Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten

GÜNTER HELLWIG

Vorgelegt von L. BERS

1. *Einleitung*

Wir betrachten die allgemeinste lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir in der Form

$$(1.1) \quad \begin{aligned} L[u] &\equiv (Au_x)_x + (Bu_x)_y + (Bu_y)_x - (Cu_y)_y + (Pu)_x + (Qu)_y - Du \\ &= F \end{aligned}$$

schreiben können, in der rechten Halbebene $x \geq 0$. Dabei sind die Koeffizienten $A, B, \dots, F$ Funktionen von x, y . Als Anfangskurve $\mathfrak{f}$ wählen wir die y -Achse oder ein geeignetes Stück dieser Achse. Unser Problem besteht darin, geeignete Vorgaben auf der Anfangskurve $\mathfrak{f}$ zu finden, die so beschaffen sein sollen, dass das für (1.1) dadurch resultierende Anfangswertproblem

- 1.) eine Lösung $u(x, y)$ besitzt, die geeignete mit (1.1) verbundene Abschätzungen erfüllt;
- 2.) diese Lösung eindeutig ist und
- 3.) stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Den in 1.) geforderten Abschätzungen werden wir später einen präzisen Sinn beilegen.

Die *Charakteristiken* von (1.1) werden durch die Gleichung

$$(1.2) \quad A \, dy^2 - 2B \, dx \, dy - C \, dx^2 = 0,$$

die *charakteristischen Richtungen* durch

$$(1.3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{A} (B \pm K) = E^* \quad \text{mit} \quad K = +\sqrt{AC + B^2}$$

gegeben. Man nennt (1.1) in einem Punkt $P: (x, y)$ von *hyperbolischem Typus*, wenn dieser Punkt Träger genau zweier verschiedener, reeller charakteristischer Richtungen ist.

Als *wesentliche Voraussetzungen* für unser Anfangswertproblem erachten wir die folgenden:

- 1.) $L[u]$ ist für $x > 0$ von hyperbolischem Typus.
- 2.) Alle Abhängigkeitsgebiete sind endliche Gebiete.

Dies bedeutet: Legen wir durch den Punkt $P_0: (x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$ die zwei Charakteristiken $c_1: Z(x; x_0, y_0)$, $c_2: Y(x; x_0, y_0)$ (Y ist Lösung von $dy/dx = 1/A(B + K)$ durch P_0), so haben diese endliche Schnittpunkte P_1, P_2 mit $\mathfrak{f}$:

$$(1.4) \quad P_1: (0, y_1) = (0, Z(0; x_0, y_0)), \quad P_2: (0, y_2) = (0, Y(0; x_0, y_0)).$$

Das durch $c_1, c_2, \mathfrak{f}$ begrenzte abgeschlossene Gebiet $g(P_0)$ nennen wir das Abhängigkeitsgebiet bezüglich P_0 .

Es ist erlaubt, dass die Koeffizienten in (1.1) auf $\mathfrak{f}$ starke Singularitäten besitzen, dass etwa A, B, C auf $\mathfrak{f}$ gleichzeitig verschwinden, dass die Gleichung (1.1) auf $\mathfrak{f}$ von parabolischem Typus ist und daher $\mathfrak{f}$ entweder der Träger der charakteristischen Spitzen oder die Einhüllende der Charakteristiken ist.¹ Die dabei zu erwartenden Erscheinungen sind so mannigfaltig, dass es uns lohnend erscheint, sie in eine allgemeine Theorie einzuordnen. Insbesondere muss das Anfangswertproblem keineswegs des Cauchy-Problem sein. Wir betrachten die folgenden *Anfangswertprobleme*:

$$(A_1): \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = u_0(y), \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = u_1(y),$$

$$(A_2): \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = u_0(y), \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = 0,$$

$$(A_3): \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = u_0(y),$$

$$(A_4): \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = u_1(y),$$

$$(A_5): (A_1) \text{ mit } f(u_0, u_1) = 0.$$

Dabei ist (A_1) das klassische Cauchy-Problem, (A_3) dagegen ein Anfangswertproblem, welches in der klassischen Theorie nur bei rein parabolischen Gleichungen auftritt. (A_5) bedeutet, dass die Cauchyschen Anfangsdaten noch einer geeigneten Kopplung: $f(u_0, u_1) = 0$ unterworfen sind. (A_2) tritt z.B. bei der Euler-Poisson-Gleichung

¹Man sagt, $L[u]$ ist auf $\mathfrak{f}$ von parabolischem Typus, wenn die durch (1.3) gegebenen zwei charakteristischen Richtungen dy/dx zusammenfallen. $dy/dx = \pm \infty$ wird als existierend und eine Richtung gezählt. Man nennt dann $\mathfrak{f}$ Einhüllende der Charakteristiken, wenn $dy/dx = \pm \infty$ ist; in allen anderen Fällen nennt man $\mathfrak{f}$ Träger der charakteristischen Spitzen.

$$(1.5) \quad u_{xx} - u_{yy} + \frac{\lambda}{x} u_x = 0 \quad \text{mit } \lambda = \text{const.}$$

auf. Gleichzeitig zeigt (1.5), dass man den Lösungen unserer Anfangswertprobleme noch geeignete Abschätzungsforderungen auferlegen muss (Seite 395), da man andernfalls schon bei den einfachsten Beispielen mit nicht eindeutig bestimmten Lösungen rechnen muss. In der Tat, löst $u^{(\lambda)}(x, y)$ das Problem (A_2) für (1.5), so sind auch

$$(1.5a) \quad u(x, y) = u^{(\lambda)}(x, y) + cx^{1-\lambda}u^{(2-\lambda)}(x, y)$$

für $\lambda < 0$ Lösungen. Dabei ist $u^{(2-\lambda)}$ irgendeine Lösung von (1.5) mit dem Parameter $2 - \lambda$.

Wir wollen nun zunächst die bekannten Ergebnisse zusammenstellen ohne Rücksicht auf ihre zeitliche Reihenfolge. In [8]² haben wir die *selbstadjungierte Gleichung*

$$(1.6) \quad L[u] \equiv (Au_x)_x - (Cu_y)_y - Du = F$$

betrachtet unter den folgenden Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= x^a \{A_0(y) + x^a A_1(x, y)\}, & C &= x^c \{C_0(y) + x^c C_1(x, y)\} \\ D &= x^d D_0(x, y), & F &= x^f F_0(x, y).^3 \end{aligned}$$

$A_0, C_0; A_1, C_1$ zweimal stetig differenzierbar und $A_0 > 0, C_0 > 0; D, F; D_y, F_y$ stetig.

$$\begin{aligned} 2) \quad \alpha &> 0, & \gamma &> 0; & c - a &> -2, & d - a &> -2, & f - a &> -2; \\ & & c &> -1, & d &> -1, & f &> -1. \end{aligned}$$

Für unsere Anfangswertprobleme bestehen dann die vollständigen Fallunterscheidungen:

$$(A_1): \quad a = 0$$

$$(A_2): \quad c - a > -1, \quad d - a > -1, \quad f - a > -1$$

$$(A_3): \quad c - a > -2, \quad d - a > -2, \quad f - a > -2.^4$$

Der Spezialfall $a = 0, c \geq 0, f \geq 0$ mit $D = 0$ ist in [7] von W. HAACK und dem Verfasser behandelt worden. Man erkennt, dass die Korrektheit des Cauchy-Problems (Erfülltsein unserer Forderungen auf Seite 395) jedenfalls unabhängig von dem Verhalten des Koeffizienten $C(x, y)$ auf $\mathfrak{f}$ ist.⁵

²Durch [] wird auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit verwiesen.

³Man kann auch $A = x^a A_0(x, y), C = x^c C_0(x, y)$ mit $A_0 > 0, C_0 > 0$ voraussetzen.

⁴(A_4) ist ebenfalls in [8] betrachtet worden. Es kann jedoch nur auftreten, wenn man höhere Singularitäten für C und D zulässt.

⁵ C geht in die Differentialgleichungen der Charakteristiken ein.

Die letzte aber wichtige Bemerkung war wohlbekannt für die Gleichung

$$(1.7) \quad L[u] \equiv u_{xx} - (C(x)u_x)_x = 0^6$$

mit $C(x) > 0$ nicht abnehmend und stückweise stetig differenzierbar, $C(0) = 0$. Das Anfangswertproblem ist (A_1) wie L. BERS in [2] gezeigt hat.

Wir zeigen nun, dass die Betrachtung von selbstadjungierten Gleichungen (1.1) mit $P \equiv Q \equiv 0$ nicht ausreichend ist, um alle Erscheinungen aufzufinden. Die Angabe von Differenzierbarkeitseigenschaften werden wir im folgenden unterlassen.

I. S. BEREZIN [1] zeigte, dass für

$$(1.8) \quad L[u] \equiv u_{xx} - (x^c u_x)_x + u_x = 0, \quad c > 2$$

(A_1) nicht korrekt ist. Mit [8] wissen wir, dass die Nichtselbstadjungiertheit von (1.8) der Grund dafür sein muss. In [1] wird ferner

$$(1.9) \quad \begin{aligned} L[u] &\equiv u_{xx} - x^c C_0(x, y) u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

mit $C_0(x, y) > 0$ betrachtet. Das Ergebnis ist:

$$(1.10) \quad (A_1) \text{ wenn } 0 \leq c < 2.$$

Kürzlich hat M. H. PROTTER [10] das Ergebnis (1.10) verschärft:

$$(1.11) \quad (A_1) \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-c/2} b(x, y) = 0$$

ist. Er zeigt, dass x^c in (1.9) durch $K(x)$ ersetzt werden kann, wo $K(x)$ eine monoton wachsende Funktion mit $K(0) = 0$ ist. (1.11) wird dann:

$$(1.12) \quad (A_1) \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x b(x, y)}{\sqrt{K(x)}} = 0.$$

Alle diese Kriterien versagen, wenn man etwa den Fall $c = 2$ in (1.9) mit $\lim_{x \rightarrow 0} b(x, y) \neq 0$ diskutieren will.

Ferner erwähnen wir die Arbeiten von R. CONTE [3], F. I. FRANKL [6], P. GERMAIN & R. BADER [12].

Das Ziel unserer Arbeit wird eine allgemeine Theorie für unsere fünf Anfangswertprobleme sein. Dabei werden wir annehmen, dass die Koeffizienten in (1.1) in der Form

$$(1.13) \quad A = x^a A_0(x, y), \dots, F = x^f F_0(x, y)$$

oder in einer ähnlichen Form geschrieben werden können, wobei die Funktionen $A_0, \dots, F_0$ ohne Singularitäten sind. Man könnte vermuten, dass für das

⁶Wir vertauschen in den folgenden Gleichungen gegenüber der Literatur die Variablen x und y .

Vorliegen unserer Anfangswertprobleme allein das Potenzverhalten der Koeffizienten massgebend sein wird.

Betrachtet man (1.5) mit $\lambda = -1$, so ist wohlbekannt (A. WEINSTEIN [11], J. B. DIAZ & H. F. WEINBERGER [5]), dass die Lösung des Problems (A_2) oder ihre Ableitungen auf $\mathfrak{f}$ logarithmische Singularitäten haben, wenn nicht $u''_0 = 0$ ist. Eine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten kann also im allgemeinen für $\lambda = -1$ auch dann nicht vorliegen, wenn man durch zusätzliche Abschätzungsforderungen die Lösung eindeutig zu machen versucht.

Damit ist gezeigt, dass im allgemeinen das Potenzverhalten der Koeffizienten nicht ausreicht, um die Anfangswertprobleme zu klassifizieren. Für alle Probleme, wo allein das Potenzverhalten ausreicht, werden wir vollständige Fallunterscheidungen im Abschnitt 2 angeben. Deshalb wird es genügen in der Einleitung zwei Beispiele des anderen Typus anzugeben:

$$(1.14) \quad L[u] \equiv u_{xx} - u_{yy} + \frac{\alpha(x, y)}{x} u_x + \beta(x, y) u_y + \gamma(x, y) u = f(x, y)$$

Ergebnis: (A_2) für $\alpha(0, y) > -1$.

$$(1.15) \quad L[u] \equiv u_{xx} - x^2 u_{yy} + \alpha(x, y) u_x + \beta(x, y) u_y + \gamma(x, y) u = f(x, y)$$

Ergebnis: (A_1) für $|\beta(0, y)| < 2$.

Während das erste Ergebnis in unserem Sinne das bestmögliche ist, lässt sich über die Güte des zweiten Ergebnisses keine Aussage machen, da Vergleiche mit bekannten Ergebnissen fehlen. (1.15) enthält das Berezin-Beispiel (1.8) für $c = 2$.

2. Voraussetzungen über die Koeffizienten; Resultate

Wir betrachten die Differentialgleichung (1.1) in dem Rechteck

$$(2.1) \quad \mathbf{r}: 0 \leq x \leq r \quad \text{mit} \quad 0 < r \leq 1, \quad s_0 \leq y \leq s_1.$$

Als Anfangskurve wählen wir das Geradenstück

$$(2.2) \quad \mathfrak{f}: x = 0, \quad s_0 \leq y \leq s_1.$$

Bezeichnungen: (a) $\mathbf{r} - \mathfrak{f}$ bezeichnet die Punktmenge $0 < x \leq r, s_0 \leq y \leq s_1$; $\mathbf{r} - \mathfrak{f}$ bezeichnet $0 < \epsilon \leq x \leq r, s_0 \leq y \leq s_1$. (b) Teilrechtecke $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}$ sind $0 \leq x \leq r' \leq r, s_0 \leq s'_0 \leq y \leq s'_1 \leq s_1$. (c) ϕ, ψ seien in $\mathbf{r}'$ stetige Funktionen. Hat ψ die Eigenschaft: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $r'_\epsilon: 0 \leq x \leq \delta(\epsilon), s'_0 \leq y \leq s'_1$, so dass $|\psi| < \epsilon$ ist in $\mathbf{r}'_\epsilon$, so schreiben wir für $\phi + \psi$ einfach $||\phi||$.

Voraussetzungen (I) über die Koeffizienten in (1.1):

(a) In r ist $A(x, y) = x^a A_0(x, y)$, $B = x^b B_0(x, y)$, $C = x^c C_0(x, y)$, $P = x^p P_0(x, y)$, $Q = x^q Q_0(x, y)$. Dabei ist $A_0 > 0$, d.h. $0 < \mathfrak{A}_0 \leq A_0(x, y) \leq \mathfrak{A}_1$.⁷ $A_0, \dots, Q_0$ sind stetig differenzierbare Funktionen, $A_{0xy}, A_{0yy}, B_{0xy}, B_{0yy}, C_{0xy}, C_{0yy}, P_{0xy}, Q_{0yy}$ sind stetig.

(b) $a, b, \dots, q$ sind reelle Zahlen, die den Ungleichungen genügen:

$$(I) \quad \text{Ist } 2b > a + c: \quad c - a > -2, \quad p - a \geq -1, \quad q - \frac{a + c}{2} \geq -1.$$

$$(II) \quad \text{Ist } 2b < a + c: \quad b - a > -1, \quad p - a \geq -1, \quad q - b \geq -1.$$

$$(III) \quad \text{Ist } 2b = a + c: \quad b - a > -1, \quad p - a \geq -1, \quad q - b \geq -1.$$

In (I) fordern wir $\mathfrak{C}_0 \leq C_0(x, y) \leq \mathfrak{C}_1$, in (II) $\mathfrak{B}_0 \leq |B_0| \leq \mathfrak{B}_1$, in (III) $\mathfrak{M}_0 \leq \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2} \leq \mathfrak{M}_1$.

(c) $D = x^d D_0(x, y)$, $F = x^f F_0(x, y)$ mit D_0, D_{0y}, F_0, F_{0y} stetig und $d - a \geq -2, f - a \geq -2$.

(d) $u_0(y), u_1(y)$ sind in $s_0 \leq y \leq s_1$ willkürliche, dreimal stetig differenzierbare Funktionen.

Bemerkungen: Wir sind an dieser Stelle noch nicht in der Lage, die wirkliche Bedeutung aller geforderten Ungleichungen zu verstehen.

Zu (a): Die Annahme $A_0 > 0$ liegt an der speziellen Wahl unserer Anfangskurve. Ist $A_0 \equiv 0$, so ist $x = \text{const.}$ stets Charakteristik und die in der Einleitung geforderte Konstruktion endlicher Abhängigkeitsgebiete ist nicht möglich.

Zu (b): Ist $B_0 \equiv 0$ bzw. $C_0 \equiv 0$, so zählen diese Fälle stets zu (I) bzw. (II). Die Ungleichungen $c - a > -2, b - a > -1$ sind wesentlich, wie die Beispiele

$$(x^2 u_x)_x - u_{yy} = 0, \quad (xu_x)_x + 2u_{xy} = 0$$

zeigen, bei denen keine endlichen Abhängigkeitsgebiete vorhanden sind. In den Fällen (I), (II), (III) folgt stets $q - a > -2$.

Für die Anwendungen ist es wichtig zu bemerken, dass an Stelle von Voraussetzung (a) auch andere Voraussetzungen treten können, die nur so beschaffen sein müssen, dass sie die in Abschnitt 3 gegebenen Abschätzungen ebenfalls erfüllen. Als wichtiges Beispiel erwähnen wir die Voraussetzung⁸

$$\begin{aligned} (a_1): \quad \text{In } r \text{ ist } \quad A &= x^a \{A_0(y) + x^a A_1(x, y)\}, \\ B &= x^b \{B_0(y) + x^b B_1(x, y)\}, \quad C = x^c \{C_0(y) + x^c C_1(x, y)\}, \\ P &= x^p \{P_0(y) + x^p P_1(x, y)\}, \quad Q = x^q \{Q_0(y) + x^q Q_1(x, y)\}. \end{aligned}$$

⁷Grosse Frakturbuchstaben bezeichnen stets geeignete positive Zahlen.

⁸Solche Voraussetzungen werden nahe gelegt, wenn man etwa auf $A(x, y)$ formal die Taylorsche Formal anwendet:

$$A(x, y) = \frac{x^a}{a!} A^{(a)}(0, y) + \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} A^{(a+1)}(\vartheta x, y), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \eta$ reelle positive Zahlen. Es ist $A_0 > 0$ und $A_0, B_0, \dots, Q_0$ sind zweimal stetig differenzierbar. $A_1, B_1, \dots, Q_1$ haben dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie die $A_0, \dots, Q_0$ in (a).

(b₁): Die Ungleichungen bleiben erhalten. Ebenso die Abschätzungen für B_0, C_0 .

Wir bemerken, dass mit diesen Voraussetzungen $(A_0 + x^\alpha A_1)_x$ im allgemeinen nicht stetig auf $\mathfrak{f}$ sein wird.

Wir entwickeln zunächst die Methode [7], wobei alle Umformungen zunächst rein formaler Natur sind, da auf $\mathfrak{f}$ die Koeffizienten in (1.1) hohe Singularitäten haben mögen. Wir werden die entsprechenden Abschätzungen in Abschnitt 3 geben.

Die reduzierten Anfangswertprobleme: Setzen wir

$$(2.3) \quad U(x, y) = \begin{cases} u(x, y) - xu_1(y) - u_0(y) & \text{bei } (A_1), (A_5) \\ u(x, y) - u_0(y) & \text{bei } (A_2), (A_3) \\ u(x, y) - xu_1(y) & \text{bei } (A_4), \end{cases}$$

so hat U der Differentialgleichung

$$(2.4) \quad L[U] \equiv (AU_x)_x + (BU_x)_y + (BU_y)_x - (CU_y)_y \\ + (PU)_x + (QU)_y - DU = G$$

mit den Anfangswerten

$$(2.5) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} U(x, y) = 0, & \lim_{x \rightarrow 0} U_x(x, y) = 0 & \text{bei } (A_1), (A_2), (A_4), (A_5) \\ \lim_{x \rightarrow 0} U(x, y) = 0 & & \text{bei } (A_3) \end{cases}$$

zu genügen. Mit (2.4) und (1.1) hat man

$$(2.6) \quad G = \begin{cases} F - L[xu_1] - L[u_0] & \text{bei } (A_1), (A_5), \\ F - L[u_0] & \text{bei } (A_2), (A_3), \\ F - L[xu_1] & \text{bei } (A_4). \end{cases}$$

Explizit ausgeschrieben ergibt sich

$$(2.7) \quad G = \begin{cases} G_0 + G_1 + G_2 \\ G_0 + G_2 \\ G_1 + G_2 \end{cases}$$

mit

$$(2.8) \quad \begin{cases} G_0 = (-P_x - Q_y + D)u_0 + (-B_x + C_y - Q)u'_0 + Cu''_0 \\ G_1 = (-A_x - B_y - P - xP_x - xQ_y + xD)u_1 \\ \quad \quad \quad + (-2B - xB_x + xC_y - xQ)u'_1 \\ G_2 = F. \end{cases}$$

Die singuläre Funktionalrelation: Sei $P_0 \in r'$ ein willkürlicher Punkt und $g(P_0) \in r$ das dazugehörige Abhängigkeitsgebiet. Mit (2.4) wird

$$(2.9) \quad \iint_{g(P_0)} L[U] dx dy \equiv \oint_{b(g)} (AU_x + BU_y) dy + (CU_y - BU_x) dx \\ + \iint_{g(P_0)} \{(PU)_x + (QU)_y - DU\} dx dy = \iint_{g(P_0)} G dx dy,$$

bei formaler Anwendung des Gausszischen Satzes. $b(g)$ bezeichnet den Rand von g . Beachten wir (1.3) und benutzen die Abkürzungen

$$(2.10) \quad L^+ = K_x + K_y E^+ + Q - PE^+, \quad L^- = K_x + K_y E^- - Q + PE^-,$$

so erhalten wir für (2.9)

$$(2.11) \quad U(P_0) = \frac{1}{2K(P_0)} \left\{ KU|_{P_1} + KU|_{P_2} + \int_{P_1}^{P_0} UL^- dx + \int_{P_2}^{P_0} UL^+ dx \right. \\ \left. + \int_{P_1}^{P_2} (PU + AU_x + BU_y) dy + \iint_{g(P_0)} (DU + G) dx dy \right\}.$$

Die Funktionalgleichung (mit (1.4) voll ausgeschrieben)

$$(2.12) \quad U(x_0, y_0) = \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \left\{ \int_0^{x_0} U(x, Z(x; x_0, y_0)) L^-(x, Z(x; x_0, y_0)) dx \right. \\ + \int_0^{x_0} U(x, Y(x; x_0, y_0)) L^+(x, Y(x; x_0, y_0)) dx \\ \left. + \int_0^{x_0} \int_{Y(x; x_0, y_0)}^{Z(x; x_0, y_0)} D(x, y) U(x, y) dx dy + H(x_0, y_0) \right\}$$

mit $H = \iint_{g(P_0)} G dx dy$ ist mit (2.11) *äquivalent*, wenn die Relationen

$$(2.13) \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} KU = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} (PU + AU_x + BU_y) = 0$$

bestehen. Mit unseren Voraussetzungen bestehen jedenfalls die Abschätzungen

$$(2.14) \quad |G(x, y)| \leq \mathfrak{G}x^g, \quad \mathfrak{K}x^k \leq K(x, y) \leq \mathfrak{K}_1 x^k, \quad |H(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{H}x_0^h$$

mit geeigneten Potenzen. Beachte, dass g, h von der Wahl des Anfangswert-

problems abhängen. Wir denken uns für g, h, k die kleinstmöglichen solchen Potenzen geschrieben.

Definition 2.1: $U(x_0, y_0)$ wird „schwache Lösung“ unserer reduzierten Anfangswertprobleme genannt, wenn

- 1) a) bei $(A_1), (A_2), (A_4), (A_5)U, U_{x_0}, U_{y_0}$ in r' stetig sind,
 b) bei $(A_3)U, U_{y_0}$ in r' und U_{x_0} in $r' - \mathfrak{f}$ stetig sind.
- 2) Die Relation (2.9) für jedes $g(P_0)$ erfüllt ist.
- 3) $|U| \leq \mathfrak{U}_0^{h-k}, |U_{x_0}| \leq \mathfrak{U}_1 x_0^{h-k-1}, |U_{y_0}| \leq \mathfrak{U}_2 x_0^{h-k}$.
- 4) U eindeutig ist und U die entsprechenden Anfangswerte Null im Sinne zweidimensionaler Konvergenz annimmt.

Das durch (2.3) bestimmte $u(x_0, y_0)$ nennen wir dann eine schwache Lösung der Probleme $(A_1), \dots, (A_5)$. Es hat die Eigenschaften:

- 1) a) u, u_{x_0}, u_{y_0} stetig im r' bei $(A_1), (A_2), (A_4), (A_5)$,
 b) u, u_{y_0} in r', u_{x_0} in $r' - \mathfrak{f}$ stetig bei (A_3) .
- 2) Die Relation

$$(2.15) \quad \oint_{\mathfrak{g}(P_0)} (Au_x + Bu_y) dy + (Cu_y + Bu_x) dx + \iint_{\mathfrak{g}(P_0)} \{(Pu)_x + (Qu)_y - Du\} dx dy = \iint_{\mathfrak{g}(P_0)} F dx dy$$

ist für jedes $g(P_0)$ erfüllt.

- 3) u erfüllt die durch (2.3) und Def. 2.1. bestimmten Abschätzungen.
- 4) u ist eindeutig bestimmt, hängt stetig von Anfangsdaten ab und nimmt die Anfangsdaten im Sinne zweidimensionaler Konvergenz an.⁹

Diese schwachen Lösungen erweisen sich als Lösungen im üblichen Sinne, wenn man nachweist, dass auch die zweiten Ableitungen vorhanden sind.

Vollständige Fallunterscheidungen: Solche können nur für eine eingeschränkte Klasse von Problemen gegeben werden, bei denen das Vorliegen eines der Anfangswertprobleme nur von dem Potenzverhalten der Koeffizienten abhängt. Wir fordern daher für die in den Voraussetzungen (Seite 400) auftretenden Potenzen:

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} b \geq 0, \quad c > -1, \quad p \geq 0, \quad q > -1, \quad d > -1, \quad f > -1, \\ \quad \quad \quad d - a > -2, \quad f - a > -2, \\ \text{In (I) } (2b > a + c): c - a > -2, p - a > -1, q - \frac{a+c}{2} > -1, \\ \text{In (II), (III) } (2b \leq a + c): b - a > -1, p - a > -1, q - b > -1. \end{array} \right.$$

⁹Es folgt $\lim_{x_0 \rightarrow 0} u_{y_0}(x_0, y_0) = d/dy_0 u_0(y_0)$ bei $(A_1), (A_2), (A_3), (A_5)$.

Man hat dann:

$$(A_1): a = 0$$

$$(2.17) \quad (A_2): a \neq 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{(I): } c - a > -1, p - a > 0, q - a > -1 \\ \text{(II): } b - a > 0, \quad p - a > 0, q - a > -1 \end{array} \right\}, \begin{array}{l} d - a > -1, \\ f - a > -1. \end{array}$$

$$(A_3): a \neq 0.$$

Dabei ist stets vorausgesetzt, dass nicht alle Ungleichungen des vorangegangenen Falles erfüllt sind. Für (A_4) geben wir gesonderte Bedingungen an:

$$(2.18) \quad (A_4): \left\{ \begin{array}{l} a = 0, \quad b > -1, \quad c > -2, \quad p > -1, \quad q > -2, \quad q - \frac{c}{2} > -1, \\ d > -2, \quad f > -1 \\ \text{In (I): } c + g > -2, \quad \text{in (II), (III): } 2b + g > -2. \end{array} \right.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass nicht alle Ungleichungen von (A_1) erfüllt sind. g ist durch (2.16) eindeutig bestimmt.

3. Das charakteristische Netz

Für unsere Theorie ist es nötig, zunächst das charakteristische Netz und damit verbundene Größen zu untersuchen. Unsere Untersuchungen finden stets in r oder geeigneten Teilrechtecken r' statt, die von Schritt zu Schritt andere sein können ohne dass wir die Bezeichnung ändern.

Setzen wir $K = +\sqrt{AC + B^2}$, so finden wir in den drei Fällen (I), (II), (III) unserer Voraussetzungen

$$(3.1) \quad K(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(I): } x^{(a+c)/2} \sqrt{A_0 C_0 + x^{2b-(a+c)} B_0^2} = x^{(a+c)/2} ||\sqrt{A_0 C_0}||, \\ \text{(II): } x^b \sqrt{x^{a+c-2b} A_0 C_0 + B_0^2} = x^b |||B_0|||, \\ \text{(III): } x^b \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2}. \end{array} \right.$$

Dies ergibt die Abschätzung

$$(3.2) \quad \Re x^k \leq K(x, y) \leq \Re_1 x^k,$$

$$(3.3) \quad k = \begin{cases} \frac{a+c}{2} \\ b \\ b \end{cases}, \quad \Re = \begin{cases} ||\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}|| \\ ||\mathfrak{B}_0|| \\ \mathfrak{M}_0 \end{cases}, \quad \Re_1 = \begin{cases} ||\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}||^{10} \\ ||\mathfrak{B}_1|| \\ \mathfrak{M}_1 \end{cases}.$$

¹⁰Man beachte, dass man in dem schmalen Rechteck r_δ für $||\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}||$ etwa $\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1} + \epsilon_1$ und für $||\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}||$ etwa $\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0} - \epsilon_0$ setzen kann.

Die *charakteristischen Richtungen* unserer Differentialgleichung (1.1) werden durch

$$(3.4) \quad y' = E^+(x, y) = \frac{1}{A} (B + K), \quad y' = E^-(x, y) = \frac{1}{A} (B - K)$$

gegeben. Man erkennt, dass (1.1) jedenfalls in $r' - f$ hyperbolisch ist, was man sofort aus $K > 0$ entnehmen kann. Man findet

$$(3.5) \quad E^*(x, y) = \begin{cases} \text{(I): } x^{b-a} \frac{B_0}{A_0} \pm x^{(c-a)/2} \left\| \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} \right\| = \pm x^{(c-a)/2} \left\| \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} \right\|, \\ \text{(II): } x^{b-a} \frac{B_0}{A_0} \pm x^{b-a} \left\| \frac{B_0}{A_0} \right\| = x^{b-a} \left\| \frac{B_0}{A_0} \pm \frac{B_0}{A_0} \right\|, \\ \text{(III): } x^{b-a} \frac{1}{A_0} (B_0 \pm \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2}). \end{cases}$$

Hieraus entnimmt man mit den in der Einleitung gegebenen Definitionen, dass (1.1) auch auf f von *hyperbolischem Typus* ist, wenn in (I) $c = a$, in (II), (III) $b = a$ ist.¹¹ f ist *parabolische Anfangskurve und Träger der charakteristischen Spitzen* wenn in (I) $c > a$ in (II), (III) $b > a$ ist. f ist *parabolische Anfangskurve und Einhüllende der Charakteristiken*, wenn in (I) $c < a$ in (II), (III) $b < a$ ist. Aus (3.5) folgen die Abschätzungen

$$(3.6) \quad |E^*(x, y)| \leq \mathfrak{E}x^e$$

mit

$$(3.7) \quad e = \begin{cases} \frac{c-a}{2} \\ b-a \\ b-a \end{cases} \quad \text{und} \quad e > -1, \quad \mathfrak{E} = \begin{cases} \left\| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} \right\| \\ 2 \left\| \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_0} \right\| \\ \frac{1}{\mathfrak{A}_0} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{M}_1). \end{cases}$$

Durch Differentiation bestätigt man

$$(3.8) \quad |E_v^*(x, y)| \leq \mathfrak{E}_1 x^e.$$

Mit dem Satz von CARATHÉODORY-KAMKE [9] findet man durch jeden Punkt $P_0 : (x_0, y_0) \in r'$ genau eine Lösung $y = Y(x; x_0, y_0)$, $y = Z(x; x_0, y_0)$ jeder

¹¹Beachte, dass die klassische Definition $c = a = 0$ bzw. $b = a = 0$ verlangen würde.

der beiden Differentialgleichungen (3.4), die in r' stetig sind und die Relationen

$$(3.9) \quad Y = y_0 - \int_x^{x_0} E^+(\xi, Y(\xi; x_0, y_0)) d\xi, \quad Z = y_0 - \int_x^{x_0} E^-(\xi, Z(\xi; x_0, y_0)) d\xi$$

erfüllen. In $r' - \mathfrak{k}$ sind sie stetig differenzierbar und erfüllen die Differentialgleichungen (3.4). Wir betrachten *ferner* Y, Z nur für $0 \leq x \leq x_0$ und erhalten mit (3.6)

$$(3.10) \quad y_0 - \frac{\mathfrak{E}x_0^{\epsilon+1}}{e+1} \leq \frac{Y(x; x_0, y_0)}{Z(x; x_0, y_0)} \leq y_0 + \frac{\mathfrak{E}x_0^{\epsilon+1}}{e+1}$$

und damit

$$(3.11) \quad |Z(x; x_0, y_0) - Y(x; x_0, y_0)| \leq \frac{2\mathfrak{E}x_0^{\epsilon+1}}{e+1}.$$

Man entnimmt aus (3.10), dass das durch Y, Z und $\mathfrak{k}$ erzeugte Abhängigkeitsgebiet $g(P_0)$ jedenfalls in r liegt, falls man den willkürlichen Punkt P_0 in einem geeigneten r' variieren lässt.

Aus (3.9) folgt

$$(3.12) \quad Y_{v_0} = 1 - \int_x^{x_0} E_v^+(\xi, Y(\xi; x_0, y_0)) Y_{v_0}(\xi; x_0, y_0) d\xi,$$

$$(3.13) \quad Y_{x_0} = -E^+(x_0, y_0) - \int_x^{x_0} E_v^+(\xi, Y(\xi; x_0, y_0)) Y_{x_0}(\xi; x_0, y_0) d\xi.$$

Wie im [8] folgt

$$(3.14) \quad |Y_{v_0}(x; x_0, y_0)|, \quad |Z_{v_0}(x; x_0, y_0)| \leq \mathfrak{Y} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Y} = ||1||.$$

Aus den bestehenden Relationen

$$(3.15) \quad Y_{x_0} + E^+(x_0, y_0) Y_{v_0} = 0, \quad Z_{x_0} + E^-(x_0, y_0) Z_{v_0} = 0$$

erschliesst man nun

$$(3.16) \quad |Y_{x_0}(x; x_0, y_0)|, |Z_{x_0}(x; x_0, y_0)| \leq \mathfrak{Z}x_0^\epsilon$$

und mit (3.12) folgt leicht

$$(3.17) \quad |Z_{v_0}(x; x_0, y_0) - Y_{v_0}(x; x_0, y_0)| \leq \frac{2\mathfrak{E}\mathfrak{Y}x_0^{\epsilon+1}}{e+1}.$$

Ist $G(x, y)$ eine in $r - \mathfrak{k}$ stetige Funktion, die in r einer Abschätzung der Form $|G(x, y)| \leq \mathfrak{G}x^g$ mit $g > -1$ genügt, so hat man für

$$(3.18) \quad H(x_0, y_0) \equiv \iint_{g(P_0)} G(x, y) dx dy \equiv \int_0^{x_0} \int_{Y(x; x_0, y_0)}^{Z(x; x_0, y_0)} G(x, y) dx dy$$

die Abschätzungen

$$(3.19) \quad |H(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{S} x_0^h \quad \text{mit} \quad \mathfrak{S} = \frac{2\mathfrak{E}\mathfrak{G}}{(e+1)(g+1)}, \quad h = e + g + 2,$$

$$(3.20) \quad |H_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \int_0^{x_0} |G(x, Z)Z_{x_0} - G(x, Y)Y_{x_0}| dx \leq \mathfrak{S}_1 x_0^{h-1},$$

$$(3.21) \quad |H_{y_0}(x_0, y_0)| \leq \int_0^{x_0} |G(x, Z)Z_{y_0} - G(x, Y)Y_{y_0}| dx \leq \mathfrak{S}_2 x_0^{g+1}$$

mit

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{2\mathfrak{G}\mathfrak{B}}{e+1}, \quad \mathfrak{S}_2 = \frac{2\mathfrak{G}\mathfrak{Y}}{g+1}.$$

Ist jedoch überdies $G_y(x, y)$ in $r - \mathfrak{f}$ stetig und $|G_y(x, y)| \leq \mathfrak{G}x^g$ in r , so hat man für (3.21) die schärfere Abschätzung durch Anwendung des Mittelwertsatzes

$$(3.22) \quad |H_{y_0}(x_0, y_0)| \leq \int_0^{x_0} \{|G(x, Z)| |Z_{y_0} - Y_{y_0}| \\ + |G_y(x, \bar{y})| |Z - Y| |Z_{y_0}|\} dx \\ \leq \mathfrak{S}_2 x_0^h$$

mit

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{2\mathfrak{G}\mathfrak{Y}}{(e+1)(g+1)} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1).$$

Damit sind die Abschätzungen für das charakteristische Netz beendet. Man beachte, dass jede Abschätzung bezüglich der x -Potenz die bestmögliche ist.

Für die Grössen $L^*(x, y)$ (2.10) findet man

$$(3.23) \quad L^*(x, y) = \begin{cases} \text{(I)} & x^{(a+c)/2-1} \left\| \frac{a+c}{2} \sqrt{A_0 C_0} \pm x^{a+1-(a+c)/2} Q_0 - x^{p+1-a} \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} P_0 \right\| \\ \text{(II)} & x^{b-1} \left\| b |B_0| \pm x^{a+1-b} Q_0 \mp x^{p+1-a} (B_0 + |B_0|) \frac{P_0}{A_0} \right\| \\ \text{(III)} & x^{b-1} \left\| b \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2} \pm x^{a+1-b} Q_0 \right. \\ & \left. \mp x^{p+1-a} (B_0 \pm \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2}) \frac{P_0}{A_0} \right\|. \end{cases}$$

Damit findet man

$$(3.24) \quad |L^*(x, y)| \leq \mathfrak{L}x^l \quad \text{mit} \quad l = k - 1.$$

Jedoch muss $\mathfrak{L}$ näher charakterisiert werden. Sind in Voraussetzung (b) in den Ungleichungen die Gleichheitszeichen ausgeschlossen, so wird

$$(3.25) \quad \mathfrak{L} = \begin{cases} \text{(I)} & \left\| \frac{|a+c|}{2} \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1} \right\| \\ \text{(II)} & || |b| \mathfrak{B}_1 || \\ \text{(III)} & || |b| \mathfrak{M}_1 ||. \end{cases}$$

Bestehen jedoch nur die Gleichheitszeichen¹², so wird

$$(3.26) \quad \mathfrak{L} = \begin{cases} \text{(I)} & \left\| \text{Max} \left| \frac{a+c}{2} \sqrt{A_0 C_0} \pm Q_0 - \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} P_0 \right| \right\| \\ \text{(II)} & \left\| \text{Max} \left| b |B_0| \pm Q_0 \mp (B_0 + |B_0|) \frac{P_0}{A_0} \right| \right\| \\ \text{(III)} & \left\| \text{Max} \left| b \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2} \pm Q_0 \mp (B_0 \pm \sqrt{A_0 C_0 + B_0^2}) \frac{P_0}{A_0} \right| \right\|. \end{cases}$$

Mit etwas mühevoller Zwischenrechnung findet man schliesslich

$$(3.27) \quad |L_v^*(x, y)| \leq \mathfrak{L}_1 x^l.$$

Auch diese Abschätzungen sind bezüglich der Potenzen die bestmöglichen.

4. Existenzbeweis

Unter unseren Voraussetzungen (Seite 400) geben wir hier einen Existenzsatz für schwache Lösungen unserer Anfangswertprobleme. Es werden sämtliche Abschätzungen des 3. Abschnittes benötigt. Mit (2.7) findet man

$$(4.1) \quad |G(x, y)|, \quad |G_v(x, y)| \leq \mathfrak{G}x^s,$$

¹²D. h. etwa für (I): $p - a = -1$, $q - \frac{a+c}{2} = -1$.

wobei g als die kleinstmögliche Potenz eindeutig bestimmt ist. Ferner hat man mit Abschnitt 3

$$(4.2) \quad h - k = e + g + 2 - k = \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \frac{c-a}{2} + g + 2 - \frac{a+c}{2} \\ \text{(II), (III)} b - a + g + 2 - b \end{array} \right\} = g - a + 2,$$

$$(4.3) \quad \eta = d + e - k + 2 = d - a + 2 \geq 0.$$

Mit Voraussetzung (c) wird

$$(4.4) \quad |D(x, y)| \leq \mathfrak{D}x^d \quad \text{mit} \quad d - a \geq -2.$$

In dem folgenden Existenzsatz denken wir uns ein geeignetes $\mathfrak{r}'$ zugrunde gelegt.

Satz 4.1:

Voraussetzungen: $g > -1$, $h - k > 0^{13}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{R}h < 1$ wenn $\eta > 0$ und

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}(e+1)(d+h-k+1)} < 1$$

wenn $\eta = 0$ ist.

Behauptung: a) Die Funktionalgleichung (2.12) hat eine Lösung $U(x_0, y_0)$ mit U, U_{ν_0} in $\mathfrak{r}'$, U_{x_0} in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ stetig und $\lim_{x_0 \rightarrow 0} U(x_0, y_0) = 0$. Es bestehen die Abschätzungen

$$(4.5) \quad \begin{aligned} |U(x_0, y_0)| &\leq \mathfrak{U}x_0^{h-k}, & |U_{x_0}(x_0, y_0)| &\leq \mathfrak{U}_1x_0^{h-k-1}, \\ |U_{\nu_0}(x_0, y_0)| &\leq \mathfrak{U}_2x_0^{h-k}. \end{aligned}$$

b) Diese Lösung erfüllt die Relationen (2.13) und ist somit Lösung von (2.11).

c) Es gibt genau eine Lösung, die den Abschätzungen (4.5) Genüge leistet.

d) Es ist stets

$$|E[U]| \equiv \left| \iint_{\mathfrak{s}(P_0)} AU_x^2 + 2BU_xU_{\nu} - CU_{\nu}^2 - DU^2 - FU \, dx \, dy \right| < \infty. \quad ^{14}$$

¹³Die Vor. $h - k > 0$ ist auch notwendig für Lösungen mit $\lim_{x_0 \rightarrow 0} U = 0$, denn es muss

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{K(x_0, y_0)} \iint_{\mathfrak{s}(P_0)} G(x, y) \, dx \, dy = 0$$

sein.

¹⁴Die selbstadjungierte Gl. (1.1) (mit $P = Q = 0$) ist die Eulersche Gleichung des nicht positiv definiten Variationsausdruckes $E[U]$.

e) Ist überdies $h - k - 1 \geq 0$, so ist U_{x_0} in r' stetig und für $h - k - 1 > 0$ gilt $\lim_{x_0 \rightarrow 0} U_{x_0}(x_0, y_0) = 0$.¹⁵

Beweis: (a) Man hat mit (3.7) $e + 1 > 0$ mit (4.2), (4.4) $d + h - k + 1 = (d - a + 2) + (g + 1) > 0$.

1. Schritt: Mit (2.12) benutzen wir das Iterationsverfahren (in abgekürzter Schreibweise)

$$(4.6) \quad U^n = \frac{1}{2K} \left\{ \int_0^{x_0} (U^{n-1}L^- + U^{n-1}L^+) dx + \iint DU^{n-1} dx dy + H \right\}$$

mit $U^0 = 0$. Ist r' die Breite unseres Rechtecks r' , so ist

$$(4.7) \quad \mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}(r')^\eta}{\mathfrak{R}(e+1)(d+h-k+1)} < 1.$$

In der Tat, ist $\eta = 0$, so folgt dies aus den Voraussetzungen.

Ist $\eta > 0$, so ist $\mathfrak{T} = \|\mathfrak{L}/\mathfrak{R}h\|$ und durch eventuelle Verkleinerung von r' kann wieder $\mathfrak{T} < 1$ erreicht werden.

Jedes durch (4.6) erzeugte $U^n(x_0, y_0)$ ist stetig, und es ist

$$(4.8) \quad |U^n(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{S}}{2\mathfrak{R}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{T}^\nu x_0^{h-k} < \frac{\mathfrak{S}}{2\mathfrak{R}} \frac{1}{1-\mathfrak{T}} x_0^{h-k}.$$

Man bestätigt dies durch Induktion. Zunächst findet man mit (3.19), (4.2), (4.3)

$$(4.9) \quad \iint |DU^n| dx dy \leq \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}(e+1)(d+h-k+1)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{T}^\nu x_0^{h+\eta}.$$

Schliesslich folgt mit (3.24)

$$(4.10) \quad |U^{n+1}(x_0, y_0)| \leq \frac{1}{2\mathfrak{R}x_0^k} \left\{ \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}h} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{T}^\nu x_0^h + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}(e+1)(d+h-k+1)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{T}^\nu x_0^{h+\eta} + \mathfrak{S}x_0^h \right\} \leq \frac{\mathfrak{S}}{2\mathfrak{R}} \sum_{\nu=0}^n \mathfrak{T}^\nu x_0^{h-k}.$$

Durch $U = \sum_{\nu=1}^{\infty} (U^\nu - U^{\nu-1})$ wird eine Grenzfunktion erklärt. Man findet analog wie oben durch Induktion

$$(4.11) \quad |U^\nu(x_0, y_0) - U^{\nu-1}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{S}}{2\mathfrak{R}} \mathfrak{T}^{\nu-1} x_0^{h-k}.$$

Damit ist die Summe gleichmässig konvergent, $U(x_0, y_0)$ also stetig. Der Grenzübergang darf in (4.6) auch unter dem Integral durchgeführt werden,

¹⁵Analoges wie in ¹³.

denn es ist etwa

$$(4.12) \quad \left| \frac{1}{K} \int_0^{x_0} (U - U^n) L^- dx \right| \leq \frac{1}{K} \int_0^{x_0} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |U^\nu - U^{\nu-1}| |L^-| dx$$

$$< \frac{\mathfrak{S}}{2\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{T}^{n+1}}{1 - \mathfrak{T}} < \epsilon$$

für $n > N(\epsilon)$.

2. Schritt: Wir untersuchen nun die ersten Ableitungen. Das Verfahren ist etwas mühsam, da wir an jeder Stelle bei unseren Abschätzungen die besten x -Potenzen wünschen.

Wir sehen mit (3.14) $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}\mathfrak{Y}$. Da nun $\mathfrak{Y} = ||1||$ ist, dürfen wir $\mathfrak{T}_1 < 1$ annehmen, nötigenfalls durch Verkleinerung von r' . Es ist $\mathfrak{T}_1 \geq \mathfrak{T}$. Mit (3.22) findet man formal

$$(4.13) \quad \left(\iint_{\mathfrak{s}(P_0)} DU dx dy \right)_{\nu_0}$$

$$= \int_0^{x_0} \{ \overline{DU}_\nu(Z - Y)Z_{\nu_0} + \overline{D_\nu U}(Z - Y)Z_{\nu_0} + DU(Z_{\nu_0} - Y_{\nu_0}) \} dx^{16}.$$

Mit (2.12), (4.6) haben wir das Iterationsverfahren

$$(4.14) \quad U_{\nu_0}^n = \frac{1}{2K} \left\{ \int_0^{x_0} (U_\nu^{n-1} L^- Z_{\nu_0} + U_\nu^{n-1} L^+ Y_{\nu_0} \right.$$

$$\left. + \overline{DU}_\nu^{n-1}(Z - Y)Z_{\nu_0}) dx + W(x_0, y_0; U^{n-1}) \right\}.$$

Dabei ist

$$(4.15) \quad W(x_0, y_0; U^{n-1}) = \int_0^{x_0} \{ U^{n-1} L^- Z_{\nu_0} + U^{n-1} L^+ Y_{\nu_0} + \overline{D_\nu U}^{n-1}(Z - Y)Z_{\nu_0}$$

$$+ DU^{n-1}(Z_{\nu_0} - Y_{\nu_0}) \} dx - 2K_{\nu_0} U^n + H_{\nu_0}.$$

Mit dem ersten Schritt und den Abschätzungen des 3. Abschnittes findet man

$$(4.16) \quad |W(x_0, y_0; U^{n-1})| \leq \mathfrak{W} x_0^h,$$

wobei $\mathfrak{W}$ unabhängig von n gewählt werden kann. Es ist

$$(4.17) \quad |U_{\nu_0}^n(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{W}}{2\mathfrak{R}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{T}_1^\nu x_0^{h-k} < \frac{\mathfrak{W}}{2\mathfrak{R}} \frac{1}{1 - \mathfrak{T}_1} x_0^{h-k}.$$

¹⁶ $\overline{DU}_\nu = D(x, \bar{y}) U_\nu(x, \bar{y})$. Dabei ist $\bar{y}$ eine geeignete Zwischenstelle: $Y \leq \bar{y} \leq Z$.

Der Induktionsschluss ist analog wie im 1. Schritt und soll unterbleiben. Mit Hilfe des 1. Schrittes findet man mit etwas Zwischenrechnung wegen $\mathfrak{T}_1 \geq \mathfrak{T}$

$$(4.18) \quad |W(x_0, y_0; U^{r-1}) - W(x_0, y_0; U^{r-2})| \leq \mathfrak{B}_1 \mathfrak{T}_1^{r-1} x_0^h.$$

Durch Induktion werden wir schliesslich

$$(4.19) \quad |U_{v_0}^r(x_0, y_0) - U_{v_0}^{r-1}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{B} + (\nu - 1)\mathfrak{B}_1}{2\mathfrak{R}} \mathfrak{T}_1^{r-1} x_0^{h-k}$$

beweisen. In der Tat wird mit (4.14)

$$(4.20) \quad |U_{v_0}^{r+1} - U_{v_0}^r| \leq \frac{1}{2\mathfrak{R}x_0^k} \left\{ \frac{\mathfrak{B} + (\nu - 1)\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{R}} \mathfrak{T}_1^{r-1} \left(\frac{\mathfrak{R}}{h} x_0^h + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{H}x_0^{h+\eta}}{(e+1)(d+h-k+1)} \right) + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{T}_1^r x_0^h \right\} = \frac{\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{B}_1}{2\mathfrak{R}} \mathfrak{T}_1^r x_0^{h-k}.$$

Man kann nun zwei Zahlen $\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3 < 1$ so bestimmen, dass $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_2 > \mathfrak{T}_1$ ist. Dann bildet $\nu\mathfrak{T}_3^r$ eine Nullfolge, und man hat schliesslich

$$(4.21) \quad |U_{v_0}^{r+1}(x_0, y_0) - U_{v_0}^r(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{B}_2}{2\mathfrak{R}} \mathfrak{T}_2^r x_0^{h-k}.$$

Damit ist $\sum |U_{v_0}^r - U_{v_0}^{r-1}|$ gleichmässig konvergent und U_{v_0} stetig. Der Grenzübergang darf in (4.14) auch unter den Integralen durchgeführt werden.

3. Schritt: Man hat mit (4.6) und (2.12)

$$(4.22) \quad U_{x_0}^n = \frac{1}{2K} \left\{ \int_0^{x_0} (U_y^{n-1} L^- Z_{x_0} + U_y^{n-1} L^+ Y_{x_0}) dx + V(x_0, y_0; U^{n-1}) \right\}$$

mit

$$(4.23) \quad \begin{aligned} V(x_0, y_0; U^{n-1}) &= \int_0^{x_0} (U^{n-1} L_y^- Z_{x_0} + U^{n-1} L_y^+ Y_{x_0}) dx \\ &+ \left(\iint D U^{n-1} dx dy \right)_{x_0} + (U^{n-1}(L^- + L^+) - 2K_{x_0} U^n)|_{x_0, y_0} + H_{x_0}. \end{aligned}$$

Mit dem ersten Schritt findet man bei Benutzung unserer Abschätzungen im 3. Abschnitt

$$(4.24) \quad |V(x_0, y_0; U^{n-1})| \leq \mathfrak{B} x_0^{h-1}$$

und damit mit dem 2. Schritt

$$(4.25) \quad |U_{x_0}^n(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{R}} x_0^{h-k-1} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{2\mathfrak{R}h} \sum_{r=0}^{n-2} \mathfrak{T}_2 x_0^{e+h-k}.$$

Es ist

$$(4.26) \quad e + h - k = (e + 1) + (h - k - 1) > h - k - 1.$$

Mit dem ersten Schritt und etwas Zwischenrechnung findet man

$$(4.27) \quad |V(x_0, y_0; U^{r-1}) - V(x_0, y_0; U^{r-2})| \leq \mathfrak{B}_1 \mathfrak{T}_2^{r-2} x_0^{h-1}$$

und damit

$$(4.28) \quad \begin{aligned} |U_{x_0}^r - U_{x_0}^{r-1}| &\leq \frac{1}{2\mathfrak{R}x_0^e} \left\{ \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{R}h} x_0^{e+k} + \mathfrak{B}_1 x_0^{h-1} \right\} \mathfrak{T}_2^{r-2} \\ &\leq \frac{\mathfrak{B}_2}{2\mathfrak{R}} \mathfrak{T}_2^{r-2} x_0^{h-k-1}. \end{aligned}$$

Ist $h - k - 1 \geq 0$, so ist $\sum |U_{x_0}^r - U_{x_0}^{r-1}|$ gleichmässig konvergent, U_{x_0} also stetig. Der Grenzübergang darf unter den Integralen in (4.22) durchgeführt werden. Im Falle $h - k - 1 < 0$ kann man die gleichmässige Konvergenz nur in jedem $r' - \mathfrak{k}$ erschliessen. Damit ist die Beh. a), e) bewiesen.

b) Die Terme KU, PU, AU_x, BU_y in (2.13) tragen die Potenzen $h = (e + 1) + (g + 1) > 0$, $p + h - k = (g + 1) + (p - a + 1) > 0$, $a + (h - k - 1) = g + 1 > 0$, $b + h - k = (g + 1) + (b - a + 1) > 0$. Die letzte Ungleichung folgt für Fall (I) in Voraussetzung (b) aus $b - a > (c - a)/2 > -1$.

c) Gäbe es zwei Lösungen von (2.12) (oder, was dasselbe besagt, von (2.11)), so würde ihre Differenz analogen Abschätzungen genügen und die Funktionalgleichung

$$(4.29) \quad \bar{U}(x_0, y_0) = \frac{1}{2K} \left\{ \int_0^{x_0} (\bar{U}L^- + \bar{U}L^+) dx + \iint D\bar{U} dx dy \right\}$$

erfüllen. Mit Induktion findet man

$$(4.30) \quad |\bar{U}| \leq \bar{u} \mathfrak{T}^n x_0^{h-k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Damit folgt $\bar{U} \equiv 0$.

d) Die Integrale in d) existieren alle einzeln. Der Term $\iint AU_x^2 dx dy$ trägt die Potenz $a + 2(h - k - 1) = a + 2(g - a + 1) = (g + 1) + (h - k) - 1 > -1$ und damit existiert das Integral bei Verwendung von (3.19). Analog zeigt man die Existenz aller anderen Glieder.

Diese aufgefundenen Lösungen erfüllen auch (2.9) und sind damit die gewünschten „schwachen Lösungen“ unserer Anfangswertprobleme. Man hat dafür lediglich das Erfülltsein der Voraussetzungen des Satzes 4.1 nachzuweisen. Die stetige Abhängigkeit von u (2.3) von den Anfangsdaten kann leicht nachgewiesen werden.

5. Zwei Beispiele

$$1. \quad L[u] \equiv u_{xx} - u_{yy} + \frac{\alpha(x, y)}{x} u_x + \beta(x, y) u_y + \gamma(x, y) u = \mu(x, y)$$

Satz 5.1: In $\mathfrak{r}$ seien α_{xy} , β_{yy} , γ , γ_y , μ , μ_y stetig.

Behauptung: (A_2) wenn $\alpha(0, y) > -1$ ist.

Beweis: Mit $a > -1$ hat man

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x^a L[u] &\equiv (x^a u_x)_x - (x^a u_y)_y + \{(\alpha - a)x^{a-1}u\}_x + \{x^a \beta u\}_y \\ &\quad - \{(a-1)(\alpha - a) + x\alpha_x + x\beta_y - x\gamma\} x^{a-2}u = x^a \mu. \end{aligned}$$

Mit (1.1) haben wir $A = C = x^a, \dots, F = x^a \mu$. Mit (2.3) setzen wir $U = u - u_0$ und erhalten mit (2.6), (2.7)

$$(5.2) \quad G = x^a \{u_0'' - \beta u_0' - \gamma u_0 + \mu\},$$

also $g = a > -1$. Mit (4.2) wird $h - k = 2$. Mit Satz 4.1 bleibt nur zu zeigen, dass

$$(5.3) \quad \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}(e+1)(d+h-k+1)} < 1 \quad \text{ist,}$$

denn es ist mit (4.3) $\eta = 0$. Man findet mit Abschnitt 3 und (4.4) $\mathfrak{E} = \mathfrak{R} = 1$, $h = a + 2$, $e = 0$, $d + h - k + 1 = a + 1 > 0$. Mit (3.26) und (4.4) wird

$$(5.4) \quad \mathfrak{L} = ||\text{Max } |\alpha - (\alpha - a)| ||, \quad \mathfrak{D} = |||a - 1| \text{Max } |\alpha - a| ||.$$

Wir setzen $a = \alpha(0, \tilde{y})$, wo $\tilde{y}$ ein fester Punkt auf $\mathfrak{f}$ ist. In einem geeigneten Rechteck $\mathfrak{r}'$ ist $|\alpha - a|$ hinreichend klein und (5.3) folgt. Durch Wiederholung des Verfahrens findet man die Lösung in einem Streifen um $\mathfrak{f}$.

Satz 5.2: Ist $\alpha(x, y) = x^j \alpha_0(x, y)$ mit $j > 0$ und α_{0xy} , β_{yy} , γ , γ_y , μ , μ_y stetig, so liegt (A_1) vor.

Beweis: (A_1) ist nur von dem Potenzverhalten der Koeffizienten abhängig. Satz 5.2 ist damit in den Fallunterscheidungen des 2. Abschnittes enthalten. Setzt man $U = u - xu_1 - u_0$ (2.3), so wird mit (2.6), (2.7)

$$(5.5) \quad G = xu_1'' + u_0'' - x^{j-1} \alpha_0 u_1 - \beta(xu_1' + u_0') - \gamma(xu_1 + u_0) + \mu.$$

Ohne Einschränkung darf $j < 1$ angenommen werden. Man hat dann $g = \gamma - 1 > -1$. Ferner mit (4.2) $h - k - 1 = \gamma > 0$. Es verbleibt nur $\mathfrak{L}/\mathfrak{R}h < 1$ zu zeigen (Satz 4.1), da η (4.3) sich als positiv ergibt. Aus (3.25) folgt

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} = \frac{||0||}{j+1} < 1.$$

$$2. \quad u_{xx} - x^2 u_{yy} + (P_0(x, y)u)_x + (Q_0(x, y)u)_y - D_0(x, y)u = F_0(x, y)$$

I. S. BEREZIN [1] und M. H. PROTTER [10] haben gezeigt, dass für $0 \leq c < 2$ (A_1) verliert. Unsere Fallunterscheidungen (Abschnitt 2) ergeben: (A_1) für $-1 < c < 2$. Wegen (1.8) interessiert $c = 2$.

Satz 5.3: In r erfüllen $P_0, \dots, F_0$ die Voraussetzungen des Abschnittes 2. Ist $c = 2$ und $|Q_0(x, y)| < 2$, so liegt (A_1) vor.

Beweis: Mit Abschnitt 2 hat man $a = p = q = d = f = 0$. Setzt man $U = u - xu_1 - u_0$, so findet man mit (2.6) $g = 0$ und damit $h = k = 2$. Da $\eta > 0$ ist (4.3), bleibt nur $\mathfrak{L}/\mathfrak{R}h < 1$ zu zeigen. Mit (3.23) folgt

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} = \frac{1}{3} ||\text{Max } |1 \pm Q_0| || < 1$$

wegen $|Q_0| < 2$.

6. Fallunterscheidungen

Gemäss unserer Erörterungen in Abschnitt 2 setzen wir hier für die in den Voraussetzungen (Seite 400) auftretenden Potenzen die Ungleichung (2.16) voraus. Da $\eta > 0$ (4.3) gilt, haben wir als wesentliche Voraussetzung in Satz 4.1 $\mathfrak{L}/\mathfrak{R}h < 1$ nachzuweisen.

Satz 6.1: Ist $g > -1$, $h - k = g - a + 2 > 0$, so ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{R}h < 1$.

Beweis: Mit (3.3), (3.25) hat man

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} = \frac{\left| \frac{|a+c|}{2} \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1} \right|}{h ||\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}||} = \frac{|a+c|}{2} \left| \frac{\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}} \right|, \\ \text{(II)} & \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} = \frac{|b|}{h} \left| \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_0} \right|, \quad \text{(III)} \quad \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}h} = \frac{|b|}{h} \left| \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_0} \right|. \end{array} \right.$$

Bei geeigneter Wahl von r' genügt es $|a+c|/2 < 1$, $|b|/h < 1$ nachzuweisen. Beachtet man (3.19), (3.7), so reduzieren sich diese Ungleichungen auf

$$(6.2) \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & a+c > 0: \quad 0 < g-a+2, \quad a+c < 0: \quad 0 < c+g+2 \\ & \text{(II), (III)} \quad b > 0: \quad 0 < g-a+2, \end{array}$$

die gemäss Voraussetzung sämtlich erfüllt sind.

Um nun die Fallunterscheidungen (2.7) zu beweisen, hat man nur noch zu zeigen, dass $g > -1$ und $h - k > 0$ bei (A_3) bzw. $h - k > 1$ bei (A_1) und (A_2) ist. Dies kann aber ohne Schwierigkeiten geschehen.

Für das Problem (A_4) hat man sich zunächst von der Gültigkeit des Satzes 6.1 zu überzeugen. Mit (2.18) sind wieder die Ungleichungen (6.2) erfüllt. Für $b < 0$ erhält man die zusätzliche Ungleichung

$$(6.3) \quad (\text{II}), (\text{III}) \quad b < 0: \quad 2b + g + 2 > 0,$$

die wegen (2.18) erfüllt ist. Es verbleibt wiederum nur $g > -1$ und $h - k > 1$ nachzuweisen, was sofort geschehen kann.

Für (A_5) können keine allgemeinen Fallunterscheidungen angegeben werden, da der Wert von g durch die Kopplungsfunktion f bestimmt wird. Bei gegebenem f hat man daher wie im Abschnitt 5 vorzugehen.

7. Das Verhalten der zweiten Ableitungen

Für manche Untersuchungen wird es nützlich sein, auch das Verhalten der zweiten Ableitungen von U bzw. u zur Verfügung zu haben. Unser Augenmerk richtet sich dabei stets auf die Gleichung (1.1) mit möglichst hohen Singularitäten, da man anderenfalls mit schwächeren Voraussetzungen auskommen könnte (Verwendung von (3.21) an Stelle von (3.22) usw.).

Wir geben zunächst einige Abschätzungen an, die sich unmittelbar an Abschnitt 3 anschliessen. Mit (3.12) findet man

$$(7.1) \quad Y_{v_0 v_0} = - \int_x^{x_0} E_{vv}^+(\xi, Y(\xi; x_0, y_0)) Y_{v_0}^2 d\xi - \int_x^{x_0} E_v^+(\xi, Y) Y_{v_0 v_0} d\xi.$$

Nach [9] ist $Y_{v_0 v_0}$ in $r' - \epsilon$ stetig. Der grösste Wert von $|Y_{v_0 v_0}|$ im abgeschlossenen Rechteck $r' - \epsilon < \epsilon \leq x \leq r'$ sei $\mathfrak{M}$. Dann folgt aus (7.1) mit $|E_{vv}^+(x, y)| \leq \mathfrak{G}_2 x^\epsilon$

$$(7.2) \quad \mathfrak{M} \leq \frac{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{Y}^2 \frac{x_0^{\epsilon+1}}{e+1}}{1 - \mathfrak{G}_1 \frac{x_0^{\epsilon+1}}{e+1}}.$$

Damit findet man in r' die Abschätzung

$$(7.3) \quad |Y_{v_0 v_0}(x; x_0, y_0)|, |Z_{v_0 v_0}(x; x_0, y_0)| \leq \mathfrak{Y}_1 x_0^{\epsilon+1}.$$

Mit (3.15) folgt sofort

$$(7.4) \quad |Y_{x_0 v_0}|, |Z_{x_0, v_0}| \leq \mathfrak{Y}_2 x_0^\epsilon$$

$$(7.5) \quad |Y_{x_0 x_0}|, |Z_{x_0, x_0}| \leq \mathfrak{Z}_1 x_0^{\epsilon-1}.$$

Für die zweiten Ableitungen von $H(x_0, y_0)$ (3.18) findet man

$$(7.6) \quad |H_{x_0 x_0}(x_0, y_0)| = \left| G(x_0, y_0)(Z_{x_0} - Y_{x_0}) + \int_0^{x_0} G_y(x, Z) Z_{x_0} Z_{y_0} + \dots \right| \\ \leq \mathfrak{S}_3 x_0^{e+g} = \mathfrak{S}_3 x_0^{h-2},$$

$$(7.7) \quad |H_{x_0 y_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{S}_4 x_0^{h-1}$$

$$(7.8) \quad |H_{y_0 y_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{S}_5 x_0^{g+1}.$$

Fordert man zusätzlich $|G_{yy}(x, y)| \leq \mathfrak{G}x^g$ mit $g > -1$, eine Annahme, für die unsere bisherigen Voraussetzungen für die Koeffizienten nicht ausreichen, so kann (7.8) verschärft werden:

$$(7.9) \quad |H_{y_0 y_0}| = \left| \int_0^{x_0} (G_y(x, Z) Z_{y_0}^2 + G(x, Z) Z_{y_0 y_0} - G_y(x, Y) Y_{y_0}^2 - G(x, Y) Y_{y_0 y_0}) dx \right| \leq \mathfrak{S}_5 x_0^h,$$

indem man die Umformung

$$G_y(x, Z) Z_{y_0}^2 - G_y(x, Y) Y_{y_0}^2 \\ = G_{yy}(x, \bar{y})(Z - Y) Z_{y_0}^2 + G_y(x, Z)(Z_{y_0} - Y_{y_0}) \cdot (Z_{y_0} + Y_{y_0})$$

benutzt.

Um (7.9) zu garantieren, fordern wir für das Weitere in den Voraussetzungen (a), (c), (d) des 2. Abschnittes eine weitere Differentiation bezüglich y . Wir haben dann den

Satz 7.1: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.1 hat (2.12) eine in $\mathbf{r}' - \mathfrak{k}$ zweimal stetig differenzierbare Lösung $U(x_0, y_0)$ mit*

$$(7.10) \quad |U_{x_0 x_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_3 x_0^{h-k-2}, \quad |U_{x_0 y_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_4 x_0^{h-k-1}, \\ |U_{y_0 y_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_5 x_0^{h-k}.$$

Es ist $U_{y_0 y_0}$ in $\mathbf{r}'$ stetig und $U_{x_0 x_0}$, $U_{x_0 y_0}$ sind ebenfalls in $\mathbf{r}'$ stetig wenn $h - k - 2 \geq 0$ bzw. $h - k - 1 \geq 0$ ist.

Der Beweis geht analog wie für Satz 4.1 und soll unterbleiben. Mit den Abschätzungen (7.10) sieht man, dass U neben (2.12) auch die Relation

$$(7.11) \quad \iint \{(AU_x)_x + (BU_x)_y + (BU_y)_x - (CU_y)_y + (PU)_x + (QU)_y - DU - G\} dx dy = 0$$

für jedes Abhängigkeitsgebiet g_0 erfüllt. Daraus folgt das Bestehen von (2.4) und mit (2.3) das von (1.1).

The research presented here was done at the Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Mathematisches Institut der Technischen Universität
Berlin-Charlottenburg

Literaturverzeichnis

- [1] I. S. BEREZIN: On the Cauchy problem for linear equations of second order with initial data on the parabolic line, *Matematicheski Sbornik*, Volume 24, 1949, 301–320.
- [2] L. BERS: On the continuation of a potential gas flow across the sonic line, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 2058, 1950.
- [3] R. CONTI: Sul problema di Cauchy per l'equazione $y^{2\alpha}k^2(x, y)z_{xx} - z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$ con i data sulla linea parabolica, *Annali di Matematica*, **31** (1950) 303–326.
- [4] R. COURANT & D. HILBERT: *Methoden der mathematischen Physik II*, Berlin 1937, S.381.
- [5] J. B. DIAZ & H. F. WEINBERGER: A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4**, 703–718 (1953).
- [6] F. I. FRANKL: On Cauchy's problem for equations of mixed elliptic-hyperbolic type with initial data on the transition line, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, Vol. 8 (1944), 195–224.
- [7] W. HAACK & G. HELLWIG: Lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von gemischtem Typus, *Archiv der Mathematik* **5**, 60–76 (1954).
- [8] G. HELLWIG: Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus, *Math. Zeitschrift* **61**, 26–46 (1954).
- [9] E. KAMKE: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*. Leipzig 1944.
- [10] M. H. PROTTER: The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation, *Can. J. Math.* **6**, 542–553 (1954).
- [11] A. WEINSTEIN: On the wave equation and the equation of Euler-Poisson. Fifth Symposium in Applied Mathematics of the Amer. Math. Soc. McGraw-Hill Co., 1954.
- [12] P. GERMAIN & R. BADER: Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte, *Bull. Soc. Math. de France* **81**, 145–174 (1953).