nous considérons donc des schémas fluides. Les éléments de description en sont fournis par l'expérience.

Du point de vue physique, le fluide est généralement doué de propriétés diverses. Les forces de liaison entre divers éléments du fluide jouent un rôle fondamental dans les considérations mécaniques et thermodynamiques. Elles se traduisent par le tenseur des pressions propres $\pi_{\alpha\beta}$. Les phénomènes calorifiques sont introduits par un champ scalaire θ , dit champ des températures propres. Les phénomènes électromagnétiques sont susceptibles d'être représentés par deux tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$.

Ces divers phénomènes mécaniques, thermodynamiques et électromagnétiques se superposent dans le fluide et réagissent entre eux. Leur séparation et leur

interaction peuvent être envisagées comme une décomposition purement géométrique du tenseur d'impulsion-énergie.

Nous sommes ainsi conduits à envisager le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} + \Theta_{\alpha\beta}$$

où $\rho u_\alpha u_\beta$ représente la densité de matière et d'énergie pondérable, $\pi_{\alpha\beta}$ les pressions propres, $Q_{\alpha\beta}$ les échanges thermiques par conduction, $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie électromagnétique et $\Theta_{\alpha\beta}$ traduit l'interaction du champ électromagnétique avec la matière.

Il arrive que certaines propriétés du fluide sont négligées aux dépens des autres. Les termes correspondants seront supprimés dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie. A chaque forme du tenseur $T_{\alpha\beta}$ considéré, correspond un schéma de distribution énergétique. Ainsi, nous pouvons considérer les différents schémas suivants:

1. le schéma matière pure avec

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$$

2. le schéma fluide avec

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta}$$

3. le schéma fluide thermodynamique avec

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}$$

4. le schéma fluide-champ électromagnétique avec

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} + \Theta_{\alpha\beta}$$

5. le schéma champ électromagnétique pur avec

$$T_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$$

Les quatre premiers schémas conviennent pour une étude phénoménologique des fluides. Le cinquième donne la description du vide traversé par un champ électromagnétique.

Les schémas n° 1, 2, 5 ont fait l'objet d'une très belle étude d'ensemble par A. LICHNEROWICZ. Leur existence est liée à la structure géométrique de l'espace-temps. J'ai étudié le schéma fluide thermodynamique dans mon travail antérieur. Je me propose l'étude du schéma fluide chargé-champ électromagnétique dans ce mémoire. Je vais d'abord rappeler les résultats fondamentaux concernant l'étude des fluides thermodynamiques.

3. Les équations du fluide thermodynamique.

Le fluide envisagé est dit *thermodynamique*, lorsque les phénomènes calorifiques ne sont pas négligés. Un tel fluide fait intervenir les données suivantes: vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, densité propre ρ , tenseur des pressions propres $\pi_{\alpha\beta}$ et le champ scalaire des températures propres θ .

La fonction scalaire θ est supposée de classe c^2 et de classe (c^4 par morceaux).

Pour déterminer l'expression explicite de $T_{\alpha\beta}$, nous rapportons d'abord le fluide considéré au voisinage d'un point $x \in V_4$ au repère propre en ce point. Dans ce repère, la matière est au repos au point considéré. Le fluide γ est caractérisé par sa densité propre ρ , son tenseur des pressions $\pi_{i'k'}$ et le vecteur courant de chaleur $q_{i'}$ qui rend compte de la conduction thermique.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ a donc pour valeurs des composantes dans le repère propre

$$T_{0'0'} = \rho \quad T_{i'k'} = -\pi_{i'k'} \quad T_{0'i'} = T_{i'0'} = -q_{i'}.$$

Rapportons maintenant l'espace-temps au point considéré au repère naturel associé au système de coordonnées curvilignes locales x^α . Soit (A_λ^α) la matrice de passage d'un repère à l'autre, et $(A^{\lambda'}_\alpha)$ la matrice inverse. On a:

$$\begin{aligned} A_{0'}^\alpha &= u^\alpha & A_{\alpha'}^{0'} &= u_\alpha \\ A_{i'}^\alpha &= V^{(i')\alpha} & A_{\alpha'}^{i'} &= -V^{(i')}_\alpha. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de repère, nous obtenons l'expression générale invariante de $T_{\alpha\beta}$

$$(3.1) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha)$$

où nous avons posé:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta} &= \sum_{i',k'} \pi_{i'k'} V^{(i')}_\alpha V^{(k')}_\beta \\ q_\alpha &= \sum_{i'} q_{i'} V^{(i')}_\alpha. \end{aligned}$$

Les quantités $\pi_{\alpha\beta}$ et q_α satisfont respectivement aux identités

$$(3.2) \quad \pi_{\alpha\beta} u^\alpha = 0$$

$$(3.3) \quad q_\alpha u^\alpha = 0.$$

La conduction thermique peut être représentée au moyen de l'hypothèse de FOURIER. Une étude détaillée conduit à la définition suivante du vecteur courant de chaleur

$$(3.4) \quad q_\alpha = -\kappa \partial_\rho \theta (g_\alpha^\rho - u^\rho u_\alpha).$$

Il satisfait à l'équation de conduction thermique

$$(3.5) \quad \nabla_{\alpha} q^{\alpha} = c \rho u^{\alpha} \partial_{\alpha} \theta - \frac{l}{\rho} u^{\alpha} \partial_{\alpha} \rho.$$

où u , c , l représentent respectivement la conductivité thermique, la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur de dilatation du fluide considéré.

Cas d'un fluide parfait: Le fluide est dit parfait si la résultante des forces superficielles agissant sur un élément de surface orientée, est normale à cet élément. Dans ce cas, la quadrique des pressions définie dans le repère propre par la forme quadratique de coefficients $\pi_{i'k'}$ est une sphère. On a alors $\pi_{i'k'} = p \delta_{i'k'}$, où p désigne la pression scalaire du fluide au point considéré.

Il en résulte que $\pi_{\alpha\beta} = p(g_{\alpha\beta} - u_{\alpha}u_{\beta})$ et que l'on peut donner au tenseur d'impulsion-énergie relatif à un fluide parfait thermodynamique, la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_{\alpha}u_{\beta} - pg_{\alpha\beta} - (u_{\alpha}q_{\beta} + u_{\beta}q_{\alpha})$$

où les quantités ρ , p , θ sont liées par la relation

$$\rho = \varphi(p, \theta)$$

appelée équation d'état du fluide.

Les résultats précédents ont été rappelés parce qu'ils figurent dans la présente étude. Pour plus de détails, nous prions le lecteur de se reporter au mémoire original [8].

Chapitre II—LES EQUATIONS DU CHAMP POUR UN SCHEMA FLUIDE-CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

I—LES EQUATIONS MACROSCOPIQUES DE L'ELECTROMAGNETISME

4. Les tenseurs champ électrique-induction magnétique $H_{\alpha\beta}$ et induction électrique-champ magnétique $G_{\alpha\beta}$.

Dans la théorie de MAXWELL, les équations de l'électromagnétisme dans la matière au repos sont constituées par les deux groupes suivants:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\Gamma} \\ \text{div } \vec{D} = \delta \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Ces équations établissent le lien entre le champ électrique $\vec{E}$, l'induction magnétique $\vec{B}$, le champ magnétique $\vec{H}$, l'induction électrique $\vec{D}$ d'une part et la densité de charge électrique δ , le courant de conduction $\vec{\Gamma}$ d'autre part. Ces diverses quantités ne sont pas indépendantes. Elles sont liées par les relations:

$$(4.3) \quad \vec{D} = \lambda \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{\Gamma} = \sigma \vec{E}$$

où les scalaires λ , μ , σ désignent respectivement le pouvoir diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu considéré.

Des équations du premier groupe (4.1), on peut déduire la loi de la conservation de l'électricité:

$$(4.4) \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \text{div } \vec{\Gamma} = 0.$$

Ces bases classiques étant rappelées, nous allons voir comment on peut généraliser les équations précédentes en Relativité.

Considérons alors un domaine D de l'espace-temps V_4 , occupé par un milieu matériel chargé, siège des phénomènes électromagnétiques. Soit x un point de D , auquel est attaché le repère propre $(\vec{u}, \vec{V}^{(i)})$. Nous admettons que les équations rigoureuses du champ électromagnétique se réduisent localement aux équations classiques (4.1) et (4.2). Nous sommes amenés à introduire deux tenseurs antisymétriques à deux indices $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ dont les composantes relatives au repère

propre sont données par les deux matrices:

$$(H_{\lambda'\mu'}) = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (G_{\lambda'\mu'}) = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

où $D_i = \lambda E_i$ et $B_i = \mu H_i$, et le quadrivecteur $\vec{J}$ de composantes relatives au repère propre:

$$(J_{\lambda'}) = (\delta \quad \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3).$$

Les équations du champ électromagnétique relativement au repère propre peuvent alors se mettre sous la forme:

$$(4.5) \quad \nabla_{\lambda'} G^{\lambda'\mu'} = J^{\mu'}$$

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} \eta^{\lambda'\mu'\nu'\rho'} \nabla_{\lambda'} H_{\mu'\nu'} = 0$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume spatio-temporel. Dans le repère propre, $g = -1$ et $\eta^{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \epsilon^{\lambda'\mu'\nu'\rho'}$, $\epsilon^{\lambda'\mu'\nu'\rho'}$ désigne l'indicateur classique de permutation.

Ceci étant, pour avoir les équations générales invariantes du champ électromagnétique, il nous suffit de faire un changement de repère. Nous aurons à considérer des champs de tenseurs antisymétriques à deux indices $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ définis en chaque point de la variété espace-temps V_4 .

$H_{\alpha\beta}$ sera dit le *tenseur champ électrique-induction magnétique* (en abrégé ce-im). $G_{\alpha\beta}$ sera dit le *tenseur induction électrique-champ magnétique* (en abrégé ie-cm).

Les champs de tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ seront supposés de classe c^0 et de classe (c^2 par morceaux). Ils doivent satisfaire aux équations suivantes:

$$(4.7) \quad \nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = J^{\beta}$$

$$(4.8) \quad \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\alpha} H_{\beta\gamma} = 0$$

où J^{β} est un vecteur qui sera précisé.

Nous appellerons les équations (4.7) et (4.8) les équations de MAXWELL respectivement du 1^{er} et du 2^e groupe. Pour qu'elles puissent décrire le phénomène physique de l'électromagnétisme, il est nécessaire qu'elles se réduisent dans le repère propre au point considéré, aux équations (4.5) et (4.6).

Nous introduirons dans la suite les tenseurs $\overset{*}{H}^{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{G}^{\alpha\beta}$ adjoints aux tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$, définis ainsi:

$$(4.9) \quad \overset{*}{H}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta}$$

$$(4.10) \quad \overset{*}{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta}.$$

A l'aide du tenseur adjoint $\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta}$, nous pouvons encore écrire les équations (4.8) sous la forme:

$$(4.8') \quad \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0.$$

Les équations (4.8) expriment que la forme $H = \frac{1}{2}H_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ a une différentielle extérieure nulle. H est donc localement la différentielle extérieure d'une forme linéaire. Il existe localement un champ de vecteurs φ_α dont $H_{\alpha\beta}$ est le rotationnel:

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha.$$

Cette remarque sera utile pour l'étude de la structure des équations.

5. Les vecteurs champs, inductions électriques et magnétiques $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ et les équations de liaison.

Par multiplication contractée des tenseurs $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{H}{}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{G}{}_{\alpha\beta}$ avec u^α , on forme quatre vecteurs covariants E_β , D_β , B_β , H_β dont les composantes relatives au repère propre ont pour valeurs:

$$\begin{aligned} H_{\lambda'0'} u^{\lambda'} &= H_{0'0'} u^{0'} = E_{0'} = 0 & H_{\lambda'i'} u^{\lambda'} &= H_{0'i'} u^{0'} = E_{i'}, \\ G_{\lambda'0'} u^{\lambda'} &= G_{0'0'} u^{0'} = D_{0'} = 0 & G_{\lambda'i'} u^{\lambda'} &= G_{0'i'} u^{0'} = D_{i'}, \\ \overset{*}{H}_{\lambda'0'} u^{\lambda'} &= \overset{*}{H}_{0'0'} u^{0'} = B_{0'} = 0 & \overset{*}{H}_{\lambda'i'} u^{\lambda'} &= \overset{*}{H}_{0'i'} u^{0'} = B_{i'}, \\ \overset{*}{G}_{\lambda'0'} u^{\lambda'} &= \overset{*}{G}_{0'0'} u^{0'} = H_{0'} = 0 & \overset{*}{G}_{\lambda'i'} u^{\lambda'} &= \overset{*}{G}_{0'i'} u^{0'} = H_{i'}. \end{aligned}$$

Nous sommes amenés à considérer les quatre vecteurs d'espace ainsi définis et à les identifier avec les vecteurs champ et induction électriques et magnétiques définis dans la section d'espace locale au point considéré. Dans un repère quelconque, nous poserons:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} u^\alpha &= E_\beta \\ G_{\alpha\beta} u^\alpha &= D_\beta \\ \overset{*}{H}_{\alpha\beta} u^\alpha &= B_\beta \\ \overset{*}{G}_{\alpha\beta} u^\alpha &= H_\beta \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sur ces relations, on peut vérifier les identités suivantes:

$$(5.2) \quad E_\beta u^\beta = 0 \quad D_\beta u^\beta = 0 \quad B_\beta u^\beta = 0 \quad H_\beta u^\beta = 0$$

La définition précédente donne une bonne interprétation des équations de transformation de $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ dans le groupe de transformation de LORENTZ. Nous choisissons à cet effet, un espace-temps de la Relativité restreinte. Et selon la méthode du repère propre, nous identifions le vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur vitesse d'univers:

$$u^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad u^{i'} = \frac{v^{i'}}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

où v représente le vecteur vitesse classique.

On écrit ainsi pour le champ électrique $\vec{E}$:

$$E_{i'} = H_{0'i'} u^{0'} + H_{k'i'} u^{k'}$$

et des relations analogues pour $\vec{D}$, $\vec{B}$ et $\vec{H}$. On en déduit ensuite, en remplaçant les $u^{\lambda'}$ par leurs valeurs, les équations de transformation suivantes:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} E_{i'} &= \frac{H_{0'i'} + H_{k'i'} \frac{v^{k'}}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & D_{i'} &= \frac{G_{0'i'} + G_{k'i'} \frac{v^{k'}}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ B_{i'} &= \frac{\overset{*}{H}_{0'i'} + \overset{*}{H}_{k'i'} \frac{v^{k'}}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & H_{i'} &= \frac{\overset{*}{G}_{0'i'} + \overset{*}{G}_{k'i'} \frac{v^{k'}}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

où l'on peut substituer aux $H_{0'i'}$, $H_{k'i'}$, $G_{0'i'}$, $G_{k'i'}$, $\overset{*}{H}_{0'i'}$, $\overset{*}{H}_{k'i'}$, $\overset{*}{G}_{0'i'}$, $\overset{*}{G}_{k'i'}$, les vecteurs induits correspondants.

La définition des vecteurs $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ et $\vec{B}$ conduit encore aux relations suivantes

$$(5.4) \quad G_{\alpha\beta} u^\alpha = \lambda H_{\alpha\beta} u^\alpha$$

$$(5.5) \quad \mu G_{\alpha\beta} u^\alpha = H_{\alpha\beta} u^\alpha$$

où les quantités λ et μ sont des scalaires représentant encore le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu considéré.

Les équations (5.4) et (5.5) seront appelées *les équations de liaison*. Elles montrent que les deux champs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut donc exprimer les $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$ ou inversement.

En effet, à partir de (5.4), nous pouvons former l'égalité

$$(5.6) \quad (G_{\alpha\beta} u_\gamma + G_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta = \lambda (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta.$$

D'autre part, (5.5) se met facilement sous la forme

$$\mu (G_{\alpha\beta} u_\gamma + G_{\beta\gamma} u_\alpha + G_{\gamma\alpha} u_\beta) = H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha + H_{\gamma\alpha} u_\beta$$

vraie pour tout ensemble de valeurs α , β , γ . Par multiplication contractée de cette relation avec u^β , puis retranchant l'égalité (5.6) multipliée par μ de la

relation ainsi obtenue, nous avons:

$$\mu G_{\gamma\alpha} u_{\beta} u^{\beta} = (H_{\alpha\beta} u_{\gamma} + H_{\beta\gamma} u_{\alpha} + H_{\gamma\alpha} u_{\beta}) u^{\beta} - \lambda\mu (H_{\alpha\beta} u_{\gamma} + H_{\beta\gamma} u_{\alpha}) u^{\beta}$$

d'où

$$\mu G_{\gamma\alpha} = H_{\gamma\alpha} + (1 - \lambda\mu)(H_{\beta\gamma} u^{\beta} u_{\alpha} - H_{\beta\alpha} u^{\beta} u_{\gamma}).$$

Nous en déduisons la formule

$$(5.7) \quad G_{\gamma\alpha} = \frac{1}{\mu} H_{\gamma\alpha} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (H_{\beta\gamma} u^{\beta} u_{\alpha} - H_{\beta\alpha} u^{\beta} u_{\gamma})$$

et par inversion

$$(5.8) \quad H_{\gamma\alpha} = \mu G_{\gamma\alpha} - \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda} (G_{\beta\gamma} u^{\beta} u_{\alpha} - G_{\beta\alpha} u^{\beta} u_{\gamma}).$$

Ces formules peuvent remplacer avantageusement les équations de liaison (5.4) et (5.5).

6. Les conditions de conservation et le vecteur courant électrique.

Nous désignerons dans la suite par $\vec{\mathfrak{D}}$ et $\vec{\mathfrak{E}}$ les deux vecteurs qui figurent aux premiers membres des équations de MAXWELL, soit:

$$(6.1) \quad \mathfrak{D}^{\beta} \equiv \nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta}$$

$$(6.2) \quad \mathfrak{E}^{\beta} \equiv \nabla_{\alpha} H^{*\alpha\beta}$$

Prenons la divergence du vecteur $\vec{\mathfrak{D}}$:

$$\nabla_{\alpha} \mathfrak{D}^{\alpha} = \nabla_{\alpha} (\nabla_{\beta} G^{\beta\alpha}) = -\frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} G^{\alpha\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta}).$$

En vertu de la formule de commutation des dérivations covariantes, elle a pour valeur

$$\nabla_{\alpha} \mathfrak{D}^{\alpha} = \frac{1}{2} (R^{\alpha}_{\lambda, \alpha\beta} G^{\lambda\beta} + R^{\beta}_{\lambda, \beta\alpha} G^{\alpha\lambda}) = R_{\lambda\alpha} G^{\lambda\alpha}.$$

Le tenseur de RICCI $R_{\lambda\alpha}$ étant symétrique, $G^{\lambda\alpha}$ étant antisymétrique, nous en déduisons que $\nabla_{\alpha} \mathfrak{D}^{\alpha}$ est nulle. Un calcul analogue montre que $\nabla_{\alpha} \mathfrak{E}^{\alpha}$ est nulle.

Ainsi, les deux vecteurs $\vec{\mathfrak{D}}$ et $\vec{\mathfrak{E}}$ jouissent d'une propriété fondamentale: *leurs divergences sont nulles*:

$$(6.3) \quad \nabla_{\alpha} \mathfrak{D}^{\alpha} = 0$$

$$(6.4) \quad \nabla_{\alpha} \mathfrak{E}^{\alpha} = 0$$

Ces deux équations seront appelées les conditions de conservation relatives aux équations de MAXWELL.

Des équations de MAXWELL du premier groupe, on tire alors l'équation

$$(6.5) \quad \nabla_\alpha J^\alpha = 0$$

qui traduit la loi de conservation de l'électricité que l'on va interpréter.

En effet, le vecteur $\vec{J}$ qui figure dans les équations de MAXWELL (4.7) doit avoir pour composantes $(\delta, \Gamma_{i'})$ dans le repère propre. Il sera appelé le *vecteur courant électrique*.

Dans un repère quelconque, les formules de transformation donnent

$$J_\alpha = J_{\lambda'} A_{\alpha}^{\lambda'} = \delta A_{\alpha}^{0'} + \Gamma_{i'} A_{\alpha}^{i'}.$$

Or les $A_{\alpha}^{\lambda'}$ sont les valeurs des composantes covariantes des vecteurs du repère propre dans le nouveau repère. On a donc:

$$J_\alpha = \delta u_\alpha + \Gamma_\alpha$$

où l'on a posé $\Gamma_\alpha = \sum_{i'} -\Gamma_{i'} V^{(i')}_{\alpha}$ et on vérifie que $\Gamma_\alpha u^\alpha = 0$.

Ainsi, dans l'espace-temps, le vecteur $\vec{J}$ se décompose en une composante collinéaire à $\vec{u}$ et une composante orthogonale à $\vec{u}$. Nous écrivons plus généralement l'hypothèse

$$(6.5) \quad J_\alpha = \delta u_\alpha + \Gamma_\alpha$$

où nous avons les définitions suivantes:

$$(6.6) \quad \delta = J_\alpha u^\alpha$$

$$(6.7) \quad \Gamma_\alpha = J_\rho (g_\alpha^\rho - u^\rho u_\alpha).$$

δ sera appelée la *densité propre de charge électrique*. La composante de temps $\delta \vec{u}$ tangente aux lignes de courant, interprète le *courant de convection*. La composante d'espace $\vec{\Gamma}$, orthogonale aux lignes de courant, rend compte du *courant de conduction*. Elle doit vérifier la relation

$$(6.8) \quad \Gamma_\alpha = \sigma E_\alpha = \sigma u^\rho H_{\rho\alpha}$$

qui traduit la loi d'OHM généralisée. Le scalaire σ désigne la conductivité électrique du milieu.

On vérifie sur (6.7) et (6.8) que

$$\Gamma_\alpha u^\alpha = 0.$$

L'hypothèse (6.5) exprime finalement que le courant électrique $\vec{J}$ se compose du courant de convection $\delta \vec{u}$ et du courant de conduction $\vec{\Gamma}$. La loi de conservation de l'électricité (6.4) peut être explicitée comme

$$(6.9) \quad \nabla_\alpha (\delta u^\alpha) + \nabla_\alpha \Gamma^\alpha = 0.$$

On l'interprète immédiatement.

7. Les équations relativistes du champ électromagnétique.

Nous verrons au §17 du chapitre suivant que la détermination des champs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ est possible localement avec le système des équations

$$(7.1) \quad \mathfrak{D}_\beta \equiv \nabla_\alpha G^\alpha_\beta = J_\beta$$

$$(7.2) \quad \mathcal{E}^\beta \equiv \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta\alpha\beta} \nabla_\gamma H_{\delta\alpha} = 0$$

$$(7.3) \quad G_{\alpha\beta} u^\alpha = \lambda H_{\alpha\beta} u^\alpha$$

$$(7.4) \quad \mu G_{\alpha\beta}^* u^\alpha = H_{\alpha\beta}^* u^\alpha$$

$$(7.5) \quad J_\beta = \delta u_\beta + \Gamma_\beta$$

$$(7.6) \quad \Gamma_\beta = \sigma u^\rho H_{\rho\beta}.$$

Ce système constitue donc les équations rigoureuses du champ électromagnétique dans la matière. Il convient de leur adjoindre les conditions de conservation relatives aux équations de MAXWELL:

$$(7.7) \quad \nabla_\alpha \mathfrak{D}^\alpha = 0$$

$$(7.8) \quad \nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0$$

Il nous faut encore exprimer l'interaction possible de ce champ électromagnétique avec la matière et le champ de gravitation.

II—LE TENSEUR ELECTRODYNAMIQUE ET LES EQUATIONS RELATIVISTES DE L'ELECTRODYNAMIQUE

8. Forme globale des équations de Maxwell.

Les équations de MAXWELL peuvent se mettre sous une autre forme simple, si nous introduisons les trois formes différentielles:

$$H = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$G = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$J = J_\alpha dx^\alpha$$

Nous noterons leurs formes adjointes par $*H$, $*G$, $*J$ respectivement et nous désignerons par d le symbole de différentiation extérieure. Avec ces notations, les équations de MAXWELL sous leur forme locale (7.1), (7.2) peuvent être condensées comme

$$(8.1) \quad d(*G) = *J$$

$$(8.2) \quad dH = 0.$$

Ce sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Elles font intervenir les valeurs numériques des champs en un point de l'espace-temps et en un point infiniment voisin.

En réalité, les équations de MAXWELL sont le résumé d'un grand nombre de faits d'expérience conduisant aux lois relatives aux flux d'inductions et aux circulations des champs électriques et magnétiques. La formulation directe des lois de l'électromagnétisme est donc globale et non locale.

Considérons des champs d'intégration à trois dimensions quelconques C^3 de V_4 . Soient ∂C^3 leurs frontières. Les équations de MAXWELL peuvent être énoncées sous la forme globale:

$$(8.3) \quad \iint_{\partial C^3} *G = \iiint_{C^3} *J$$

$$(8.4) \quad \iint_{\partial C^3} H = 0$$

De ce point de vue, elles deviennent même indépendantes de toute hypothèse sur la connexion affine de l'univers.

Supposons maintenant que les formes G et H sont deux fois continûment différentiables et que la forme J est continûment différentiable. Les relations (8.3) et (8.4) peuvent être transformées comme

$$\iiint_{C^3} d(*G) = \iiint_{C^3} *J \quad \iiint_{C^3} dH = 0.$$

Ces égalités sont vraies quel que soit le champ d'intégration à trois dimensions C^3 , nous en déduisons les équations locales (8.1) et (8.2). En outre, si C^3 est la frontière d'un domaine à quatre dimensions B^4 , la première égalité conduit en vertu de la propriété $d(d *G) = 0$, à

$$(8.5) \quad \iiint_{\partial B^4} *J = \iiint_{B^4} d(*J) = \iiint_{B^4} (\nabla_\alpha J^\alpha) d\tau = 0.$$

C'est la loi de la conservation de l'électricité.

9. Le tenseur électrodynamique $\tau_{\alpha\beta}$ et la généralisation relativiste des équations de l'électrodynamique.

Les équations de MAXWELL ne fournissent pas toutes les lois de l'électromagnétisme. En électrodynamique, il existe une "quantité de mouvement-énergie électromagnétique" dont la dérivée donne l'hyperforce élémentaire qui s'exerce de la part du champ électromagnétique sur l'électricité.

Nous nous proposons d'établir cette quantité.

Nous écrivons les équations de MAXWELL sous la forme

$$(9.1) \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\lambda} = J^\lambda$$

$$(9.2) \quad \nabla_\alpha H_{\lambda\beta} + \nabla_\lambda H_{\beta\alpha} + \nabla_\beta H_{\alpha\lambda} = 0.$$

Multiplions les deux membres de (9.1) par $H_{\lambda\beta}$:

$$(9.3) \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\lambda} H_{\lambda\beta} = J^\lambda H_{\lambda\beta}.$$

Soit K_β le vecteur figurant au premier membre de (9.3). On ne change pas sa valeur en lui ajoutant la quantité

$$\frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} (\nabla_\alpha H_{\lambda\beta} + \nabla_\lambda H_{\beta\alpha} + \nabla_\beta H_{\alpha\lambda}) \equiv G^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha H_{\lambda\beta} + \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} \nabla_\beta H_{\alpha\lambda}$$

qui est identiquement nulle d'après (9.2). Il vient

$$K_\beta = \nabla_\alpha G^{\alpha\lambda} H_{\lambda\beta} + G^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha H_{\lambda\beta} + \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} \nabla_\beta H_{\alpha\lambda} = \nabla_\alpha (G^{\alpha\lambda} H_{\lambda\beta}) + \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} \nabla_\beta H_{\alpha\lambda}$$

que nous pouvons encore écrire

$$(9.4) \quad K_\beta = \nabla_\alpha (G^{\alpha\lambda} H_{\lambda\beta}) + \frac{1}{4} \nabla_\beta (G^{\alpha\lambda} H_{\alpha\lambda}) + \frac{1}{4} G^{\alpha\lambda} \nabla_\beta H_{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \nabla_\beta G^{\alpha\lambda} H_{\alpha\lambda}.$$

D'autre part, nous avons l'identité (§5, éq. 5.7):

$$G^{\alpha\lambda} = \frac{1}{\mu} H^{\alpha\lambda} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (H^{\rho\alpha} u_\rho u^\lambda - H^{\rho\lambda} u_\rho u^\alpha)$$

qui permet de calculer la valeur de l'ensemble des deux derniers termes

$$\frac{1}{4} G^{\alpha\lambda} \nabla_\beta H_{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \nabla_\beta G^{\alpha\lambda} H_{\alpha\lambda} = -\frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\rho\alpha} u_\rho H_{\alpha\lambda} \nabla_\beta u^\lambda.$$

En portant cette valeur dans l'expression de K_β , nous avons:

$$K_\beta = \nabla_\alpha (G^{\alpha\lambda} H_{\lambda\beta}) + \frac{1}{4} \nabla_\beta (G^{\alpha\lambda} H_{\alpha\lambda}) - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\rho\alpha} u_\rho H_{\alpha\lambda} \nabla_\beta u^\lambda$$

ou

$$K_\beta = \nabla_\alpha [\frac{1}{4} g^\alpha_\beta (G^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}) - G^{\rho\alpha} H_{\rho\beta}] + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\rho\sigma} H_{\rho\alpha} u_\sigma \nabla_\beta u^\alpha.$$

D'après la construction de la quantité K_β , le second membre de cette relation est égale à $J^\lambda H_{\lambda\beta}$. Nous en déduisons l'égalité

$$(9.5) \quad \nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = J^\lambda H_{\lambda\beta} - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\rho\sigma} H_{\rho\alpha} u_\sigma \nabla_\beta u^\alpha$$

où nous avons posé

$$(9.6) \quad \tau^\alpha_\beta = \frac{1}{4} g^\alpha_\beta (G^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}) - G^{\rho\alpha} H_{\rho\beta}.$$

On peut interpréter les équations (9.5) dans un espace de la Relativité restreinte, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites ($x^0 = ct$, x^i).

En effet, dans le repère propre associé, le tenseur $\tau_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda}\tau^\lambda_\beta$ a pour composantes:

$$(9.7) \quad (\tau_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} \Lambda & D_2B_3 - D_3B_2 & D_3B_1 - D_1B_3 & D_1B_2 - D_2B_1 \\ E_2H_3 - E_3H_2 & \lambda E_1^2 + \mu H_1^2 - \Lambda & E_1D_2 + H_1B_2 & E_1D_3 + H_1B_3 \\ E_3H_1 - E_1H_3 & D_1E_2 + B_1H_2 & \lambda E_2^2 + \mu H_2^2 - \Lambda & E_2D_3 + H_2B_3 \\ E_1H_2 - E_2H_1 & D_1E_3 + B_1H_3 & D_2E_3 + B_2H_3 & \lambda E_3^2 + \mu H_3^2 - \Lambda \end{vmatrix}$$

où Λ représente la quantité $\frac{1}{2}(\lambda E^2 + \mu H^2)$.

On interprète Λ comme la densité d'énergie électromagnétique localisée dans le milieu considéré, les composantes τ_{ij} comme les tensions superficielles d'origine électromagnétique (pressions de MAXWELL), les composantes τ_{0i} comme les composantes du vecteur $\vec{D} \wedge \vec{B}$ et les composantes τ_{i0} comme les composantes du vecteur $\vec{E} \wedge \vec{H}$ (vecteur de POYNTING).

Quand au second membre de (9.5), nous l'interprétons en identifiant le vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur vitesse macroscopique

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

où v^i sont les composantes contravariantes du vecteur vitesse d'espace $\vec{v}$ dans la métrique définie négative $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. v sera supposé petit devant c .

Si nous adoptons ce point de vue, les trois composantes d'espace $J^\lambda H_{\lambda i}$ du vecteur d'univers $K_\beta = J^\lambda H_{\lambda\beta}$ ont pour valeurs

$$(9.8) \quad J^\lambda H_{\lambda i} = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E_i + \left[\left(\frac{\delta \vec{v}}{c\sqrt{1 - \beta^2}} + \vec{\Gamma} \right) \wedge \vec{B} \right]_i.$$

Elles donnent les composantes des forces dues au champ électromagnétique. On trouve l'action du champ électrique $\vec{E}$ sur la charge apparente $\frac{\delta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ et l'action de l'induction $\vec{B}$ sur le courant électrique total

$$(9.9) \quad \vec{I} = \frac{\delta \vec{v}}{c\sqrt{1 - \beta^2}} + \vec{\Gamma}$$

formé du courant de convection $\frac{\delta \vec{v}}{c\sqrt{1 - \beta^2}}$ et du courant de conduction $\vec{\Gamma}$.

La quatrième composante de la force d'univers $K_\beta = J^\lambda H_{\lambda\beta}$ a pour valeur

$$(9.10) \quad J^\lambda H_{\lambda 0} = - \left(\frac{\delta \vec{v}}{c\sqrt{1 - \beta^2}} + \vec{\Gamma} \right) \cdot \vec{E} = - \vec{I} \cdot \vec{E}.$$

C'est l'énergie dégagée sous forme de chaleur de JOULE.

Ces considérations permettent d'attribuer au vecteur d'univers $K_\beta = J^\wedge H_{\lambda\beta}$ la valeur d'une hyperforce élémentaire qui s'exerce de la part du champ électromagnétique sur l'électricité. Nous l'appelons encore la force de LORENTZ. Enfin, le terme $-\frac{1-\lambda\mu}{\mu} H^{\rho\sigma} H_{\rho\alpha} u_\rho \nabla_\beta u^\alpha$ est un terme dû à la variation de vitesse. On n'en connaît pas d'équivalent en théorie classique. Mais, il s'interprète facilement par ses dimensions de force quadridimensionnelle d'après les principes de la Relativité.

Dans le cas où $\vec{v}$ est petit, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, il vaut

$$\frac{1-\lambda\mu}{\mu} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \partial_\beta \frac{\vec{v}}{c}.$$

Il est possible alors de traduire les équations (9.5) sous la forme classique:

$$(9.11) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B})_i - \Sigma_k \partial_k \tau_{ki} = \frac{\delta}{\sqrt{1-\beta^2}} E_i + (\vec{I} \wedge \vec{B})_i + \frac{1}{c} (1-\lambda\mu) (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \partial_i \vec{v}$$

$$(9.12) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\vec{I} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c^2} (1-\lambda\mu) (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

En particulier, si l'on se place dans le groupe galiléen, le terme d'accélération disparaît pour un mouvement de translation uniforme. Les équations précédentes se réduisent à

$$(9.13) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B})_i - \Sigma_k \partial_k \tau_{ki} = \frac{\delta}{\sqrt{1-\beta^2}} E_i + (\vec{I} \wedge \vec{B})_i$$

$$(9.14) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\vec{I} \cdot \vec{E}.$$

Les équations (9.11), (9.12) fournissent ainsi une correction relativiste des équations classiques. On remarque enfin qu'elles peuvent s'interpréter en un certain sens comme les équations d'un milieu continu.

L'étude précédente permet de considérer les équations (9.5) comme la généralisation relativiste des équations de l'électrodynamique classique. Les équations

$$(9.15) \quad \nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = J^\wedge H_{\lambda\beta} - \frac{1-\lambda\mu}{\mu} H^{\rho\sigma} H_{\rho\alpha} u_\sigma \nabla_\beta u^\alpha$$

seront appelées les *équations relativistes de l'électrodynamique*. Le tenseur

$$(9.16) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (G^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha} H^\rho_\beta$$

sera dit le *tenseur électrodynamique*. Il généralise la quantité de mouvement-énergie électromagnétique. En effet, sa divergence donne la densité de force électromagnétique qui doit être équilibrée par des forces d'autre nature.

III—LE SCHEMA FLUIDE-CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

10. Le tenseur d'impulsion-énergie.

Conformément aux axiomes de notre théorie générale des fluides, il nous faut exprimer l'interaction entre le champ de gravitation $g_{\alpha\beta}$, le champ électromagnétique $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ et la matière par les dix équations d'EINSTEIN

$$(10.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + k)g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ doit donner la description des phénomènes thermodynamiques et électrodynamiques qui se passent au sein du milieu fluide considéré. Nous sommes conduits à choisir pour $T_{\alpha\beta}$ un tenseur de la forme

$$(10.2) \quad T_{\alpha\beta} = \overset{(m)}{T}_{\alpha\beta} + \overset{(em)}{T}_{\alpha\beta} + \overset{(i)}{T}_{\alpha\beta}$$

où les trois termes ont la signification suivante:

$\overset{(m)}{T}_{\alpha\beta}$ rend compte de l'évolution thermodynamique du fluide. Nous avons établi son expression dans notre travail antérieur. Il est possible, comme nous l'avons rappelé au §3, de lui donner l'expression

$$(10.3) \quad \overset{(m)}{T}_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha).$$

$\overset{(em)}{T}_{\alpha\beta}$ donne la description électrodynamique du fluide. Les considérations du paragraphe 9 précédent conduisent à prendre

$$(10.4) \quad \overset{(em)}{T}_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^\rho{}_\beta.$$

$\overset{(i)}{T}_{\alpha\beta}$ donne l'interaction directe du champ électromagnétique avec la matière. Or le tenseur électrodynamique $\tau_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique. Nous assignons dans notre étude actuelle que cette interaction doit rendre symétrique le tenseur d'impulsion-énergie total $T_{\alpha\beta}$. D'autre part, elle doit être identiquement nulle dans le vide, c'est-à-dire quand on a $\lambda\mu = 1$, propriété qui caractérise le vide. Il faut alors que, pour un repère galiléen ($\vec{V}^{(0)}$, $\vec{V}^{(i)}$), l'invariant

$$(\overset{(em)}{T}_{\alpha\beta} + \overset{(i)}{T}_{\alpha\beta}) V^{(0)\alpha} V^{(0)\beta}$$

se réduise à $\tau_{\alpha\beta} V^{(0)\alpha} V^{(0)\beta}$ à la limite, lorsque la matière se raréfie indéfiniment ($\rho \rightarrow 0$). On en déduit qu'il est suffisant de prendre

$$(10.5) \quad \overset{(i)}{T}_{\alpha\beta} = -(1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta.$$

Nous allons vérifier que $T_{\alpha\beta}$ est symétrique avec les valeurs (10.3), (10.4), (10.5) de ses trois composantes. Il suffit de vérifier que

$$T_{\alpha\beta}^{(\text{em})} + T_{\alpha\beta}^{(\text{i})} = \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}\mu^\rho\mu_\beta$$

est symétrique. Pour cela, explicitons $\tau_{\alpha\beta}$ en fonction des quantités $H_{\lambda\mu}$ et $E_\mu = u^\lambda H_{\lambda\mu}$.

$$(10.6) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\mu}H^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} - 2\frac{1-\lambda\mu}{\mu}E_\rho E^\rho\right) - \frac{1}{\mu}H_{\rho\alpha}H^\rho_\beta - \frac{1-\lambda\mu}{\mu}(u_\alpha E^\rho H_{\rho\beta} - E_\alpha E_\beta).$$

Nous en déduisons par multiplication contractée avec u^β :

$$\tau_{\alpha\rho}u^\rho = \frac{1}{4}u_\alpha\left(\frac{1}{\mu}H^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} - 2\frac{1-\lambda\mu}{\mu}E_\rho E^\rho\right) + \frac{1}{\mu}E^\rho H_{\rho\alpha} + \frac{1-\lambda\mu}{\mu}E_\rho E^\rho u_\alpha.$$

$T_{\alpha\beta}^{(\text{em})} + T_{\alpha\beta}^{(\text{i})}$ prend alors la valeur

$$(10.7) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\mu}H_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma} - 2\frac{1-\lambda\mu}{\mu}E_\rho E^\rho\right) \\ & - \frac{1}{4}(1-\lambda\mu)\left(\frac{1}{\mu}H_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma} + 2\frac{1-\lambda\mu}{\mu}E_\rho E^\rho\right)u_\alpha u_\beta \\ & - \frac{1}{\mu}H_{\rho\alpha}H^\rho_\beta - \frac{1-\lambda\mu}{\mu}(H_{\rho\alpha}E^\rho u_\beta + u_\alpha H_{\rho\beta}E^\rho) + \frac{1-\lambda\mu}{\mu}E_\alpha E_\beta. \end{aligned}$$

On voit que cette expression est symétrique en α et β .

Le choix précédent apparaît comme le plus simple. Il se justifiera par ses conséquences. Nous avons été amenés finalement à prendre pour tenseur d'impulsion-énergie relatif à un schéma fluide-champ électromagnétique, le tenseur

$$(10.8) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta.$$

On voit qu'à la limite, quand $\rho \rightarrow 0$ et $\lambda\mu \rightarrow 1$, $T_{\alpha\beta}$ prend la valeur

$$(10.9) \quad T_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^\rho_\beta$$

où $G_{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu}H_{\rho\sigma}$. Cette expression devient symétrique en α et β . Elle concorde avec les résultats obtenus dans la théorie de l'électromagnétisme dans le vide de LORENTZ. Lorsque $\lambda = \mu = 1$, on a exactement les équations de cette théorie.

Nous prendrons donc (10.9) pour tenseur d'énergie relatif au vide traversé par un champ électromagnétique.

Dans le schéma fluide-champ électromagnétique (10.8), nous trouvons dans l'expression de $T_{\alpha\beta}$, la présence de divers phénomènes et leur interaction réciproque ainsi que leur séparation simple et logique telle qu'exige une première étude en Relativité générale.

11. Les équations de mouvement.

Considérons un schéma fluide-champ électromagnétique où la distribution énergétique dans le domaine d'espace-temps associé, peut être représentée par le tenseur d'impulsion-énergie

$$(11.1) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta$$

où

$$\pi_{\alpha\beta}u^\alpha = 0$$

$$q_\alpha u^\alpha = 0$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^\rho{}_\beta.$$

Le vecteur q_α y représente le vecteur courant de chaleur. Les tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ décrivent l'évolution du champ électromagnétique dans le schéma. Ils vérifient les équations de MAXWELL.

Les équations de mouvement du milieu considéré sont fournies par les conditions de conservation

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

appliquées à la forme (11.1) du tenseur d'impulsion-énergie.

Prenons la dérivée covariante contractée en α de $T^{\alpha\beta}$:

$$(11.2) \quad \begin{aligned} & \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + u^\beta \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) \\ & + \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)[\nabla_\alpha \tau^{\alpha\rho} u_\rho u^\beta + \tau^{\alpha\rho} \nabla_\alpha (u_\rho u^\beta)] = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur u^β est unitaire et orienté dans le temps, on a

$$u^\beta u_\beta = +1$$

$$u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = 0.$$

Par multiplication contractée de (11.2) avec u_β , il vient

$$(11.3) \quad \begin{aligned} & \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) - u_\beta \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha q^\alpha + q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho \\ & + \lambda\mu u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau^{\alpha\rho} \nabla_\alpha u_\rho = 0. \end{aligned}$$

Portons ensuite la valeur de $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha)$ tirée de cette relation dans (11.2). Nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}
 (11.4) \quad & \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} (g_\rho^\beta - u_\rho u^\beta) \\
 & - \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) + u^\beta (\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho) \\
 & + \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - u^\beta (u_\rho \nabla_\alpha \tau^{\alpha\rho}) - (1 - \lambda\mu) \tau^{\alpha\rho} u_\rho \nabla_\alpha u^\beta = 0.
 \end{aligned}$$

Nous mettrons les équations (11.3) et (11.4) sous la forme

$$\begin{aligned}
 (11.5) \quad & \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) - u_\beta \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha q^\alpha + q_\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta \\
 & = -\lambda\mu u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} + (1 - \lambda\mu) \tau^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta \\
 (11.6) \quad & \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} (g_\rho^\beta - u_\rho u^\beta) - \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) \\
 & + u^\beta (\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho) \\
 & = -\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} + u^\beta (u_\rho \nabla_\alpha \tau^{\alpha\rho}) + (1 - \lambda\mu) \tau^{\alpha\rho} u_\rho \nabla_\alpha u^\beta
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} &= J_\lambda H^{\lambda\beta} - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\lambda\alpha} H_{\lambda\rho} u_\alpha g^{\rho\beta} \nabla_\alpha u^\rho \\
 u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} &= -\Gamma_\lambda E^\lambda - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\lambda\alpha} H_{\lambda\rho} u_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\rho.
 \end{aligned}$$

L'équation (11.5) joue le rôle d'une équation de continuité pour le milieu. L'énergie d'origine calorifique et électrodynamique y figure effectivement.

Les équations (11.6) où l'on pose

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

constituent un système différentiel qui détermine les lignes de courant du schéma. Il convient de leur adjoindre les équations (7.1), (7.2), (7.3), (7.4), (7.5) et (7.6) du champ électromagnétique (§7) et les équations qui définissent le champ de vecteur courant de chaleur $\vec{q}$. On sait qu'il est possible d'interpréter q^α à partir d'un champ scalaire θ et qu'alors:

$$\begin{aligned}
 q^\alpha &= -\kappa \partial_\rho \theta (g^{\rho\alpha} - u^\rho u^\alpha) \\
 \nabla_\alpha q^\alpha &= c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_{\alpha\rho}
 \end{aligned}$$

(cf. §3).

12. Cas d'un fluide parfait.

Dans le cas d'un fluide parfait, nous pouvons donner à son tenseur d'impulsion-énergie la forme

$$(12.1) \quad T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta.$$

Les équations de mouvement s'écrivent alors:

$$(12.2) \quad \begin{aligned} \nabla_\alpha[(\rho + p)u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p - \nabla_\alpha q^\alpha + q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho \\ = -\lambda\mu u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} + (1 - \lambda\mu)\tau^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta \end{aligned}$$

$$(12.3) \quad \begin{aligned} (\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \partial_\alpha p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) - \nabla_\alpha(u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) \\ + u^\beta(\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho) \\ = -\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} + u^\beta(u_\rho \nabla_\alpha \tau^{\alpha\rho}) + (1 - \lambda\mu)\tau^{\alpha\rho}u_\rho \nabla_\alpha u^\beta \end{aligned}$$

où les trois quantités ρ , p , θ satisfont à l'équation d'état du fluide, soit

$$\rho = \varphi(p, \theta).$$

Nous étudierons au chapitre suivant, comment avec ces équations se pose le problème de Cauchy pour un schéma fluide-champ électromagnétique.

Chapitre III—LA STRUCTURE DES EQUATIONS DU CHAMP
RELATIF A UN SCHEMA FLUIDE PARFAIT-CHAMP
ELECTROMAGNETIQUE

I—LE PROBLEME DE CAUCHY

13. Les équations fondamentales du champ.

Soit un domaine D de l'espace-temps V_4 , occupé par un milieu fluide parfait-champ électromagnétique. La description de ce milieu, tant du point de vue gravitationnel que du point de vue thermo-électro-dynamique, peut être faite grâce au système des équations d'EINSTEIN

$$(13.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + k)g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} .$$

$T_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion-énergie relatif au schéma considéré

$$(13.2) \quad T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta$$

où

$$(13.3) \quad g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = +1$$

$$(13.4) \quad \rho = \varphi(p, \theta)$$

$$(13.5) \quad q_\alpha = -\kappa \partial_\rho \theta (g_\alpha^\rho - u^\rho u_\alpha)$$

$$(13.6) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho$$

et où le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ dit tenseur électrodynamique est défini à partir des tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique:

$$(13.7) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^\rho_\beta ,$$

les $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ satisfaisant au système

$$(13.8) \quad G_{\alpha\beta}u^\alpha = \lambda H_{\alpha\beta}u^\alpha$$

$$(13.9) \quad \mu G_{\alpha\beta}u^\alpha = {}^*H_{\alpha\beta}u^\alpha$$

$$(13.10) \quad \mathfrak{D}_\beta \equiv g^{\alpha\rho}\nabla_\alpha G_{\rho\beta} = J_\beta$$

$$(13.11) \quad \mathcal{E}^\delta \equiv \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0$$

$$(13.12) \quad J_\beta = \delta u_\beta + \Gamma_\beta$$

$$(13.13) \quad \Gamma_\beta = \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta}$$

auquel s'ajoutent les conditions de conservation relatives aux équations de MAXWELL

$$(13.14) \quad \nabla_\alpha \mathfrak{D}^\alpha = 0$$

$$(13.15) \quad \nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0.$$

D'autre part, le tenseur d'EINSTEIN $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, il en est de même du tenseur $T_{\alpha\beta}$. Cette condition jointe au caractère unitaire du vecteur u^α , fournit l'équation de continuité et les équations de mouvement pour le milieu fluide:

$$(13.16) \quad \begin{aligned} \nabla_\alpha[(\rho + p)u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p - \nabla_\alpha q^\alpha + q_\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta \\ + \lambda\mu u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta = 0 \end{aligned}$$

$$(13.17) \quad \begin{aligned} (\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \partial_\alpha p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \\ - \nabla_\alpha(u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) + u^\beta(\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho) \\ + \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - u^\beta(u_\rho \nabla_\alpha \tau^{\alpha\rho}) - (1 - \lambda\mu)\tau^{\alpha\rho} u_\rho \nabla_\alpha u^\beta = 0 \end{aligned}$$

où $\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta}$ s'exprime exclusivement en fonction des $H_{\alpha\beta}$ et u^α

$$(13.18) \quad \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = J_\rho H^{\rho\beta} - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} H^{\rho\sigma} H_{\rho\gamma} u_\sigma g^{\gamma\beta} \nabla_\nu u^\nu$$

comme le montre un calcul direct en tenant compte des équations (13.8), (13.9), (13.10), (13.11).

En substituant cette valeur de $\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta}$ dans les équations (13.16) et (13.17), on voit que celles-ci ne dépendent pas des dérivées de $H_{\alpha\beta}$. Mais l'hypothèse (13.12) montre que la densité de charge électrique δ figure dans ces équations. Il nous faudra en tenir compte dans le problème.

L'étude poursuivie dans ce chapitre est purement locale, et nous nous bornons au cas où la constante cosmologique k dans les équations d'EINSTEIN est nulle. Nous utiliserons un certain nombre de résultats connus pour lesquels nous prions le lecteur de se reporter utilement aux références indiquées.

Nous poserons dans la suite:

$$Z = u^\rho \partial_\rho \theta$$

$$E_\alpha = u^\rho H_{\rho\alpha}$$

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \rho - 3p - (1 - \lambda\mu)\Lambda$$

où $\Lambda = \tau_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$ représente la densité d'énergie électromagnétique $\frac{1}{2}(\lambda E^2 + \mu H^2)$.

14. Le problème intérieur.

A l'intérieur du domaine D de l'espace-temps occupé par le milieu fluide considéré, la métrique de l'espace-temps

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

satisfait aux dix équations d'EINSTEIN

$$(14.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

A partir de ces équations et des équations de MAXWELL, nous nous proposons d'étudier la structure géométrique de l'espace-temps, l'évolution thermo-électro-dynamique du fluide et l'évolution du champ électromagnétique.

Du point de vue physique, le problème proposé est celui du déterminisme relativiste. Du point de vue mathématique, il comporte l'étude de la structure des équations fondamentales du champ. Nous pouvons le résoudre au moyen d'une analyse du problème de Cauchy relatif à ces équations.

Le problème intérieur consiste donc en celui-ci:

LE PROBLEME INTERIEUR.—*Etant donnés sur une hypersurface S*

- a) *le champ de gravitation par les $(g_{\alpha\beta}, \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$,*
- b) *le champ électromagnétique par les $(H_{\alpha\beta})$,*
- c) *et le champ de température par les $(\theta, \partial_\lambda \theta)$,*

déterminer les trois champs $(g_{\alpha\beta}, \theta, H_{\alpha\beta})$ au voisinage de l'hypersurface S .

Il nous suffira d'étudier la possibilité de calculer sur S les valeurs des différentes quantités introduites et de leurs dérivées successives. Nous supposons, selon l'axiomatique générale de notre théorie des fluides, les hypothèses de différentiabilité suivantes:

$g_{\alpha\beta}$ de classe $(c^1, c^3$ par morceaux)

$H_{\alpha\beta}$ de classe $(c^0, c^2$ par morceaux)

θ de classe $(c^2, c^4$ par morceaux)

L'hypersurface S étant définie localement par l'équation

$$x^0 = 0$$

les données de Cauchy seront ici les valeurs sur S de $(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; \theta, \partial_0 \theta; H_{\alpha\beta})$. Pour $g^{00} \neq 0$, les équations d'EINSTEIN (14.1) sont équivalentes à l'ensemble des deux systèmes

$$(14.2) \quad R_{ij} = \chi \{ (\rho + p) u_i u_j - \frac{1}{2} [\rho - p - (1 - \lambda\mu)\Delta] g_{ij} - (u_i q_j + u_j q_i) + \tau_{ij} - (1 - \lambda\mu) \tau_{i\rho} u^\rho u_j \}$$

$$(14.3) \quad S_\lambda^0 = \chi [(\rho + p) u^0 u_\lambda - p g_\lambda^0 - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0) + \tau_\lambda^0 - (1 - \lambda\mu) \tau^{0\rho} u_\rho u_\lambda]$$

où les S^α_λ [4] ont des valeurs connues sur S et nous avons:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta &= \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\mu}H^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} - 2\frac{1 - \lambda\mu}{\mu}E^\rho E_\rho\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}(1 - \lambda\mu)\left(\frac{1}{\mu}H^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} + 2\frac{1 - \lambda\mu}{\mu}E^\rho E_\rho\right)u_\alpha u_\beta \\ &\quad - \frac{1}{\mu}H_{\rho\alpha}H^\rho_\beta - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu}(E^\rho H_{\rho\alpha}u_\beta + u_\alpha E^\rho H_{\rho\beta}) + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu}E_\alpha E_\beta \end{aligned}$$

où l'on a posé $E_\alpha = u^\rho H_{\rho\alpha}$.

Les quatre équations (14.3) renferment ρ , p , u^α . On obtient une cinquième équation en exprimant à partir d'elles le caractère unitaire de u^α . Tenant compte ensuite de l'équation d'état $\rho = \varphi(p, \theta)$, on pourra calculer p , u^α .

Le calcul effectif de p , u^α est possible mais pénible, et ne conduit pas à des résultats immédiatement intéressants pour la Physique. Il est inutile de faire ce calcul. Dans la suite, nous supposerons p et u^α connues.

On en déduit la valeur des seconds membres des équations (14.2). Comme⁽¹⁾

$$R_{ij} \equiv -\frac{1}{2}g^{00}\partial_{00}g_{ij} + F_{ij}(dc),$$

$F_{ij}(dc)$ désignant des quantités calculables sur S par opérations algébriques ou dérivation sur S , à partir des données de Cauchy, on en tire les valeurs des dérivées $\partial_{00}g_{ij}$, si

$$(14.4) \quad g^{00} \neq 0.$$

Les équations du schéma matériel ne renfermant pas les dérivées des $H_{\alpha\beta}$, elles déterminent les valeurs des quantités $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_{00}\theta$, si l'on connaît δ . Les équations de MAXWELL permettent alors de calculer les dérivées $\partial_0 H_{\alpha\beta}$.

Nous allons montrer qu'on peut avoir la valeur de δ sans faire intervenir les dérivées obliques $\partial_0 u^\alpha$ et $\partial_0 H_{\alpha\beta}$.

15. Détermination de δ .

Dans les équations de MAXWELL du premier groupe (13.10) qui s'écrivent

$$(15.1) \quad \mathfrak{D}_\beta \equiv g^{\alpha\rho}\nabla_\alpha H_{\rho\beta} = \delta u_\beta + \sigma u^\rho H_{\rho\beta}$$

remplaçons $G_{\rho\beta}$ par sa valeur en fonction de $H_{\alpha\beta}$, u^α , calculée à partir des équations de liaison (13.8) et (13.9).

$$G_{\rho\beta} = \frac{1}{\mu}H_{\rho\beta} - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu}(H_{\sigma\rho}u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta}u^\sigma u_\rho).$$

⁽¹⁾A. LICHTNEROWICZ [7].

Le premier membre de (15.1) devient:

$$(15.2) \quad \mathfrak{D}_\beta \equiv \frac{1}{\mu} [g^{\alpha\rho} - (1 - \lambda\mu)u^\alpha u^\rho] \nabla_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (g^{\alpha\rho} u^\sigma \nabla_\alpha H_{\sigma\rho}) u_\beta \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [H_{\sigma\rho} g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha (u^\sigma u_\beta) - H_{\sigma\beta} \nabla_\alpha (u^\sigma u^\alpha)].$$

Cherchons à former la quantité $\mathfrak{D}^0 = g^{0\beta} \mathfrak{D}_\beta$. Nous avons

$$\mathfrak{D}^0 = \frac{1}{\mu} [g^{\alpha\rho} - (1 - \lambda\mu)u^\alpha u^\rho] g^{0\beta} \nabla_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (g^{\alpha\rho} u^\sigma \nabla_\alpha H_{\sigma\rho}) u^0 \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [H_{\sigma\rho} g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha (u^\sigma u^0) - H_{\sigma\beta} g^{0\beta} \nabla_\alpha (u^\sigma u^\alpha)].$$

En décomposant la sommation en indice α suivant les indices 0 et i , on voit que les termes en ∇_0 disparaissent. Il reste:

$$(15.3) \quad \mathfrak{D}^0 = \frac{1}{\mu} [g^{i\rho} - (1 - \lambda\mu)u^i u^\rho] g^{0\beta} \nabla_i H_{\rho\beta} \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [H_{\sigma\rho} g^{i\rho} \nabla_i (u^\sigma u^0) - H_{\sigma\beta} g^{0\beta} \nabla_i (u^i u^\sigma)]$$

La dérivation covariante ∇_i ne fait intervenir que les dérivées tangentielles ∂_i . $\mathfrak{D}^0$ ne dépend pas de $\partial_0 u^\alpha$ et $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. Il est directement calculable sur S .

Nous avons alors l'équation

$$(15.4) \quad \mathfrak{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u^\rho g^{0\beta} H_{\rho\beta}$$

qui détermine δ si

$$u^0 \neq 0.$$

16. Détermination des $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 \theta$.

Nous poserons dans ce qui suit

$$U^0 \equiv (\rho + p - \kappa Z) u^0 - q^0 - (1 - \lambda\mu) \tau^{0\rho} u_\rho$$

et nous introduisons les inconnues auxiliaires:

$$Z = u^\rho \partial_\rho \theta$$

$$X_1 = H^{\lambda\mu} H_{\lambda\rho} u_\mu \partial_0 u^\rho$$

$$X_2 = u^\lambda H_{\lambda\rho} \partial_0 u^\rho$$

$$X_3 = H^{\lambda 0} H_{\lambda\rho} \partial_0 u^\rho.$$

Les conditions de conservation (13.16), (13.17) peuvent alors être explicitées comme

$$(16.2) \quad u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \partial_0 p + \left[\rho + p - \kappa Z - \frac{1 - \lambda \mu}{4} G^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \right] \partial_0 u^0 + \kappa [g^{00} + (u^0)^2] \partial_{00} \theta \\ - 2\kappa u^0 \partial_0 Z - \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} u^0 X_1 + \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} X_2 - \frac{(1 - \lambda \mu)^2}{\mu} E^0 X_3 \cong 0$$

pour l'équation de continuité, et

$$(16.3) \quad (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) \partial_0 p + q^\beta \partial_0 u^0 - U^0 \partial_0 u^\beta - \kappa (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) u^0 \partial_{00} \theta \\ - \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) X_1 \cong 0$$

pour les équations de mouvement.

L'équation de conduction thermique (13.6) donne

$$(16.4) \quad \frac{l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0 \partial_0 p + \kappa Z \partial_0 u^0 - \kappa g^{00} \partial_{00} \theta + \kappa u^0 \partial_0 Z \cong 0.$$

Dans ces équations et dans la suite, on introduit la congruence $\cong 0$, modulo une fonction additive près des données de Cauchy et de leurs dérivées tangentielles sur S .

Puisque l'on a introduit les inconnues auxiliaires Z , X_1 , X_2 , X_3 , il faut former quatre équations supplémentaires en multipliant (16.3) respectivement par $-\kappa \partial_\beta \theta$, $H^{\rho\sigma} H_{\rho\beta} u_\sigma$, $u^\sigma H_{\sigma\beta}$ et $H^{\sigma\sigma} H_{\sigma\beta}$. Il vient ainsi:

$$(16.5) \quad q^0 \partial_0 p + q_\beta q^\beta \partial_0 u^0 - \kappa (U^0 + q^0) u^0 \partial_{00} \theta + \kappa u^0 \partial_0 Z - \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} q^0 X_1 \cong 0$$

$$(16.6) \quad (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) E^\lambda H_{\lambda\beta} \partial_0 p + E^\lambda H_{\lambda\beta} q^\beta \partial_0 u^0 - \kappa (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) E^\sigma H_{\sigma\beta} u^0 \partial_{00} \theta \\ - \left[U^0 + \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) E^\sigma H_{\sigma\beta} \right] X_1 \cong 0$$

$$(16.7) \quad (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) H^{\sigma\sigma} H_{\sigma\beta} \partial_0 p + H^{\sigma\sigma} H_{\sigma\beta} q^\beta \partial_0 u^0 - \kappa (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) H^{\sigma\sigma} H_{\sigma\beta} u^0 \partial_{00} \theta \\ - \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) H^{\sigma\sigma} H_{\sigma\beta} X_1 - U^0 X_2 \cong 0$$

$$(16.8) \quad E^0 \partial_0 p + E_\beta q^\beta \partial_0 u^0 - \kappa E^0 u^0 \partial_{00} \theta - \frac{1 - \lambda \mu}{\mu} E^0 X_1 - U^0 X_3 \cong 0$$

Sur l'ensemble de ces équations, on voit que les $\partial_o u^i$ sont immédiatement connues lorsque les $\partial_o p, \partial_o u^0, \partial_{oo}\theta, Z, X_1, X_2, X_3$ ont été calculées. Nous pouvons décomposer nos équations en l'ensemble des trois équations

$$(16.9) \quad \begin{aligned} (g^{0i} - u^0 u^i) \partial_o p + q^i \partial_o u^0 - U^0 \partial_o u^i - \kappa(g^{0i} - u^0 u^i) u^0 \partial_{oo}\theta \\ - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (g^{0i} - u^0 u^i) X_1 = K^i(dc) \end{aligned}$$

et du système suivant

$$\begin{aligned} \frac{l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0 \partial_o p + \kappa Z \partial_o u^0 - \kappa g^{00} \partial_{oo}\theta + \kappa u^0 \partial_o Z &= H_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0 \partial_o p + \left[\rho + p - \kappa Z - \frac{1 - \lambda\mu}{4} G^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \right] \partial_o u^0 + \kappa [g^{00} + (u^0)^2] \partial_{oo}\theta \\ - 2\kappa u^0 \partial_o Z - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} u^0 X_1 + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} X_2 - \frac{(1 - \lambda\mu)^2}{\mu} E^0 X_3 &= H_2 \\ [g^{00} - (u^0)^2] \partial_o p - (U^0 - q^0) \partial_o u^0 - \kappa [g^{00} - (u^0)^2] u^0 \partial_{oo}\theta \\ - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [g^{00} - (u^0)^2] X_1 &= H_3 \\ q^0 \partial_o p + q_\beta q^\beta \partial_o u^0 - \kappa (U^0 + q^0) u^0 \partial_{oo}\theta - U^0 \partial_o Z - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} q^0 X_1 &= H_4 \\ (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) E^\alpha H_{\alpha\beta} \partial_o p + E^\alpha H_{\alpha\beta} q^\beta \partial_o u^0 - \kappa (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) E^\alpha H_{\alpha\beta} u^0 \partial_{oo}\theta \\ - \left[U^0 + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) E^\alpha H_{\alpha\beta} \right] X_1 &= H_5 \\ (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta} \partial_o p + H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta} q^\beta \partial_o u^0 - \kappa (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta} u^0 \partial_{oo}\theta \\ - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (g^{0\beta} - u^0 u^\beta) H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta} X_1 - U^0 X_2 &= H_6 \\ E^0 \partial_o p + E_\beta q^\beta \partial_o u^0 - \kappa E^0 u^0 \partial_{oo}\theta - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} E^0 X_1 - U^0 X_3 &= H_7 \end{aligned}$$

où les seconds membres ont des valeurs connues sur S .

Ce système sera dit système H. Il donne les valeurs des inconnues $\partial_o p, \partial_o u^0, \partial_{oo}\theta, \partial_o Z, X_1, X_2, X_3$ si son déterminant H n'est pas nul:

$$H \neq 0.$$

Les $\partial_0 u^i$ sont alors déterminées par les trois équations (16.9) si

$$U^0 \neq 0.$$

17. Détermination des $\partial_0 H_{\alpha\beta}$.

Les $H_{\alpha\beta}$ étant donnés, une simple dérivation sur S fournit les dérivées tangentielles $\partial_i H_{\alpha\beta}$ sur S . Les seules dérivées qui puissent être discontinues à la traversée de S , sont les $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. Il nous faut donc les mettre en évidence dans le système des équations de MAXWELL

$$(17.1) \quad \mathfrak{D}_\beta \equiv g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha G_{\rho\beta} = \delta u_\beta + \sigma u^\rho H_{\rho\beta}$$

$$(17.2) \quad \mathcal{E}^\beta \equiv \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta\alpha\beta} \nabla_\gamma H_{\delta\alpha} = 0.$$

En exprimant les $G_{\rho\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$, on a comme on l'a montré dans le calcul de δ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\beta \equiv \frac{1}{\mu} [g^{\alpha\rho} - (1 - \lambda\mu)u^\alpha u^\rho] \nabla_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (g^{\alpha\rho} u^\sigma \nabla_\alpha H_{\sigma\rho}) u_\beta \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [H_{\sigma\rho} g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha (u^\sigma u_\beta) - H_{\sigma\beta} \nabla_\alpha (u^\sigma u^\alpha)]. \end{aligned}$$

Par multiplication contractée de l'équation (17.1) avec u^β , on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} g^{\alpha\rho} u^\beta \nabla_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} g^{\alpha\rho} u^\sigma \nabla_\alpha H_{\sigma\rho} \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (H_{\sigma\rho} g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha u^\sigma - H_{\sigma\beta} u^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\sigma) = \delta. \end{aligned}$$

On en tire la valeur de $g^{\alpha\rho} u^\sigma \nabla_\alpha H_{\sigma\rho}$:

$$g^{\alpha\rho} u^\sigma \nabla_\alpha H_{\sigma\rho} = -\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda\mu} (H_{\sigma\rho} g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha u^\sigma - H_{\sigma\beta} u^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\sigma).$$

Tenant compte de cette égalité et des valeurs de δ et de $\partial_0 u^\alpha$ calculées dans les paragraphes précédents, on peut mettre les équations (17.1) sous la forme

$$(17.1') \quad \mathfrak{D}_\beta \equiv \frac{1}{\mu} [g^{0\rho} - (1 - \lambda\mu)u^0 u^\rho] \partial_0 H_{\rho\beta} + \Phi_\beta = \delta u_\beta + \sigma u^\rho H_{\rho\beta}$$

où $\Phi_\beta = \Phi_\beta(g_{\rho\sigma}, \partial_\alpha g_{\rho\sigma}; H_{\rho\sigma}, \partial_i H_{\rho\sigma}; \delta; u_\rho, \partial_\alpha u^\rho)$ ne contient pas les $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. D'autre part, on a vu que la quantité

$$\begin{aligned} (17.3) \quad \mathfrak{D}^0 \equiv g^{0\beta} \mathfrak{D}_\beta = \frac{1}{\mu} [g^{i\rho} - (1 - \lambda\mu)u^i u^\rho] g^{0\beta} \nabla_i H_{\rho\beta} \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [H_{\sigma\rho} g^{i\rho} \nabla_i (u^0 u^\sigma) - H_{\sigma\rho} g^{0\rho} \nabla_i (u^i u^\sigma)] \end{aligned}$$

ne dépend pas non plus des $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. Le premier système des équations de MAXWELL est alors équivalent à l'ensemble du système

$$\mathfrak{D}_i \equiv \frac{1}{\mu} [g^{0\rho} - (1 - \lambda\mu)u^0 u^\rho] \partial_0 H_{\rho i} + \phi_i = \delta u_i + \sigma u^\rho H_{\rho i}$$

et à l'équation

$$\mathfrak{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\rho H^{\rho 0}$$

Quant aux équations de MAXWELL du second groupe, elles peuvent s'écrire

$$(17.2') \quad \mathcal{E}^\beta \equiv \frac{1}{2} \eta^{0\delta\alpha\beta} \partial_0 H_{\delta\alpha} + \frac{1}{2} \eta^{i\delta\alpha\beta} \partial_i H_{\delta\alpha} = 0$$

et on voit qu'elles se partagent en le système

$$\mathcal{E}^i \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ijk} \partial_0 H_{jk} + \psi^i = 0$$

où $\psi^i = \psi^i(g_{\alpha\beta}, \partial_i H_{\alpha\beta})$ ne dépend pas des dérivées obliques $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, et en l'équation unique

$$\mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0$$

vérifiée identiquement sur S . De plus, cette équation ne renferme aucune dérivée oblique de $H_{\alpha\beta}$.

Les calculs précédents montrent que le système des équations de MAXWELL (17.1) et (17.2) est équivalent à l'ensemble du système

$$(17.4) \quad \mathfrak{D}_i \equiv \frac{1}{\mu} [g^{00} - (1 - \lambda\mu)(u^0)^2] \partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu} [g^{0i} - (1 - \lambda\mu)u^0 u^i] \partial_0 H_{0i} + \phi_i \\ = \delta u_i + \sigma u^\rho H_{\rho i}$$

$$(17.5) \quad \mathcal{E}^i \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ijk} \partial_0 H_{jk} + \psi^i = 0$$

et des deux relations:

$$(17.6) \quad \mathfrak{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\rho H^{\rho 0}$$

$$(17.8) \quad \mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0.$$

Les équations (17.5) donnent les $\partial_0 H_{jk}$ qu'on porte dans les équations (17.4). Celles-ci détermineront les $\partial_0 H_{0i}$, si

$$(17.8) \quad g^{00} - (1 - \lambda\mu)(u^0)^2 \neq 0.$$

18. La solution du problème intérieur et les conditions de conservation.

Sur l'hypersurface S , donnons nous les données de Cauchy compatibles telles que

$$(18.1) \quad g^{00} \neq 0 \\ u^0 \neq 0 \quad U^0 \neq 0 \quad H \neq 0 \\ g^{00} - (1 - \lambda\mu)(u^0)^2 \neq 0.$$

Il résulte des équations (14.1), (15.1), (16.2), (16.3), (16.4), (16.5), (16.6), (16.7), (16.8), (17.4) et (17.5) que les quantités $\partial_{00}g_{ij}$, δ , $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_{00}\theta$ et $\partial_0 H_{0i}$ sont nécessairement continues à la traversée de l'hypersurface S .

Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur de ces quantités, si on suppose les données dérivables à un ordre supérieur à celui de l'hypothèse actuelle. Il suffit, pour s'en rendre compte, de dériver les équations nommées précédemment, ainsi que l'équation

$$\nabla_\alpha \mathfrak{D}^\alpha \equiv \nabla_\alpha (\delta u^\alpha + \sigma u_\rho H^{\rho\alpha}) = 0$$

qui donne les dérivées de δ .

Cette détermination fait intervenir alternativement les équations des trois groupes: gravitation, thermo-électro-hydrodynamiques et champ électromagnétique. Elle traduit en fait la séparation logique des trois phénomènes physiques et leur interaction réciproque.

D'autre part, cette détermination ne fait pas intervenir les équations (14.3), (13.14) et (13.15). Or, celles-ci ne contiennent aucune dérivée oblique des données de Cauchy ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$; θ , $\partial_0 \theta$; $H_{\alpha\beta}$). Les données de Cauchy sont donc astreintes à vérifier sur la variété S , les trois équations (14.3), (13.14) et (13.15) ou leurs équivalentes:

$$(18.2) \quad Q^\alpha_\lambda \equiv S^\alpha_\lambda - \chi T^\alpha_\lambda = 0$$

$$(18.3) \quad P^0 \equiv \mathfrak{D}^0 - (\delta u^0 + \sigma u_\rho H^{\rho 0}) = 0$$

$$(18.4) \quad \varepsilon^0 = 0$$

où l'on a posé

$$Q_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta} \quad P_\alpha \equiv \mathfrak{D}_\alpha - (\delta u_\alpha + \sigma u^\rho H_{\rho\alpha}).$$

Nous allons montrer que si les données de Cauchy vérifient les trois équations (18.2), (18.3), (18.4) sur S , elles les vérifieront également dans tout le domaine d'espace-temps considéré.

En effet, des équations d'EINSTEIN et de MAXWELL, et du caractère conservatif de $S_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{D}_\alpha$, ε_α , on peut déduire les équations suivantes:

$$(C) \quad \begin{cases} \nabla_\alpha Q^\alpha_\beta = 0 \\ \nabla_\alpha \mathfrak{D}^\alpha = 0 \\ \nabla_\alpha \varepsilon^\alpha = 0 \end{cases}$$

Soit alors un ensemble ($g_{\alpha\beta}$, θ , $H_{\alpha\beta}$), solution des équations (14.2), (17.4) et (17.5), correspondant à des données de Cauchy satisfaisant sur S aux équations (18.2), (18.3) et (18.4). Les équations du système (C) se réduisent, en vertu de

(14.2), (17.4) et (17.5), aux équations⁽²⁾

$$\begin{aligned} g^{00} \partial_0 Q^0_\beta &= A^{i\alpha}_\beta \partial_i Q^0_\alpha + B^\alpha_\beta Q^0_\alpha \\ \partial_0 P^0 &= -\frac{g^{i0}}{g^{00}} \partial_i P^0 - \left[\partial_i \left(\frac{g^{i0}}{g^{00}} \right) + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \frac{g^{0\beta}}{g^{00}} \right] P^0 \\ \partial_0 \mathcal{E}^0 &= -\Gamma^\alpha_{\alpha 0} \mathcal{E}^0 \end{aligned}$$

où les $A^{i\alpha}_\beta$ et B^α_β sont des fonctions continues.

Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues Q^0_β , P^0 , $\mathcal{E}^0$ respectivement. Comme $Q^0_\beta = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur S , elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (14.3), (13.14) et (13.15) sont vérifiées sur S par les données de Cauchy, elles sont également vérifiées dans le domaine d'espace-temps considéré. Il en résulte encore que la solution $(g_{\alpha\beta}, \theta, H_{\alpha\beta})$ des équations (14.2), (17.4), (17.5), qui satisfait aux équations de MAXWELL-EINSTEIN sur S , leur satisfait également en dehors de S . C'est là la signification profonde des conditions de conservation.

L'étude précédente nous conduit à partager le système initial des équations du champ en les deux systèmes suivants:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} S^0_\lambda &= \chi[(\rho + p)u^0 u_\lambda - p g^0_\lambda - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0) + \tau^0_\lambda - (1 - \lambda\mu)\tau^{0\rho} u_\rho u_\lambda] \\ g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta &= +1 \\ \mathfrak{D}^0 &= \delta u^0 + \sigma u_\rho H^{\rho 0} \\ \mathcal{E}^0 &\equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0 \end{aligned} \right. \\ \\ \text{(E)} \quad & \left\{ \begin{aligned} R_{ij} &= \chi\{(\rho + p)u_i u_j - \frac{1}{2}[\rho - p - (1 - \lambda\mu)\Lambda]g_{ij} \\ &\quad - (u_i q_j + u_j q_i) + \tau_{ij} - (1 - \lambda\mu)\tau_{i\rho} u^\rho u_j\} \\ g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta &= +1 \\ \rho &= \varphi(p, \theta) \\ \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= 0 \\ \nabla_\alpha q^\alpha &= c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \\ \mathfrak{D}_i &\equiv \frac{1}{\mu} [g^{00} - (1 - \lambda\mu)(u^0)^2] \partial_0 H_{0i} \\ &\quad + \frac{1}{\mu} [g^{0i} - (1 - \lambda\mu)u^0 u^i] \partial_0 H_{ii} + \phi_i = \delta u_i + \sigma u^\rho H_{\rho i} \\ \mathcal{E}^i &\equiv \frac{1}{2} \eta^{0jki} \partial_0 H_{jk} + \psi^i = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

⁽²⁾A. LICHNEROWICZ [7].

Le problème intérieur consiste finalement dans le choix des données de Cauchy rendant compatibles les équations du système (I) qui permettent de calculer p, u^α , puis dans l'intégration du système des équations (E) qui permettent d'étudier l'évolution des champs.

Si toutes les données du problème étaient analytiques réelles, on pourrait établir à l'aide du théorème d'existence de CAUCHY-KOWALESKI pour les équations aux dérivées partielles, qu'à un changement de coordonnées près conservant point par point l'hypersurface S et les valeurs des données de Cauchy sur S , le problème admet une solution analytique réelle et une seule, solution dont nous connaissons le développement selon les puissances de x^0 .

II—LES VARIETES EXCEPTIONNELLES

19. Préliminaires.

Les variétés exceptionnelles du problème de Cauchy sont les variétés à la traversée desquelles se produisent certaines discontinuités des variables de champs au sens de HADAMARD. Les plus intéressantes sont les variétés caractéristiques relatives aux différents systèmes d'équations aux dérivées partielles des champs étudiés, respectivement les équations d'EINSTEIN, les équations hydrodynamiques et les équations de MAXWELL.

Dans le système de coordonnées locales choisi où elles ont pour équation $x^0 = 0$, elles sont définies par l'une des conditions suivantes:

$$(19.1) \quad g^{00} = 0$$

$$(19.2) \quad H = 0$$

$$(19.3) \quad g^{00} - (1 - \lambda\mu)(u^0)^2 = 0$$

Dans un système de coordonnées locales quelconque, elles ont pour équation

$$f(x^\alpha) = 0$$

la fonction $f(x^\alpha)$ vérifiant l'une des trois équations précédentes rendues invariantes. Pour qu'elles aient une signification physique, elles doivent être orientées dans le temps, ou, à la limite, tangentes aux cônes élémentaires. Nous faisons donc l'hypothèse

$$(19.4) \quad \Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f \leq 0.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, telle qu'elle découle des travaux de HADAMARD, les variétés caractéristiques considérées jouent le rôle de surfaces d'ondes. On peut généraliser ce qu'on entend par vitesse de propagation T de l'onde étudiée. Cette vitesse est donnée par la formule⁽³⁾

$$(19.5) \quad T^2 = \frac{(u^\alpha \partial_\alpha f)^2}{-(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha f \partial_\beta f}.$$

20. Les variétés caractéristiques V_3^C des équations d'Einstein.

Si l'hypersurface S définie localement par $x^0 = 0$ est telle que, sur S , $g^{00} = 0$, les dérivées secondes $\partial_{00}g_{ii}$ des potentiels de gravitation peuvent être discontinues à la traversée de S . Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations d'EINSTEIN correspondant aux mêmes données de Cauchy sur S .

Ces variétés caractéristiques V_3^C jouent donc le rôle de surfaces d'ondes gravitationnelles, dans la théorie de la Relativité générale où le champ de gravitation a le caractère d'un phénomène de propagation. Elles ont pour équation générale

$$(20.1) \quad \Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Elles sont tangentes aux cônes élémentaires qui sont les cônes caractéristiques des équations d'EINSTEIN⁽⁴⁾. Et l'on vérifie d'après (19.5) qu'elles se propagent avec la vitesse limite $c = 1$.

21. Les fronts d'ondes hydrodynamiques V_3^H .

Nous appelons ainsi les variétés caractéristiques du système des équations de mouvement pour le fluide (système H). L'hypersurface S portant les données de Cauchy est telle que, sur S , le déterminant H du système (H) est identiquement nul. Les dérivées $\partial_0 p$ (ainsi que $\partial_0 u^0$, $\partial_{00}\theta$, $\dots$) peuvent être discontinues à la traversée de S . Il y a ainsi discontinuité du gradient de pression.

Les variétés V_3^H généralisent, en Relativité, les fronts d'ondes de l'hydrodynamique classique. Pour les étudier, écrivons explicitement la condition $H = 0$:

⁽³⁾LICHNEROWICZ [7].

⁽⁴⁾G. DARMOIS [3], A. LICHNEROWICZ [7].

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0$	κZ	$-\kappa g^{00}$	κu^0	0	0	0
$\frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0$	$\rho + p - \kappa Z - \frac{1 - \lambda_\mu}{4} G^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$	$\kappa [g^{00} + (u^0)^2]$	$-2\kappa u^0$	$-\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} u^0$	$\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu}$	$\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} E^0$
$g^{00} - (u^0)^2$	$-(U^0 - q^0)$	$-\kappa [g^{00} - (u^0)^2] u^0$	0	$-\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} [g^{00} - (u^0)^2]$	0	0
q^0	$q_s q^s$	$-\kappa (U^0 + q^0) u^0$	κU^0	$-\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} q^0$	0	0
$(g^{0s} - u^0 u^s) E^\alpha H_{\alpha s}$	$E^\alpha H_{\alpha s} q^s$	$-\kappa (g^{0s} - u^0 u^s) E^\alpha H_{\alpha s} u^0$	0	$-\left[U^0 + \frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} (g^{0s} - u^0 u^s) E^\alpha H_{\alpha s} \right]$	0	0
$(g^{0s} - u^0 u^s) H^{\alpha 0} H_{\alpha s}$	$H^{\alpha 0} H_{\alpha s} q^s$	$-\kappa (g^{0s} - u^0 u^s) H^{\alpha 0} H_{\alpha s} u^0$	0	$-\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} (g^{0s} - u^0 u^s) H^{\alpha 0} H_{\alpha s}$	$-U^0$	0
E^0	$E_s q^s$	$-\kappa E^\alpha u^0$	0	0	0	$-U^0$

= 0

On peut rendre invariante cette équation en remplaçant chaque fois l'indice contravariant 0 par le groupe ${}^{\lambda}\partial_{\lambda}f$, $f(x^{\alpha}) = 0$ désignant la nouvelle équation de S . Mais, nous effectuons les calculs dans le système de coordonnées locales choisi où S a pour équation

$$x^0 = 0.$$

Des 3^e et 4^e colonnes, mettons κ en facteur. Ensuite, ajoutons les éléments de la 2^e ligne multipliés par u^0 à ceux de la 3^e ligne, les éléments de la 1^{ère} ligne à ceux de la 2^e ligne; et dans le déterminant obtenu, ajoutons les éléments de la 4^e colonne multipliés par u^0 à ceux de la 3^e colonne,

les éléments de la 6^e colonne multipliés par $(1 - \lambda\mu)E^0$ à ceux de la 7^e colonne; puis, dans le déterminant obtenu, ajoutons les éléments de la 3^e colonne multipliés par $\frac{1 - \lambda\mu}{\mu}$ à ceux de la 5^e colonne multipliée par $-u^0$. Nous obtenons le déterminant équivalent à H au facteur

$$-\kappa \left[\frac{(1 - \lambda\mu)^2}{\mu} \cdot E^0 (u^0)^3 \right]^{-1}$$

près.

Nous pouvons remplacer l'équation $H = 0$ par l'équation équivalente

$\frac{l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0$	κZ	$-[g^{00} - (u^0)^2]$	u^0	$-\frac{1 - \lambda\mu}{\mu} [g^{00} - (u^0)^2]$	0	0		
$\left(1 + \frac{l}{\rho}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} u^0$	$\rho + p - \frac{1 - \lambda\mu}{4} G^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$	0	$-u^0$	$\frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (u^0)^2$	$\frac{1 - \lambda\mu}{\mu}$	0		
$[g^{00} - (u^0)^2] - \frac{\partial \varphi}{\partial p} (u^0)^2$	$2q^0 - (1 - \lambda\mu)E_{\alpha}G^{\alpha 0}$	0	$-2(u^0)^2$	$\frac{1 - \lambda\mu}{\mu} g^{00} u^0$	$\frac{1 - \lambda\mu}{\mu} u^0$	0		
q^0	$q_{\beta}q^{\beta}$	$-q^0 u^0$	U^0	0	0	0		$= 0$
$(g^{0\beta} - u^0 u^{\beta})E^{\alpha} H_{\alpha\beta}$	$E^{\alpha} H_{\alpha\beta} q^{\beta}$	$-(g^{0\beta} - u^0 u^{\beta})E^{\alpha} H_{\alpha\beta} u^0$	0	$U^0 u^0$	0	0		
$(g^{0\beta} - u^0 u^{\beta})H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta}$	$H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta} q^{\beta}$	$-(g^{0\beta} - u^0 u^{\beta})H^{\alpha 0} H_{\alpha\beta} u^0$	0	0	$-U^0$	$-(1 - \lambda\mu)E^{\alpha} U^0$		
E^0	$E_{\beta}q^{\beta}$	$-E^0 u^0$	0	0	0	$-U^0$		

On peut mettre de nouveau U^0 en facteur dans la dernière colonne. Ce facteur provient de l'introduction des inconnues auxiliaires Z, X_1, X_2, X_3 dans lesquelles figurent $\partial_0 u^i$, ces quantités étant discontinues pour $U^0 = 0$. D'autre part, en revenant aux équations (14.3) qui peuvent se mettre sous la forme

$$S^0_\lambda = \chi(U^0 u_\lambda - p g^0_\lambda - u^0 q_\lambda + \tau^0_\lambda);$$

on voit que le facteur U^0 correspond également aux discontinuités de u^λ, p . Nous ne considérons pas ici le facteur $-U^0$.

Divisons maintenant par $\{-[g^{00} - (u^{(0)2})]^\frac{1}{2}\}$ les éléments de la 4^e ligne ainsi que ceux des 1^{ère}, 4^e et 7^e colonnes, par $-[g^{00} - (u^{(0)2})]$ les éléments de la 5^e colonne, nous obtenons

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} T$	κZ	1	T	$\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu}$	0	0
$\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} T$	$\rho + p - (1 - \lambda_\mu) \frac{\mu H^2 - \lambda E^2}{2}$	0	$-T$	$\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} T^2$	$\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu}$	0
$\frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 - 1$	$2\vec{q} \cdot \vec{n} + \frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} (a + \lambda_\mu E^2 T)$	0	$-2T^2$	$-\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} (1 - T^2) T$	$\frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} T$	0
$\vec{q} \cdot \vec{n}$	$(\vec{q})^2$	$-\vec{q} \cdot \vec{n} T$	$KT - \vec{q} \cdot \vec{n} - \frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} a$	0	0	0
a	$E^a H_{as} q^s$	$-aT$	0	$\left(KT - \vec{q} \cdot \vec{n} - \frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} a\right) T$	0	0
$b - aT$	$H^a n_s H_a q^s - E^a H_{as} q^s$	$-(b - aT)T$	0	0	$-(KT - \vec{q} \cdot \vec{n} - \frac{1 - \lambda_\mu}{\mu} a) (1 - \lambda_\mu) \vec{E} \cdot \vec{n}$	
$\vec{E} \cdot \vec{n}$	$E_s q^s$	$-\vec{E} \cdot \vec{n} T$	0	0	0	1

où

$$a = E^\alpha H_{\alpha\beta} n^\beta \quad b = H^{\alpha\beta} n_\beta H_{\alpha\gamma} n^\gamma \quad K = \rho + p - \kappa Z - (1 - \lambda\mu) \frac{\mu H^2 + \lambda E^2}{2}$$

$\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire orienté dans l'espace défini par la composante d'espace de la normale orientée à V_3^H (c'est-à-dire la direction de propagation des discontinuités).

Chaque terme dans l'équation précédente prend aisément sa signification classique et on en déduit l'interprétation physique locale.

L'équation précédente est du 8^e degré en T . Mais plusieurs racines ont été introduites par les calculs auxiliaires. En donnant à T le sens de la vitesse de propagation locale des fronts d'ondes hydrodynamiques, on doit satisfaire à la condition

$$T^2 \leq 1.$$

On voit que les fronts d'ondes hydrodynamiques subissent des effets de la part des phénomènes thermiques et électromagnétiques qui prennent naissance dans le fluide. Si on développe le déterminant suivant $(1 - \lambda\mu)$, on s'aperçoit que tous les termes en $H_{\alpha\beta}$ figurent avec le facteur $(1 - \lambda\mu)$. L'influence du champ électromagnétique est donc négligeable si $(1 - \lambda\mu)$ est petit.

Pour des fluides réels, les effets précédents sont petits. Une approximation jusqu'à l'ordre des termes $\partial_\alpha \theta$, $\partial_\alpha \theta H_{\beta\gamma}$, $H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} H_{\epsilon\sigma}$ conduit à l'équation suivante au facteur $(\rho + p)^3 T^4$ près:

$$\begin{aligned} f(T) \equiv & \left[2 \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} \cdot \frac{l}{\rho} a - \vec{q} \cdot \vec{n} \left(1 + \frac{2l}{\rho} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^4 \\ & - \left\{ \rho + p - 3\kappa Z - 3(1 - \lambda\mu) \frac{\mu H^2 + \lambda E^2}{2} \right. \\ & - \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} \left[(1 - \lambda\mu) \frac{l}{\rho} (\vec{E} \cdot \vec{n})^2 + \frac{l}{\rho} b - \mu \frac{\mu H^2 - \lambda E^2}{2} - \lambda\mu \left(1 + \frac{l}{\rho} \right) E^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^3 \\ & + \left\{ 2 \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} a \left(2 + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) - \vec{q} \cdot \vec{n} \left[1 - \left(5 + \frac{2l}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right] \right\} T^2 \\ & + \left\{ \rho + p - 3\kappa Z - 3(1 - \lambda\mu) \frac{\mu H^2 + \lambda E^2}{2} \right. \\ & + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} \left[(1 - \lambda\mu) (\vec{E} \cdot \vec{n})^2 - b - \mu \frac{\mu H^2 - \lambda E^2}{2} \right] \left. \right\} T \\ & - 3 \left(\vec{q} \cdot \vec{n} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} a \right) = 0 \end{aligned}$$

L'équation précédente a deux racines voisines de $\pm \frac{1}{\sqrt{\varphi_p'}}$. Ce sont les racines qui conviennent au problème. Pour les évaluer, substituons à T l'expression $\frac{\epsilon}{\sqrt{\varphi_p'}} + \alpha$ où $\epsilon = \pm 1$ et α est petit. Il vient

$$\alpha = \left(1 + \frac{l}{\rho}\right) \left(1 - \frac{1}{\varphi_p'}\right) \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\rho + p} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} \frac{1 + \frac{l}{\rho}}{\rho + p} \left\{ \frac{a}{\varphi_p'} + \frac{\epsilon}{\sqrt{\varphi_p'}} \cdot \frac{1}{2} [(1 - \lambda\mu)(\vec{E} \cdot \vec{n})^2 - \lambda\mu E^2 - b] \right\}.$$

Quand on change la valeur de $\epsilon = +1$ en $\epsilon = -1$, il faut changer le sens de $\vec{n}$ qui définit le sens de la propagation de l'onde. Sur les expressions de a , b et $\vec{q} \cdot \vec{n}$, on voit que a et $\vec{q} \cdot \vec{n}$ changent de signe. Il en résulte que α change de signe. Les deux racines

$$T = \frac{\epsilon}{\sqrt{\varphi_p'}} + \alpha$$

sont donc opposées. Elles correspondent à des propagations possibles dans les deux sens à partir de la source de perturbation.

Dans le cas où $1 - \lambda\mu$ est petit, on a

$$T = \frac{\epsilon}{\sqrt{\varphi_p'}} + \left(1 + \frac{l}{\rho}\right) \left(1 - \frac{1}{\varphi_p'}\right) \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\rho + p},$$

valeur qui correspond au cas d'un fluide thermodynamique pur sans champ électromagnétique.

On constate enfin la présence du facteur $\left(1 + \frac{l}{\rho}\right)$ qui fait intervenir la dilatation de chaque élément de fluide.

22. Les variétés caractéristiques des équations de Maxwell V_3^M .

Sur les équations (17.4), (17.5), on voit que si l'hypersurface S portant les données de Cauchy, est telle que sur S

$$g^{00} - (1 - \lambda\mu)(u^0)^2 = 0$$

les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de S . Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy sur S .

Dans un système de coordonnées locales quelconque où S a pour équation $f(x^\alpha) = 0$, les variétés caractéristiques V_3^M des équations de MAXWELL satisfont à l'équation

$$(22.1) \quad g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f - (1 - \lambda\mu)(u^\alpha \partial_\alpha f)^2 = 0.$$

Comme l'hypersurface S doit être orientée dans le temps, on doit avoir

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = (1 - \lambda\mu)(u^\alpha \partial_\alpha f)^2 \leq 0.$$

On en déduit

$$(22.2) \quad 1 - \lambda\mu \leq 0.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M des équations de MAXWELL jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. La formule (19.5) permet de calculer leur vitesse de propagation

$$(22.3) \quad T = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}.$$

En vertu de (22.2), on voit que $T \leq 1$, ce qui correspond aux résultats de l'expérience.

III—LE SCHEMA CHAMP ELECTROMAGNETIQUE PUR

23. Les équations du champ du vide.

Si dans un domaine D de l'espace-temps, la densité de matière est partout nulle ($\rho = 0$), nous dirons que ce domaine D est vide. La forme d'énergie qui le traverse, est de l'énergie électromagnétique.

Le champ électromagnétique correspondant est représenté par les deux tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ vérifiant les équations de liaison

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} u^\alpha &= \lambda H_{\alpha\beta} u^\alpha \\ \mu G_{\alpha\beta} u^\alpha &= H_{\alpha\beta} u^\alpha \end{aligned}$$

où $\lambda\mu = 1$ et $\vec{u}$ représente maintenant le vecteur unitaire orienté dans le temps d'un repère galiléen quelconque au point considéré. On en tire alors

$$(23.1) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta}$$

Dans le vide, il n'y a pas de matière chargée, le vecteur courant électrique $\vec{J}$ est nul partout. Les équations de MAXWELL sont donc prises sous la forme

$$(23.2) \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$$

$$(23.3) \quad \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0.$$

Ces équations montrent que la forme $H = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ est une forme harmonique au sens de HODGE-DE RHAM.

Comme on a vu au paragraphe 10, le tenseur d'impulsion-énergie du vide

est égal au tenseur électrodynamique

$$(23.4) \quad T_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(G_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^{\rho}_{\beta}.$$

On vérifie d'après (23.1) que $T_{\alpha\beta}$ est symétrique.

A partir des équations de MAXWELL, on établit facilement les équations de l'électrodynamique du vide:

$$(23.5) \quad \nabla_{\alpha}\tau^{\alpha}_{\beta} = \nabla_{\alpha}G^{\alpha\rho}H_{\rho\beta} = 0$$

ce qui est compatible avec le caractère conservatif du tenseur d'impulsion-énergie.

Les considérations précédentes montrent que les équations du champ du vide sont constituées par le système des équations de MAXWELL-EINSTEIN:

$$(23.6) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + k)g_{\alpha\beta} = \chi\tau_{\alpha\beta}$$

$$(23.7) \quad \mathfrak{D}_{\beta} \equiv g^{\alpha\rho}\nabla_{\alpha}G_{\rho\beta} = 0$$

$$(23.8) \quad \mathfrak{E}^{\beta} \equiv \nabla_{\alpha}H^{\alpha\beta} = 0$$

Le schéma énergétique précédent sera dit schéma champ électromagnétique pur. C'est cependant un schéma macroscopique qu'il convient de distinguer du schéma microscopique au sens de l'électrodynamique de LORENTZ.

24. Le problème de Cauchy relatif au schéma champ électromagnétique pur et l'intégration des équations de Maxwell-Einstein.

L'étude mathématique du schéma champ électromagnétique pur pose le problème suivant:

PROBLEME EXTERIEUR.—*Etant donnés sur une hypersurface S , les champs de gravitation et électromagnétique par les $(g_{\alpha\beta}, \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta})$, déterminer ces champs en dehors de S , ceux-ci étant supposés satisfaire aux équations (23.5), (23.7), (23.8).*

Si S est représentée par l'équation $x^0 = 0$, les données de Cauchy seront ici les valeurs de $(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta})$, les $g_{\alpha\beta}$ étant au moins trois fois différentiables et les $H_{\alpha\beta}$ au moins deux fois différentiables.

Les calculs que nous avons faits dans la section I pour l'étude du schéma fluide chargé-champ électromagnétique s'appliquent ici avec de grandes simplifications. Les équations du champ se décomposent en l'ensemble des deux systèmes

$$(I) \quad \begin{cases} Q^0_{\lambda} \equiv S^0_{\lambda} - \chi\tau^0_{\lambda} = 0 \\ \mathfrak{D}^0 \equiv \frac{1}{\mu} g^{i\rho} g^{0\beta} \nabla_i H_{\rho\beta} = 0 \\ \mathfrak{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0 \end{cases}$$

$$(E) \quad \begin{cases} R_{ii} \equiv \chi \tau_{ii} = \chi \left[\frac{1}{2} g_{ii} \left(\frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{\mu} H_{\alpha i} H^{\alpha}{}_{i} \right] \\ \mathfrak{D}_i \equiv \frac{1}{\mu} g^{00} \partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu} g^{0i} \partial_0 H_{ii} + \phi_i(g_{\alpha\beta}, \partial_\lambda g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}, \partial_i H_{\alpha\beta}) = 0 \\ \varepsilon^i \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ik} \partial_0 H_{ik} + \psi^i(g_{\alpha\beta}; \partial_i H_{\alpha\beta}) = 0 \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter les conditions de conservation

$$(C) \quad \begin{cases} \nabla_\alpha Q^\alpha{}_\beta = 0 & (Q_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi \tau_{\alpha\beta}) \\ \nabla_\alpha \mathfrak{D}^\alpha = 0 \\ \nabla_\alpha \varepsilon^\alpha = 0 \end{cases}$$

Les premiers membres $Q^\alpha{}_\lambda$, $\mathfrak{D}^0$, ε^0 des équations du système (I) ont, comme on a vu, des valeurs directement calculables sur S , à partir des données de Cauchy. Il en résulte que celles-ci doivent être choisies telles que les six équations (I) soient vérifiées sur S . S'il en est ainsi, les équations du système (E) fournissent les valeurs des dérivées $\partial_0 g_{ij}$, $\partial_0 H_{0i}$ et $\partial_0 H_{ii}$ sur S sous la seule réserve que

$$g^{00} \neq 0.$$

Par dérivation par rapport à x^0 des équations (E), on peut éventuellement étendre les conclusions précédentes aux dérivées d'ordre supérieur de $g_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$.

Soit alors des données de Cauchy satisfaisant aux équations (I) et supposons que nous connaissons un couple de tenseurs $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta})$ correspondant à ces données de Cauchy et satisfaisant aux équations (E). Les conditions de conservation (C) montrent, comme dans le cas du fluide chargé, que ce couple $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta})$ satisfait encore en dehors de S , aux équations de MAXWELL-EINSTEIN.

Ainsi, si l'hypersurface S est telle que, sur S , $g^{00} = 0$, les dérivées $\partial_{00} g_{ij}$, $\partial_0 H_{0i}$ des champs de gravitation et du champ électromagnétique ont des valeurs bien déterminées sur S .

Si la variété S est telle que g^{00} est identiquement nulle sur S , les dérivées $\partial_{00} g_{ij}$, et $\partial_0 H_{0i}$ du champ de gravitation et du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de S . On peut en particulier construire des solutions des équations de MAXWELL-EINSTEIN telles que les $\partial_{00} g_{ij}$ soient continues à la traversée de S , tandis que les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ sont discontinues. La variété S apparaît comme une variété caractéristique des équations de MAXWELL ou comme front d'ondes électromagnétiques.

Ceci montre qu'il y a identité entre les variétés caractéristiques des équations d'EINSTEIN et celles des équations de MAXWELL. Ces variétés sont les solutions de l'équation

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

On établit ainsi l'identité des lois de propagation des deux champs gravitationnel et électromagnétique.

Chapitre IV—LE PROBLEME DE RACCORDEMENT

I—LE RACCORDEMENT DE DEUX MILIEUX FLUIDES

25. Conditions géométriques de raccordement.

On considère dans la variété espace-temps V_4 , un domaine meublé par plusieurs milieux fluides contigus, possédant des propriétés physiques différentes. Chacun de ces milieux engendre un tube d'univers limité à une hypersurface S . A l'intérieur de chaque tube, la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

satisfait aux équations d'EINSTEIN

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

On se propose d'étudier ce qui se passe à la traversée de l'hypersurface S séparant deux milieux.

En vertu de l'axiomatique de la Relativité générale, les ds^2 doivent se raccorder sur la frontière S de deux domaines de V_4 , suivant les conditions de raccordement de SCHWARZSCHILD.

Nous dirons alors que deux milieux fluides contigus se raccordent, s'il existe un système de coordonnées (x^α) dit admissible, tel que:

- a. les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$ soient continues à la traversée de l'hypersurface de raccordement S ;
- b. l'hypersurface S considérée comme frontière de chacun des domaines occupés par les deux fluides considérés, est engendrée par les lignes de courant du fluide correspondant.

Les deux conditions précédentes seront dites les conditions géométriques de raccordement de deux milieux. La seconde condition entraîne la continuité du vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ à la traversée de S .

Soit

$$f(x^\alpha) = 0$$

l'équation de S dans un système de coordonnées locales arbitraires x^α . L'hypersurface S , engendrée par les lignes de courant de chaque fluide, est orientée dans le temps, et l'on a

$$u^\alpha \partial_\alpha f = 0.$$

Nous rapporterons, dans l'étude locale qui va suivre, les deux champs considérés au système de coordonnées de GAUSS relatif à S . L'hypersurface S est alors localement représentée par l'équation

$$x^0 = 0$$

et le ds^2 se met sous la forme

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ii}(x^\alpha) dx^i dx^i$$

Dans ce système de coordonnées

$$u^0 = 0 \quad g^{00} = -1$$

Dans la suite, nous distinguerons le second milieu du premier par une barre “—” surmontant les quantités correspondantes.

26. Raccordement du champ de température.

Le champ de température θ satisfait dans chacun des deux domaines D et $\overline{D}$ considérés, à l'équation de conduction thermique

$$(26.1) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho$$

où $\vec{q}$ est le vecteur courant de chaleur

$$(26.2) \quad q^\alpha = -\kappa(\partial^\alpha \theta - Zu^\alpha)$$

et $\partial^\alpha \theta = g^{\alpha\beta} \partial_\beta \theta$, $Z = u^\alpha \partial_\alpha \theta$.

Nous ferons les hypothèses suivantes:

- 1) les fonctions $\theta = \theta(x^\alpha)$ et $\rho = \rho(x^\alpha)$ restent continues et bornées ainsi que leurs dérivées, le long des lignes de courant;
- 2) le champ de température θ est continu à la traversée de l'hypersurface de séparation S .

Ces hypothèses sont suffisantes pour rendre compte des phénomènes calorifiques qui se passent à la traversée de S .

En effet, choisissons un domaine à quatre dimensions B limité dans un tube de chaleur Θ (engendré par les trajectoires du champ de vecteurs $\vec{q}$), par deux hypersurfaces S' et S'' voisines à S et situées de part et d'autre de S , également engendrées par des lignes de courant dans chaque domaine.

Intégrons les deux membres de l'équation (26.1) sur ce domaine B . Nous avons

$$(26.3) \quad \iiint_B \nabla_\alpha q^\alpha d\tau = \iiint_B \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) d\tau$$

$d\tau$ désignant l'élément de volume spatio-temporel. Transformons l'intégrale de divergence au premier membre en intégrale de surface. En vertu du choix de B , elle a pour valeur

$$(26.4) \quad \iiint_B \nabla_\alpha q^\alpha d\tau = \iiint_{S''} \bar{q}^\alpha \nu_\alpha d\omega - \iiint_{S'} q^\alpha \nu_\alpha d\omega$$

où $d\omega$ désigne l'élément d'aire de la frontière de B (c'est-à-dire de S' et S'') et $\vec{\nu}$ le vecteur unitaire orienté normal à cette frontière.

Faisons tendre S' et S'' vers S . En vertu de l'hypothèse (1), la quantité $\left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho\right)$ reste bornée. Son intégrale tend vers 0. On déduit alors des égalités précédentes

$$(26.5) \quad \iiint_{S_+} \bar{q}^\alpha \nu_\alpha d\omega = \iiint_{S_-} q^\alpha \nu_\alpha d\omega$$

où $d\omega$ désigne maintenant l'élément d'aire de S , ν_α le vecteur unitaire orienté normal à S , S_+ et S_- les deux faces de S . Il en résulte que l'on a nécessairement en chaque point de S :

$$(26.6) \quad \bar{q}^\alpha \nu_\alpha = q^\alpha \nu_\alpha .$$

Cette égalité exprime que la composante normale du vecteur courant de chaleur est continue à la traversée de S . Dans le système de coordonnées de Gauss relatif à S , on peut l'écrire

$$\bar{q}^0 = q^0$$

et comme $u^0 = 0$ sur S , de la définition (26.2) de q^α , on tire la relation

$$(26.7) \quad \bar{\kappa} \partial^0 \bar{\theta} = \kappa \partial^0 \theta .$$

Les composantes tangentielles du vecteur courant de chaleur peuvent néanmoins être discontinues à la traversée de S .

27. L'extension relativiste des théorèmes de Gauss, d'Ampère et de Faraday.

Du point de vue classique, les équations de MAXWELL du premier groupe

$$(27.1) \quad \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\Gamma}$$

$$(27.2) \quad \text{div } \vec{D} = \delta$$

constituent l'expression différentielle des théorèmes d'AMPÈRE et de GAUSS. Sous forme intégrale, le théorème de GAUSS est relatif au flux du vecteur induction électrique $\vec{D}$ à travers une surface fermée Σ :

$$(27.3) \quad \iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} d\Sigma = \iiint_V \delta dV$$

Ce flux est égal à la somme des charges se trouvant à l'intérieur de Σ .

Le théorème de GAUSS fait intervenir un volume spatial V . Par contre, le

théorème d'AMPÈRE est relatif à la circulation du vecteur champ magnétique $\vec{H}$ le long d'une courbe fermée C limitant une surface Σ :

$$(27.4) \quad \int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \vec{i} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$

où $\vec{i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\Gamma}$ est le courant électrique total composé du courant de déplacement et du courant de conduction.

Sous ces deux énoncés, les deux théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE ne présentent aucune analogie. Mais, si nous intégrons l'équation (27.4) dans le temps, nous avons:

$$(27.5) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Sigma} \vec{i} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$

Au second membre, nous avons une quantité d'électricité: c'est, en un certain sens, une charge dans le temps. Le domaine d'intégration est le volume balayé par Σ . Sous cette forme, le théorème d'AMPÈRE présente une grande analogie avec le théorème de GAUSS.

En fait, le champ électromagnétique étant représenté par deux tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ dont la séparation en champs et inductions usuels est faite par des observateurs locaux dans les repères galiléens correspondants, les deux théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE doivent être intimement liés dans l'espace-temps. Ils doivent se réunir dans un même énoncé.

Considérons alors un domaine D de l'espace-temps occupé par un fluide chargé, induisant un champ électromagnétique. Rapportons d'abord les points de D aux repères propres associés et supposons que les coordonnées orthogonales choisies soient telles que les lignes x^0 coïncident avec les lignes de courant et que les lignes x^i soient partout orientées dans l'espace.

Remarquons ensuite que les équations de MAXWELL du premier groupe peuvent se mettre sous la forme

$$(27.6) \quad \nabla_{\alpha} G^{\alpha(\beta)} = \delta u^{(\beta)} + \Gamma^{(\beta)}$$

où l'indice β mis entre parenthèses est un indice muet, c'est-à-dire qu'il n'est pas soumis à l'opérateur de dérivation covariante ∇_{α} . Les quatre quantités $G^{\alpha(\beta)}$ constituent alors quatre vecteurs $\vec{k}^{(\beta)}$ de composantes

$$k^{(\beta)\alpha} = G^{\alpha(\beta)}.$$

Dans notre choix de coordonnées, les équations (27.6) se décomposent en l'équation

$$(27.7) \quad \text{div } \vec{k}^{(0)} = \nabla_{\alpha} G^{\alpha(0)} = \delta u^0$$

où $u^0 = 1$ et en le système des trois équations

$$(27.8) \quad \operatorname{div} \vec{k}^{(i)} = \nabla_\alpha G^{\alpha(i)} = \Gamma^{(i)}.$$

L'équation $x^{(\beta)} = 0$ définit une hypersurface S à trois dimensions dans V_4 . Le vecteur $\vec{k}^{(\beta)}$ ayant sa composante $k^{(\beta)\beta} = G^{\beta(\beta)} = 0$, est tangente à S . Il induit donc sur S un vecteur de mêmes composantes. L'intégration sur un domaine à trois dimensions de S , conduit alors au théorème de GAUSS pour $(\beta) = 0$ et au théorème d'AMPÈRE pour $(\beta) = i$.

Dans l'espace-temps, considérons le domaine à quatre dimensions $B^{(\beta)}$ limité par deux hypersurfaces $x^{(\beta)} = \text{const.}$ dans un tube de coordonnées $x^{(\beta)}$. Intégrons les équations (27.7) et (27.8) sur des domaines $B^{(\beta)}$ ainsi définis. Nous obtenons, après transformation et en vertu de la définition de $B^{(\beta)}$:

$$(27.9) \quad \operatorname{flux}_{\partial B^{(0)}} \vec{k}^{(0)} = \iiint_{B^{(0)}} \delta u^{(0)} d\tau$$

$$(27.10) \quad \operatorname{flux}_{\partial B^{(i)}} \vec{k}^{(i)} = \iiint_{B^{(i)}} \Gamma^{(i)} d\tau$$

L'équation (27.9) traduit le théorème de GAUSS et l'équation (27.10) le théorème d'AMPÈRE. Et les intégrales du second membre sont étendues à des domaines à quatre dimensions de V_4 .

Rapportons maintenant l'espace-temps V_4 aux repères naturels associés à un système de coordonnées locales quelconque (x^α) . Les équations (27.9) et (27.10) se mettent sous la forme générale invariante

$$(27.11) \quad \operatorname{flux}_{\partial B^{(\beta)}} \vec{k}^{(\beta)} = \iiint_{B^{(\beta)}} [\delta u^{(\beta)} + \Gamma^{(\beta)}] d\tau.$$

Cette équation est valable pour un domaine à quatre dimensions quelconque de V_4 . Elle se déduit de (27.6) par intégration sur ce domaine. Nous la prendrons pour une expression relativiste des théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE :

$$(27.12) \quad \operatorname{flux}_{\partial B} \vec{k}^{(\beta)} = \iiint_B [\delta u^{(\beta)} + \Gamma^{(\beta)}] d\tau$$

où B est un domaine spatio-temporel quelconque.

Une étude analogue pour les équations de MAXWELL du second groupe

$$(27.13) \quad \nabla_\alpha H^{\alpha\beta} = 0$$

permet d'introduire les vecteurs $\vec{h}^{(\beta)}$ de composantes $h^{(\beta)\alpha} = \dot{H}^{\alpha(\beta)}$. Ils satisfont aux relations intégrales

$$(27.14) \quad \text{flux}_{\partial B} \vec{h}^{(\beta)} = \iiint_B \nabla_\alpha \dot{H}^{\alpha(\beta)} = 0$$

qui généralisent en Relativité les théorèmes de GAUSS et de FARADAY.

28. Raccordement du champ électromagnétique.

Dans chacun des voisinages de l'hypersurface de séparation S , le champ électromagnétique $(H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta})$ satisfait aux équations de MAXWELL

$$(28.1) \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \delta u^\beta + \Gamma^\beta$$

$$(28.2) \quad \nabla_\alpha \dot{H}^{\alpha\beta} = 0.$$

Pour étudier son comportement à la frontière S des deux domaines D et $\bar{D}$, il nous faut faire intervenir les théorèmes de GAUSS-AMPÈRE et de GAUSS-FARADAY (27.12) et (27.14).

Considérons les champs de vecteurs $\vec{k}^{(\beta)}$ et $\vec{h}^{(\beta)}$.

Les trajectoires de $\vec{k}^{(\beta)}$ définissent des tubes de force $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{K}$ un de ces tubes. Limitons dans $\mathcal{K}$ un domaine à quatre dimensions B par deux hypersurfaces S' et S'' voisines à S , situées de part et d'autre de S et également engendrées par des lignes de courant dans chaque milieu. Appliquons le théorème de GAUSS-AMPÈRE (27.12) à ce domaine. En vertu du choix de B , nous avons

$$(28.3) \quad \text{flux}_{\partial B} \vec{k}^{(\beta)} = \iiint_{S''} \bar{k}^{(\beta)\alpha} \nu_\alpha d\omega - \iiint_{S'} k^{(\beta)\alpha} \nu_\alpha d\omega = \iiint_B [\delta u^{(\beta)} + \Gamma^{(\beta)}] d\tau$$

Faisons tendre S' et S'' vers S . Les deux intégrales de surface tendent vers des valeurs bien déterminées suivies par continuité de part et d'autre de S . Le second membre doit donc avoir une valeur définie. Quand S' et S'' viennent sur S , le domaine B se réduit à la portion d'hypersurface S . Il existe deux quantités $\omega u^{(\beta)}$ et $K^{(\beta)}$ telles que l'on ait à la limite

$$(28.4) \quad \iiint_{S_+} \bar{k}^{(\beta)\alpha} \nu_\alpha d\omega - \iiint_{S_-} k^{(\beta)\alpha} \nu_\alpha d\omega = \iiint_S [\omega u^{(\beta)} + K^{(\beta)}] d\omega$$

où $d\omega$ désigne l'élément d'aire de S et ν_α le vecteur unitaire orienté normal à S , S_- et S_+ les deux faces de S .

De (28.4), on déduit

$$(28.5) \quad \iiint_S \{[\bar{k}^{(\beta)\alpha} - k^{(\beta)\alpha}] \nu_\alpha - [\omega u^{(\beta)} + K^{(\beta)}]\} d\omega = 0.$$

Cette égalité a lieu quel que soit le domaine S pris dans l'hypersurface de raccordement. Il en résulte qu'en chaque point de l'hypersurface S , on a

$$(28.6) \quad [\bar{k}^{(\beta)\alpha} - k^{(\beta)\alpha}]_{\nu_\alpha} = \omega u^{(\beta)} + K^{(\beta)}.$$

Par définition, ω sera appelé la densité de charge superficielle sur S et $\vec{K}$ le vecteur courant de surface.

En revenant à la définition du vecteur $\vec{k}^{(\beta)}$, nous pouvons mettre la relation (28.6) sous la forme

$$(28.7) \quad (\bar{G}^{\alpha\beta} - G^{\alpha\beta})_{\nu_\alpha} = \omega u^\beta + K^\beta$$

où chaque terme reprend sa signification habituelle. Nous pouvons prendre la dérivée covariante contractée en β . Tenant compte de (28.1), nous en déduisons la relation

$$(28.8) \quad \nabla_\alpha(\omega u^\alpha + K^\alpha) = (\bar{\Gamma}^\alpha - \Gamma^\alpha)_{\nu_\alpha}$$

qui lie ω et K^α au vecteur courant de conduction dans les deux milieux considérés.

Un calcul analogue effectué pour le champ de vecteurs $\vec{h}^{(\beta)}$ conduit à la relation

$$(28.9) \quad (\bar{H}^{\alpha\beta} - H^{\alpha\beta})_{\nu_\alpha} = 0$$

qui signifie que les $\bar{H}^{\alpha\beta}_{\nu_\alpha}$ sont continues à la traversée de S .

Les relations (28.7), (28.8), (28.9) fournissent les conditions de raccordement relatives au champ électromagnétique.

29. Interprétation locale et étude sur ω et $\vec{K}$.

Plaçons nous dans le repère propre associé à chaque point de S , et tel qu'un vecteur de base orienté dans l'espace coïncide avec la normale $\vec{\nu}$ à S . Soit $\vec{V}^{(1)}$. S est donc définie localement dans ce paragraphe par l'équation

$$x^1 = 0.$$

Les conditions de raccordement (28.7) pour $G^{1\alpha}$ s'interprètent alors comme

$$(29.1) \quad \begin{aligned} \bar{G}^{10} - G^{10} &= \omega & \text{d'où} & \quad \bar{D}_1 - D_1 = \omega \\ \bar{G}^{11} - G^{11} &= K^1 & K_1 &= 0 \\ \bar{G}^{12} - G^{12} &= K^2 & \bar{H}_3 - H_3 &= K_2 \\ \bar{G}^{13} - G^{13} &= K^3 & \bar{H}_2 - H_2 &= K_3. \end{aligned}$$

K_1 est nul: on vérifie que $\vec{K}$ est bien un vecteur d'espace défini dans S .

La continuité des $\overset{*}{H}^{1\alpha}$ entraîne

$$(29.2) \quad \begin{aligned} \overset{*}{H}^{10} - \overset{*}{H}^{10} &= 0 \quad \text{d'où} \quad \bar{B}_1 - B_1 = 0 \\ \overset{*}{H}^{11} - \overset{*}{H}^{11} &= 0 \\ \overset{*}{H}^{12} - \overset{*}{H}^{12} &= 0 \quad \bar{E}_3 - E_3 = 0 \\ \overset{*}{H}^{13} - \overset{*}{H}^{13} &= 0 \quad \bar{E}_2 - E_2 = 0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les résultats classiques bien connus.

L'étude sur ω et K est grandement simplifiée, si nous raisonnons dans le repère propre précédent. Nous supposons dans la suite que $G_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, ω , $\vec{K}$ restent bornés ainsi que leurs dérivées. λ , μ sont également supposés bornés, mais σ peut être infinie.

Les conditions de raccordement (28.7) s'écrivent ici

$$(29.3) \quad \begin{aligned} (\bar{G}^{\alpha\beta} - G^{\alpha\beta})_{\nu\alpha} &= \omega u^\beta + K^\beta \\ (\overset{*}{H}^{\alpha\beta} - \overset{*}{H}^{\alpha\beta})_{\nu\alpha} &= 0 \\ \nabla_\alpha(\omega u^\alpha + K^\alpha) &= (\bar{\Gamma}^\alpha - \Gamma^\alpha)_{\nu\alpha}. \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées de GAUSS choisi, nous pouvons extraire de ces égalités, le système de deux équations locales suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}\bar{E}_1 - \lambda E_1 &= \omega \\ \bar{\sigma}\bar{E}_1 - \sigma E_1 &= \nabla_\alpha(\omega u^\alpha + K^\alpha) \end{aligned}$$

Ces équations admettent en général la solution:

$$E_1 = \frac{\bar{\lambda}\nabla_\alpha(\omega u^\alpha + K^\alpha) - \bar{\sigma}\omega}{\lambda\bar{\sigma} - \bar{\lambda}\sigma} \quad \bar{E}_1 = \frac{\lambda\nabla_\alpha(\omega u^\alpha + K^\alpha) - \sigma\omega}{\lambda\bar{\sigma} - \bar{\lambda}\sigma}$$

Si $\sigma \rightarrow \infty$, on a nécessairement

$$E_1 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{E}_1 = \frac{\omega}{\lambda}$$

et $\omega = \bar{D}_1$. Dans ce cas, le milieu correspondant est dit parfaitement conducteur. Une étude plus poussée demande des hypothèses supplémentaires. On sait que si le milieu est parfaitement conducteur, les champs électrique et magnétique sont nuls à l'intérieur.

Dans le cas général, il n'y a pas de courant de surface ($\vec{K} = 0$). Les conditions

de raccordement s'écrivent

$$\begin{aligned}
 (\bar{G}^{\alpha\beta} - G^{\alpha\beta})_{\nu_\alpha} &= \omega u^\beta \\
 (\bar{H}^{\alpha\beta} - \overset{*}{H}^{\alpha\beta})_{\nu_\alpha} &= 0 \\
 \nabla_\alpha(\omega u^\alpha) &= (\bar{\Gamma}^\alpha - \Gamma^\alpha)_{\nu_\alpha} .
 \end{aligned}
 \tag{29.4}$$

L'interprétation est immédiate. La troisième équation montre que la variation de la densité de charge superficielle sur S est égale à la différence des composantes normales des densités de courant de conduction dans les deux milieux.

30. Une évaluation de la discontinuité du champ électromagnétique dans le cas où σ et $\bar{\sigma}$ sont finies.

Nous définissons les tenseurs de discontinuités du champ électromagnétique par les relations

$$\begin{aligned}
 h_{\alpha\beta} &= \bar{H}_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta} \\
 \gamma_{\alpha\beta} &= \bar{G}_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta} \\
 \overset{*}{h}_{\alpha\beta} &= \bar{\overset{*}{H}}_{\alpha\beta} - \overset{*}{H}_{\alpha\beta} \\
 \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} &= \bar{\overset{*}{G}}_{\alpha\beta} - \overset{*}{G}_{\alpha\beta}
 \end{aligned}
 \tag{30.1}$$

et nous nous proposons de déterminer leurs expressions explicites en fonction de $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, λ , μ , $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$. Nous donnerons dans ce paragraphe les expressions de $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$; les deux autres $\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ s'en déduisent par passage à l'adjoint.

L'étude du raccordement électromagnétique de deux milieux montre qu'il existe une densité de charge superficielle ω sur la surface de séparation S . Nous introduisons le tenseur de charge superficielle

$$\Omega_{\alpha\beta} = \omega \frac{u_\alpha \partial_\beta f - u_\beta \partial_\alpha f}{\sqrt{|\Delta_1 f|}}
 \tag{30.2}$$

où $f(x^\alpha) = 0$ représente l'équation de S .

Pour évaluer $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$, nous posons

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}
 \tag{30.3}$$

$$\overset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha\beta} = \bar{\overset{*}{H}}_{\alpha\beta} - \overset{*}{H}_{\alpha\beta} - \frac{\Omega_{\alpha\beta}}{\lambda}.
 \tag{30.4}$$

Il est facile de calculer les valeurs des composantes de ces deux tenseurs relativement au repère propre

$$(30.5) \quad (\Gamma_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\bar{\lambda} - \lambda)E_2 & (\bar{\lambda} - \lambda)E_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\bar{\lambda} - \lambda)E_2 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{1}{\mu}\right)B_1 \\ -(\bar{\lambda} - \lambda)E_3 & 0 & -\left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{1}{\mu}\right)B_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(30.6) \quad {}^*\mathcal{C}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\bar{\mu} - \mu)H_2 & (\bar{\mu} - \mu)H_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\bar{\mu} - \mu)H_2 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\right)D_1 \\ -(\bar{\mu} - \mu)H_3 & 0 & -\left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\right)D_1 & 0 \end{vmatrix}$$

On voit qu'elles peuvent s'exprimer en fonction des quantités

$$\frac{H^{\alpha\beta} \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}, \quad \frac{G^{\alpha\beta} \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}, \quad \frac{{}^*H^{\alpha\beta} \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}, \quad \frac{{}^*G^{\alpha\beta} \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}.$$

Nous sommes conduits à introduire les tenseurs antisymétriques

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} H^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} & A'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} {}^*H^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} \\ B_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} & B'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} {}^*G^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} \end{aligned}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est toujours le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume spatio-temporel.

Nous déterminons les tenseurs $\Gamma_{\alpha\beta}$ et ${}^*\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ en posant

$$\Gamma_{\alpha\beta} = aA'_{\alpha\beta} + bB'_{\alpha\beta}$$

$${}^*\mathcal{C}_{\alpha\beta} = cA_{\alpha\beta} + dB_{\alpha\beta}.$$

En identifiant les valeurs relatives au repère propre des composantes de $\Gamma_{\alpha\beta}$ et ${}^*\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ données par ces expressions, avec les valeurs (30.5), (30.6), on peut calculer les coefficients a, b, c, d . Nous obtenons ainsi:

$$(30.7) \quad \Gamma_{\alpha\beta} = \left\{ (\bar{\lambda} - \lambda) + \frac{\lambda\mu}{1 - \lambda\mu} \left[(\bar{\lambda} - \lambda) - \left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{1}{\mu} \right) \right] \right\} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{H}^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} \\ - \frac{\mu}{1 - \lambda\mu} \left[(\bar{\lambda} - \lambda) - \left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{1}{\mu} \right) \right] \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{G}^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f}$$

$$(30.8) \quad \overset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha\beta} = \left\{ (\bar{\mu} - \mu) + \frac{\lambda\mu}{1 - \lambda\mu} \left[(\bar{\mu} - \mu) - \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right\} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} \\ - \frac{\mu}{1 - \lambda\mu} \left[(\bar{\mu} - \mu) - \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} H^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f}$$

et nous en déduisons les tenseurs de discontinuités $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$:

$$(30.9) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta}$$

$$(30.10) \quad \overset{*}{h}_{\alpha\beta} = \overset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\lambda} \Omega_{\alpha\beta}$$

Si on se reporte aux équations de liaison

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} (H_{\sigma\alpha} u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta} u^\sigma u_\alpha),$$

on voit que l'on peut exprimer finalement les $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$ uniquement en fonction des quantités $\frac{\overset{*}{H}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}$ et $\frac{G^{\alpha\beta} \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}$ qui sont continues à la traversée de S . Mais, alors figure explicitement le vecteur vitesse unitaire u^α .

31. Composantes continues du tenseur d'impulsion-énergie.

Plaçons nous dans un système de coordonnées de GAUSS relatif à S . Les quantités S_λ^0 ne dépendant pas des dérivées obliques des données de Cauchy sur S , ont même valeur sur S pour les deux champs au voisinage de S . Les S_λ^0 sont ainsi continues à la traversée de S .

La continuité des S_λ^0 entraîne, en vertu des équations d'EINSTEIN la continuité des composantes T_λ^0 du tenseur d'impulsion-énergie, soit pour le premier milieu

$$(31.1) \quad T_\lambda^0 = \rho u_\lambda u^0 - \pi_\lambda^0 - (u_\lambda q^0 + u^0 q_\lambda) + \tau_\lambda^0 - (1 - \lambda\mu) \tau_{\lambda\rho} u^\rho u^0.$$

Pour le second milieu, il faut prendre

$$(31.2) \quad \bar{T}_\lambda^0 = \bar{\rho} u_\lambda u^0 - \bar{\pi}_\lambda^0 - (u_\lambda \bar{q}^0 + u^0 \bar{q}_\lambda) + \bar{\tau}_\lambda^0 - (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu}) \bar{\tau}_{\lambda\rho} u^\rho u^0$$

où le tenseur électrodynamique $\bar{\tau}_{\lambda\mu}$ doit être formé à partir des tenseurs

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} \text{ et } \bar{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda} \Omega_{\alpha\beta},$$

pour qu'intervienne le tenseur de charge superficielle.

D'après l'étude faite aux §§25 et 26, $u^0 = 0$ et $\bar{q}^0 = q^0$. Il en résulte que l'on ait les égalités:

$$(31.3) \quad -\bar{\pi}_\lambda^0 + \bar{\tau}_\lambda^0 = -\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0$$

Pour interpréter ces relations, considérons les valeurs des composantes de τ_λ^0 et $\bar{\tau}_\lambda^0$ dans le repère propre (cf. chap. II, 9). Il nous suffit de nous reporter aux valeurs de $\tau_{\lambda\mu}$ calculées au §9, et aux valeurs de $\bar{\tau}_{\lambda\mu}$ calculées de la même manière ici. On convient comme toujours, que le premier indice désigne le rang de la colonne de la matrice. On a ce tableau:

$$(\bar{\tau}_{\lambda\mu}) = \begin{vmatrix} \bar{\Lambda} & \bar{D}_2\bar{B}_3 - \bar{D}_3\bar{B}_2 & (\bar{D}_3\bar{B}_1 - \bar{D}_1\bar{B}_3) - \omega\bar{B}_3 & (\bar{D}_1\bar{B}_2 - \bar{D}_2\bar{B}_1) + \omega\bar{B}_2 \\ \bar{E}_2\bar{H}_3 - \bar{E}_3\bar{H}_2 & (\lambda\bar{E}_1^2 + \mu\bar{H}_1^2) - \bar{\Lambda} + \bar{\Phi} & (\bar{D}_1\bar{E}_2 + \bar{B}_1\bar{H}_2) + \omega\bar{E}_2 & (\bar{E}_3\bar{D}_1 + \bar{B}_1\bar{H}_3) + \omega\bar{E}_3 \\ (\bar{E}_3\bar{H}_1 - \bar{E}_1\bar{H}_3) - \frac{\omega\bar{H}_3}{\lambda} & (\bar{D}_1\bar{E}_2 + \bar{B}_1\bar{H}_2) + \omega\bar{E}_2 & (\lambda\bar{E}_2^2 + \mu\bar{H}_2^2) - \bar{\Lambda} & \bar{D}_2\bar{B}_3 + \bar{B}_2\bar{H}_3 \\ (\bar{E}_1\bar{H}_2 - \bar{E}_2\bar{H}_1) + \frac{\omega\bar{H}_2}{\lambda} & (\bar{D}_1\bar{E}_3 + \bar{B}_1\bar{H}_3) + \omega\bar{E}_3 & \bar{D}_2\bar{E}_3 + \bar{B}_2\bar{H}_3 & (\lambda\bar{E}_3^2 + \mu\bar{H}_3^2) - \bar{\Lambda} \end{vmatrix}$$

où

$$\bar{\Lambda} = \frac{\lambda\bar{E}^2 + \mu\bar{H}^2}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{2} \left(2\omega\bar{E}_1^2 + \frac{\omega^2}{\lambda} \right).$$

Remarquons qu'il intervient dans $\bar{\tau}_{\lambda\mu}$ des termes dus à l'existence des charges superficielles ω , que l'on interprète immédiatement par la signification physique du tenseur électrodynamique qui doit généraliser la quantité de mouvement-énergie et les pressions. En particulier, $\bar{\Phi}$ représente la pression électrostatique locale, normale à la surface de séparation S .

Comparons maintenant les valeurs de $\tau_{\lambda 1}$ et $\bar{\tau}_{\lambda 1}$ que nous écrivons ci-dessous

$$\begin{array}{llll} E_2H_3 - E_3H_2 & (\lambda E_1^2 + \mu H_1^2) - \Lambda & D_1E_2 + B_1H_2 & D_1E_3 + B_1H_3 \\ \bar{E}_2\bar{H}_3 - \bar{E}_3\bar{H}_2 & (\lambda\bar{E}_1^2 + \mu\bar{H}_1^2) - \bar{\Lambda} + \bar{\Phi} & (\bar{D}_1 - \omega) \cdot \bar{E}_2 + \bar{B}_1\bar{H}_2 & (\bar{D}_1 - \omega) \cdot \bar{E}_3 + \bar{B}_1\bar{H}_3 \end{array}$$

En vertu des conditions de raccordement du champ électromagnétique (29.1), (29.2) d'après lesquelles $\bar{D}_1 - \omega = D_1$, $\bar{B}_1 = B_1$, $\bar{E}_2 = E_2$, $\bar{E}_3 = E_3$, $\bar{H}_2 = H_2$ et $\bar{H}_3 = H_3$, nous voyons que

$$\bar{\tau}_{\lambda 1} = \tau_{\lambda 1} \quad \text{si} \quad \lambda \neq 1.$$

Il en est de même de τ_λ^0 et $\bar{\tau}_\lambda^0$ si nous revenons aux notations initiales, car $\tau_\lambda^0 = g^{00}\tau_\lambda^0$ dans le repère propre.

Les équations (31.3) se décomposent alors comme

$$(31.4) \quad \begin{aligned} \bar{\pi}_i^0 &= \pi_i^0 \\ -\bar{\pi}_0^0 + \bar{\tau}_0^0 &= -\pi_0^0 + \tau_0^0. \end{aligned}$$

On note que dans la composante normale de la pression totale, figure la pression électrostatique $\bar{\Phi}$.

Dans le cas d'un fluide parfait, les conditions (31.3) se décomposent directement comme

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i^0 &= \tau_i^0 \\ -\bar{p} + \bar{\tau}_0^0 &= -p + \tau_0^0. \end{aligned}$$

Les trois premières équations sont vérifiées identiquement comme on a vu.

II—LE PROBLEME DU PROLONGEMENT

32. Position du problème.

On se propose de représenter sur une variété espace-temps V_4 un modèle d'univers comportant plusieurs domaines meublés par de la matière chargée et induisant un champ électromagnétique $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ sur toute la variété V_4 .

Dans chacun de ces domaines meublés, la matière engendre un tube d'univers limité à une hypersurface S . A l'intérieur de S , la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ satisfait aux équations d'EINSTEIN

$$(32.1) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ est relatif à un schéma fluide chargé-champ électromagnétique

$$(32.2) \quad \begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^\rho{}_\beta. \end{aligned}$$

Le champ électromagnétique satisfait aux équations de MAXWELL

$$(32.3a) \quad \mathfrak{D}^\beta \equiv \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \delta u^\beta + \Gamma^\beta$$

$$(32.3b) \quad \mathfrak{E}^\beta \equiv \nabla_\alpha H^{*\alpha\beta} = 0$$

et aux équations de liaison connues.

A l'extérieur de tous les domaines meublés, la métrique ds^2 de l'espace-temps vérifie les équations d'EINSTEIN dans le cas d'un schéma champ électromagnétique pur

$$(32.4) \quad S_{\alpha\beta} = \chi \tau'_{\alpha\beta} = \chi [\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G'_{\rho\sigma}H'^{\rho\sigma}) - G'_{\rho\alpha}H'^\rho{}_\beta]$$

où le champ électromagnétique vérifie les équations de MAXWELL dans le vide

$$(32.5a) \quad \mathfrak{D}'^\beta \equiv \nabla_\alpha G'^{\alpha\beta} = 0$$

$$(32.5b) \quad \mathfrak{E}'^\beta \equiv \nabla_\alpha \overset{*}{H}'^{\alpha\beta} = 0$$

et l'on a $G'_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H'_{\alpha\beta}$. Dans ces formules et dans la suite, les grandeurs affectées de l'accent ' se rapportent au vide. On a en outre la relation

$$(32.6) \quad 1 - \lambda'\mu' = 0.$$

33. Les conditions de raccordement avec le vide.

Elles se déduisent immédiatement des résultats généraux antérieurs. L'hyper-surface S de raccordement orientée dans le temps doit être engendrée par les lignes de courant du schéma fluide intérieur.

Plaçons nous dans un système de coordonnées de GAUSS.

Des résultats établis au §26, on tire d'abord la condition de raccordement du champ de température

$$(33.1) \quad \theta = \text{const.} \quad \partial^\theta \theta = 0 \quad \text{sur } S.$$

En ce qui concerne le champ électromagnétique, il faut tenir compte de l'identité $1 - \lambda'\mu' = 0$, vérifiée en chaque point du domaine extérieur. Les discontinuités du champ électromagnétique se déduisent alors facilement des formules générales (30.7), (30.8).

Dans le cas du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur, nous avons:

$$(33.2) \quad \gamma'_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} - \lambda' \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{H}^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} + \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{G}^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f}$$

$$(33.3) \quad \overset{*}{h}'_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda'} \Omega_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} H^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} + \mu' \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f}$$

où $\Omega_{\alpha\beta}$ est le tenseur défini sur S :

$$\Omega_{\alpha\beta} = \omega \frac{u_\alpha \partial_\beta f - u_\beta \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}$$

et ω est tel que

$$\nabla_\alpha (\omega u^\alpha) = \frac{\Gamma^\alpha \partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}$$

Dans le cas du prolongement de l'extérieur vers l'intérieur, il y a lieu de faire figurer le vecteur vitesse unitaire u^a (qui intervient implicitement dans le cas général). Nous avons par un calcul direct:

$$(33.4) \quad \gamma_{\alpha\beta} = -\Omega_{\alpha\beta} + (\lambda - \lambda') \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{H}'^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\gamma u_\epsilon \overset{*}{H}'^{\epsilon\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f}$$

$$(33.5) \quad \overset{*}{h}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\lambda} \Omega_{\alpha\beta} + (\mu - \mu') \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} G'^{\gamma\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f} \\ + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\gamma u_\epsilon G'^{\epsilon\rho} \frac{g^{\delta\sigma} \partial_\rho f \partial_\sigma f}{\Delta_1 f}$$

où $\Omega_{\alpha\beta}$ représente le même tenseur que précédemment, l'hypersurface $S [f(x^a) = 0]$ étant orientée une fois pour toutes.

Nous pouvons maintenant évaluer la discontinuité de pressions. Dans le vide $\pi'_{\alpha\beta} = 0$; des résultats du §31, nous tirons la relation

$$-\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0 = \tau'_\lambda^0.$$

Or nous avons vu que $\tau_i^0 = \tau'_i^0$. Nous en déduisons les relations

$$\pi_i^0 = 0 \quad \pi_0^0 = \tau_0^0 - \tau'^0_0.$$

La composante normale des pressions mécaniques n'est pas nulle. Elle intervient pour équilibrer la pression électrostatique due aux charges superficielles et aux discontinuités du champ électromagnétique.

34. Prolongement de l'intérieur vers l'extérieur.

Donnons nous d'abord dans une région limitée à une hypersurface S , un ds^2 intérieur correspondant à un schéma fluide chargé-champ électromagnétique et proposons nous de rechercher à quelles conditions, il existe de l'autre côté de S , un ds^2 extérieur correspondant à un schéma champ électromagnétique pur et se raccordant le long de S avec le ds^2 intérieur donné.

Rapportons le voisinage de S à un système de coordonnées de GAUSS relatif à l'hypersurface S qui a alors pour équation

$$x^0 = 0$$

L'étude faite dans la section I de ce chapitre nous conduit à faire les hypothèses suivantes:

a) les $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$ sont continues à la traversée de S , ce qui entraîne la continuité des S_λ^0 ,

b) les conditions suivantes sont vérifiées sur S :

$$(34.1) \quad \theta = \text{const.} \quad \partial^0 \theta = 0$$

$$(34.2) \quad G'^{0\alpha} - G^{0\alpha} = \omega u^\alpha$$

$$(34.3) \quad H'^{0\alpha} - H^{0\alpha} = 0$$

$$(34.4) \quad \nabla_\alpha(\omega u^\alpha) = \Gamma^0$$

Supposons qu'il en soit ainsi. Prenons la dérivée covariante contractée en α de (34.1). En remarquant que $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha G^{\alpha(\beta)}$ selon la convention de l'indice muet, nous obtenons

$$\nabla_\alpha G^{\alpha 0} - \nabla_\alpha G'^{\alpha 0} = \nabla_\alpha(\omega u^\alpha).$$

Or dans le vide $\nabla_\alpha G'^{\alpha 0} = 0$ (éq. 32.5a) et dans la matière $\nabla_\alpha G^{\alpha 0} = \delta u^0 + \Gamma^0$ (éq. 32.3a). Nous en déduisons l'égalité

$$\delta u^0 + \Gamma^0 = \nabla_\alpha(\omega u^\alpha).$$

En vertu de l'hypothèse (34.4), il vient nécessairement

$$\delta u^0 = 0.$$

Il en résulte que l'on a nécessairement sur S : $u^0 = 0$. Des conditions (34.1), il résulte que sur S , $q_\lambda = 0$ également.

Enfin de l'hypothèse a), nous tirons $T_\lambda^0 = \tau'_\lambda{}^0$, ou

$$\rho u_\lambda u^0 - \pi_\lambda^0 - (u_\lambda q^0 + u^0 q_\lambda) + \tau_\lambda^0 - (1 - \lambda\mu)\tau_{\lambda\rho}u^\rho u^0 = \tau'_\lambda{}^0.$$

Comme $u^0 = 0$, $q_\lambda = 0$, il vient

$$-\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0 = \tau'_\lambda{}^0.$$

Ainsi, pour que le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur soit possible, il est nécessaire que

1. l'hypersurface de raccordement S soit engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur

$$(34.5) \quad u^0 = 0$$

2. les composantes π_λ^0 de la pression satisfassent aux relations

$$(34.6) \quad -\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0 = \tau'_\lambda{}^0$$

sur S . Ces relations entraînent d'ailleurs

$$\pi_i^0 = 0 \quad \pi_0^0 = \tau_0^0 - \tau'_0{}^0$$

Réciproquement, étant données les conditions de raccordement de SCHWARZ-SCHILD a) et les hypothèses (34.1), (34.2), (34.3), supposons que l'on ait sur S

$$u^0 = 0$$

$$-\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0 = \tau'_\lambda{}^0.$$

On en tire successivement $q_\lambda = 0$, $T_\lambda^0 = -\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0 = \tau'_\lambda{}^0$. Les quantités S_λ^0 associées au ds^2 intérieur satisfont à la relation

$$S_\lambda^0 = \chi \tau'_\lambda{}^0$$

sur S .

Connaissant ω , on peut calculer les valeurs sur S de $G'_{\alpha\beta}$ et $H'_{\alpha\beta}$ à l'aide des relations (34.2), (34.3). Un ds^2 extérieur se raccordant au ds^2 intérieur donné, est alors une solution du problème de Cauchy relatif à un schéma champ électromagnétique pur et aux données précédentes ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$; $H_{\alpha\beta}$) sur S . S étant engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur, est partout orientée dans le temps. On sait que ce problème a localement une solution bien déterminée.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Théorème. *Etant donnée une distribution énergétique du type fluide chargé champ électromagnétique limitée à une hypersurface S et des champs gravitationnel et électromagnétique ($g_{\alpha\beta}$; $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$) reliés à cette distribution par les équations d'EINSTEIN et de MAXWELL (32.1), (32.3), pour qu'il existe des champs gravitationnel et électromagnétique ($g_{\alpha\beta}$; $H'_{\alpha\beta}$, $G'_{\alpha\beta}$) correspondant à un schéma champ électromagnétique pur et reliés par les équations d'EINSTEIN et de MAXWELL (32.4), (32.5) et se raccordant avec les précédents le long de S conformément aux hypothèses a et b, il faut que*

- 1) l'hypersurface S soit engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur,
- 2) les composantes π_λ^0 de la pression satisfassent sur S aux relations suivantes:

$$\pi_i^0 = 0 \quad \pi_0^0 = \tau_0^0 - \tau'_0{}^0$$

où $\tau'_0{}^0$ est calculé à partir des tenseurs $G'_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}$ et $H'_{\alpha\beta} - \frac{1}{\lambda} \Omega_{\alpha\beta}$.

Ces conditions sont suffisantes pour l'existence d'une solution locale du problème.

35. Prolongement de l'extérieur vers l'intérieur.

On se donne un ds^2 extérieur limité à une hypersurface S et correspondant à des champs gravitationnel et électromagnétique ($g_{\alpha\beta}$; $H'_{\alpha\beta}$, $G'_{\alpha\beta}$) relatifs à un schéma champ électromagnétique pur. On se propose comme problème de rechercher s'il existe un ds^2 intérieur correspondant à des champs gravitationnel et électromagnétique ($g_{\alpha\beta}$; $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$) relatifs à une distribution énergétique du type fluide chargé-champ électromagnétique et qui se raccorde avec le ds^2 extérieur donné le long de S suivant les hypothèses a et b du §34 précédent.

Par un calcul analogue à celui du paragraphe précédent, on déduit des conditions b) du §34 que sur S

$$u^0 = 0$$

$$-\pi_\lambda^0 + \tau_\lambda^0 = \tau'_\lambda{}^0.$$

L'hypersurface S est nécessairement engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur. Mais, nous sommes dans un cas exceptionnel où le problème de Cauchy n'est pas correctement posé. Ou bien il est impossible, ou bien il peut admettre plusieurs solutions.

On peut interpréter grosso-modo cette circonstance en disant que le champ extérieur donné peut ne pas être compatible avec une distribution effective d'énergie schématisée sous forme de fluide chargé-champ électromagnétique, sinon peut l'être avec plusieurs telles distributions.

59 Bd. Jourdan
Paris XIV

BIBLIOGRAPHIE

1. R. BECKER—Théorie des électrons (trad. Labin, Félix Alcan, Paris, 1938).
2. E. CARTAN—Sur les équations de la gravitation d'Einstein (Jour. Math., t. 1, 1922, p. 141–203).
3. G. DARMOIS—Les équations de la gravitation einsteinienne (Mémorial des Sc. Math., fasc. XXV, 1927).
4. A. LICHNEROWICZ—Problèmes globaux de Mécanique relativiste (Act. Sc. Ind. 833, Hermann, Paris, 1939).
5. A. LICHNEROWICZ—Sur les équations relativistes de l'électromagnétisme (An. Ec. Norm. Sup. 60, fasc. IV, 1943).
6. A. LICHNEROWICZ—Eléments de calcul tensoriel (A. Colin, Paris, 1950).
7. A. LICHNEROWICZ—Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (Masson, Paris, 1955).
8. PHAM MAU QUAN—Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques (Ann. di Math. pura ed appl., Série IV, t. XXXVIII, 1955).
9. PHAM MAU QUAN—Notes aux CR Ac. des Sc., t. 240, p. 598–600 et p. 733–735, (1955).