Über die stetige Rückkehr gestörter Überschallströmungen in den Unterschallbereich bei gemischten Strömungsfeldern¹

MANFRED SCHÄFER

Vorgelegt von W. TOLLMIE

INHALT

1. Einführung und Problemstellung	218
2. Wahl der Grundströmungen und Bezeichnungsweise	220
3. Die grundlegenden Ansätze für die strenge Lösungsmethode	222
4. Die Randbedingung	225
5. Das Näherungsprinzip und seine Anwendung	226
6. Berechnung des ersten Beispiels nach der strengen Methode	230
7. Berechnung des ersten Beispiels nach der Näherungsmethode	238
8. Das Feld der gestörten Zirkulationsströmung	238
9. Eigenwerte und Eigenlösungen	241
10. Zweites (allgemeineres) Beispiel	245
11. Abschließende Bemerkungen	248
Literatur	250

¹ Durch diese Arbeit werden die Untersuchungen vervollständigt, über die der Verfasser im zweiten Teil seines Vortrages auf dem Internationalen Kongreß für Theoretische und Angewandte Mechanik in Istanbul im August 1952 berichtet hat.

1. Einführung und Problemstellung. Beobachtungen an Hochgeschwindigkeitskanälen wie auch experimentelle Untersuchungen an Tragflügelprofilen mit lokalen Überschallbereichen zeigen in Übereinstimmung mit praktischen Erfahrungen, daß sich im Kompressionsgebiet einer Gasströmung der Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeiten anscheinend stets in Verbindung mit einem *Verdichtungsstoß*, also *unstetig*, vollzieht. Infolgedessen wurde vielfach die Vermutung geäußert, ein derartiger Übergang wäre in stetiger Weise überhaupt nicht möglich (oder zumindest äußerst unwahrscheinlich). Auch von theoretischer Seite her sind Bemühungen angestellt worden, um diese Vermutung zu erklären, worauf wir noch zu sprechen kommen. Die große mathematische Schwierigkeit, die sich der Behandlung dieses Fragenkomplexes entgegen stellt, hat es zunächst notwendig gemacht, die Untersuchungen ausschließlich auf reibungslose Potentialströmungen in der Ebene unter stationären Verhältnissen zu beschränken.

Nun ist aber andererseits für ebene Potentialströmungen seit längerem eine spezielle Klasse von einseitig begrenzten Unterschallströmungen mit eingebettetem Überschallbereich bekannt, die durch Lösungen dargestellt werden, welche sogar im gesamten Strömungsfeld (unter Ausschluß des unendlich Fernen) analytische Funktionen sind. Hierbei ist freilich wohl zu beachten, daß die begrenzende Wandstromlinie in ihrer Gesamtheit eine von *vornherein* genau *vorgeschriebene* Gestalt hat. Immerhin besteht daher bei der Beurteilung dieses Übergangsproblems ein offenkundiger Zwiespalt.

Stellt nun die angeführte Klasse von Lösungen nur ein *isoliertes* Vorkommnis dar oder existieren darüber hinaus wenigstens "*Nachbarlösungen*" mit nicht allzu stark abgewandelter Randkontur, bei denen der Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeiten auch noch *stetig* erfolgt? Zu dieser sich zwangsläufig ergebenden und daher mehrfach diskutierten Frage will die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern. Wir nehmen dafür an, daß ein Stück der Berandung einer *bekannten* "gemischten" Unterschall-Überschallströmung der oben bezeichneten Art im *Überschallbereich* durch einen Buckel ohne Richtungssprung *willkürlich* abgeändert sei, was wir als eine stationäre "*Störung*" der "*Grundströmung*" ansehen.

Die Randabänderung im Bereich (mäßiger) *Unterschallgeschwindigkeiten* vorzunehmen, wäre offensichtlich von weit geringerem Interesse, da ja das Verhalten einer Unterschallströmung gegenüber Störeinwirkungen dem einer inkompressiblen Strömung entspricht²: Bei *diffuser* Ausbreitung vom Zentrum her wird die Störung bereits in einiger Entfernung praktisch zum Erlöschen gebracht. Für unsere Problemstellung kommt hingegen wesentlich ins Spiel, daß in einer *Überschallströmung* sich eine *punktförmige* Einzelstörung längs einer *Charak-*

² Vgl. hierzu etwa die einschlägige Untersuchung von A. BETZ [1].

teristik oder *Machschen Linie fortsetzt*³, und zwar bis zur *Schallgrenze*. Durch diese Einwirkung auf die Schallgrenze wird aber überdies noch der *Unterschallbereich* beeinflusst, so daß es sich also letzten Endes um eine Störung des *gesamten* Strömungsfeldes handelt. Außerdem erweist es sich als von Bedeutung, daß eine *endliche* Ausdehnung⁴ der Randstörung vorliegt. Daher erfordert die Behandlung des gestellten Problems, wofür wir zwei typische Beispiele von Grundströmungen heranziehen, grundsätzlich die Einbeziehung des *vollständigen* gemischten Strömungsfeldes.

Für die rechnerische Durchführung hat sich die vom Verfasser zunächst zu diesem Zweck entwickelte "*einheitliche Charakteristikenmethode*" bewährt, deren mathematische Grundlagen bereits Gegenstand einer Veröffentlichung in dieser Zeitschrift [4] waren und die wir daher in vollem Umfang als dem Leserkreis bekannt voraussetzen dürfen und wollen⁵. Die jetzige Abhandlung ist als Fortsetzung und Ergänzung jener früheren [4] anzusehen, indem hier die erste Anwendung unserer Methode vorgenommen wird.

Wir möchten betonen, daß die Lösung unseres Problems *grundsätzlich streng* erfolgt; lediglich insofern handelt es sich dabei um eine Näherung, als die Entwicklung nach einem kleinen Störparameter nur Glieder 1. Ordnung berücksichtigt. Abgesehen vom grösseren Rechenaufwand würde aber einer Erweiterung auf Glieder höherer Ordnung gar nichts entgegen stehen. Wir dürfen daher im folgenden von der "strengen" Methode sprechen. Hiervon zu unterscheiden ist ein vereinfachtes Vorgehen, das sich bei Annahme *kleiner* Störungen *von vornherein* auf ein *Näherungsprinzip* gründet, welches das System der Ausgangsgleichungen nahe legt. Bei diesem Näherungsprinzip, dessen Brauchbarkeit durch Vergleich mit der strengen Methode an einem Spezialbeispiel erprobt wurde, wird die Metrik der ungestörten *Grundströmung unverändert* für die gestörte Strömung übernommen. Das läuft bei unserer Methode darauf hinaus, die *bekannten charakteristischen Grundkurven* der Grundströmung als *angenähertes Koordinatennetz* der *gestörten* Strömung anzusehen⁶. Diese überaus anschauliche Idee geht bereits auf W. TOLLMIE⁷ zurück. Es sei darauf hingewiesen, daß unser Näherungsprinzip grundsätzlich von den üblichen Methoden der Linearisierung abweicht.

Indem wir das Ergebnis unserer Untersuchungen vorweg nehmen, können wir sagen: Es existieren durchaus Nachbarströmungen in unserem Sinne mit *stetigem* Durchgang durch die Schallgrenze und mit der Eigenschaft, daß sie in genügend *weiter Entfernung* von der "Störung" (praktisch) in die *Grundströmung übergehen*, wobei allenfalls eine starre Verschiebung aller ungestörten Stromlinien eines

³ In diesem Punkt sei ausdrücklich auf die späteren Ausführungen in Abschnitt 5, S.228 aufmerksam gemacht.

⁴ Im Unterschied zu den Untersuchungen von W. TOLLMIE [2, 3].

⁵ Das erspart uns die bloße Wiederholung umfangreicher Darlegungen, die aber zum Verständnis des Folgenden unumgänglich sind.

⁶ Vgl. hierzu [5].

⁷ Vgl. auch hierzu [2].

Bereiches zugelassen sei. Auf mögliche Ausnahmererscheinungen wird an gegebener Stelle eingegangen werden.

Unser Ergebnis steht nicht in Einklang mit den Schlußfolgerungen, die G. GUDERLEY [6, 7, 8] und A. BUSEMANN [9, 10] aus ihren Untersuchungen ziehen. Zufolge beider Autoren sind solche Nachbarströmungen nicht zu realisieren, da sich in dem Punkt, wo die Schallgrenze die Berandung trifft, eine Singularität einstellt. Im Unterschied zu unserem Vorgehen arbeitet jedoch GUDERLEY [8] einmal mit einer durch Anwendung der Legendre-Transformation linearisierten Differentialgleichung in *verstümmelter* Form, die nur für die Schallgrenze und ihre Nachbarschaft gültig ist, wobei der Gültigkeitsbereich völlig offen bleibt⁸. Zum anderen werden überdies die Randbedingungen im Hodographenplan künstlich linearisiert. Diese einschneidenden Vereinfachungen sind in ihrer Auswirkung schwer zu übersehen. Auch in der neuesten Arbeit von BUSEMANN [10] ist die *Tricomische* Differentialgleichung zu Grunde gelegt; ferner scheint uns die Randbedingung nicht angemessen gewählt. Dennoch braucht unseres Erachtens das Ergebnis dieser beiden Autoren nicht zu dem unsrigen in Widerspruch zu stehen, wenn man es dahingehend deutet, daß infolge der abgewandelten Randbedingung auch die Lage jenes kritischen Punktes in der Strömungs(Orts-)ebene eine Änderung erfährt. In der Tat zeigen nun unsere berechneten Strömungsbilder gerade, daß die gesamte Schallgrenze eine Gestaltveränderung erleidet, die in dieser Hinsicht umso mehr ins Gewicht fallen dürfte, als gerade in der Nachbarschaft der Schallgrenze der *Geschwindigkeitsgradient beträchtlich (jedoch nicht übermäßig groß)* ist.

2. Wahl der Grundströmungen und Bezeichnungsweise. Als *Grundströmungen* wählen wir für unsere Beispiele solche, die wir in [4.8]¹ als *schlicht* bezeichnet hatten. Dieser Name kennzeichnet ihre Eigenschaft, eine punktweise *umkehrbar eindeutige* Abbildung der Strömungs(Orts-)ebene auf die *Hodographen- (Geschwindigkeits-)ebene* zu besitzen. Die schlichten Strömungsfelder werden dargestellt durch die bislang einzig bekannten strengen und—unter Heranziehung beherrschbarer Funktionen—geschlossenen Lösungen der gasdynamischen Gleichungen, die schon auf TSCHAPLIGIN (1904) zurückgehen. Sie liefern teilweise auch physikalisch sinnvolle Strömungsbilder, nämlich den Prototyp von einseitig begrenzten Strömungen längs gekrümmter Wände. Unsere Beschränkung auf diese spezielle Lösungsklasse erfolgt nur aus Gründen der rechnerischen Einfachheit und ist nicht grundsätzlicher Natur. Die Verallgemeinerungsfähigkeit unserer Methode der (formalen) Konstruktion von Nachbarlösungen hat einen zweifachen Grund. Einmal sind die grundlegenden Differentialgleichungspaare [4, (3.4) bzw. (3.8)]², [4, (6.4) bzw. (6.5)] *linear*, und zum anderen besteht die wesentliche Eigenschaft

⁸ Vgl. hierzu auch die Bemerkungen in der Einleitung zu [4].

¹ Unter dieser Abkürzung soll hier—und im folgenden entsprechend—Abschnitt 8 unserer grundlegenden Arbeit [4] verstanden werden.

² Bedeutet: Formelpaar (3.4) bzw. (3.8) aus [4]. Im folgenden entsprechende Abkürzungen.

unserer Charakteristikenmethode—im Unterschied zur üblichen Hodographenmethode—gerade in der *Eineindeutigkeit* zwischen *Orts-* und *Charakteristikenplan* (vgl. [4.1]), so daß eine Abwandlung der ursprünglichen Randbedingung durch bloße *Superposition* von Korrekturgliedern zu erreichen ist.

Für die gesuchte *gestörte* Strömung bezeichne:
 ϑ den Stromlinienwinkel gegen die $+x$ -Achse;

$$\nu = \int_{a^*}^v \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{av} dv \quad \text{und} \quad N = \int_{a^*}^v \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{av} dv$$

($a = [\frac{1}{2}(\kappa - 1)(1 - v^2)]^{\frac{1}{2}}$ örtliche Schallgeschwindigkeit gemäß [4, (2.3)], κ das konstante Verhältnis der spezifischen Wärmen, a^* kritische (Schallgeschwindigkeit) den geeignet verzerrten (mittels der Vakuumgeschwindigkeit dimensionslos gemachten) Geschwindigkeitsbetrag v im Überschallbereich (vgl. [4, (3.2)]) bzw. Unterschallbereich (vgl. [4, (3.7)]);

$\rho = (1 - v^2)^{\frac{1}{\kappa-1}}$ die auf die Ruhedichte (für $v = 0$) bezogene Dichte;

$$\sigma = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \tau = \frac{\xi - \eta}{2} \quad \text{und} \quad s = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2i} \quad (i = \sqrt{-1})$$

die (unabhängigen) “nebencharakteristischen” Koordinaten im Überschallbereich (vgl. [4, (2.17)]) bzw. Unterschallbereich (vgl. [4, (2.13)]), wobei ξ, η die üblichen “hauptcharakteristischen” Koordinaten bedeuten, die nur für Überschallgeschwindigkeiten reelle Werte annehmen (vgl. [4.2]);

Ξ und H die (bei unseren Beispielen für das gesamte Feld einheitlichen) “Metrikfunktionen” (vgl. [4, (8.3)]). Sie vermitteln, nachdem die Abhängigkeit der Geschwindigkeitskoordinaten ϑ und ν bzw. N von den nebencharakteristischen Koordinaten aus den charakteristischen Hodographengleichungen [4, (3.4)]:

$$\vartheta_\sigma = \nu_\tau, \quad \vartheta_\tau = \nu_\sigma \quad (2.1a, b)$$

bzw. [4, (3.8)]:

$$\vartheta_s = N_t, \quad \vartheta_t = -N_s \quad (2.2a, b)$$

—jedenfalls grundsätzlich—bekannt ist (vgl. [4.3] sowie zusätzlich [4.4]), den Zusammenhang zwischen der Strömungs- x, y -Ebene und der Ebene der nebencharakteristischen Koordinaten. Die Bezeichnung soll andeuten, daß diese Funktionen die vorerst unbekannte Metrik des Netzes der charakteristischen Grundkurven festlegen.

Ferner werde vereinbart, daß die entsprechenden bekannten Größen für die *Grundströmung* durch Überstreichen kenntlich gemacht werden sollen; somit gibt z.B. $x - \bar{x}, y - \bar{y}$ den Unterschied zwischen entsprechenden Punkten der gestörten und ungestörten Strömung im Ortsplan wieder, an der festen *Wand* also die *abgewandelte Randbedingung*.

Beiläufig sei daran erinnert, daß bei unserer Methode Potential und Strom-

funktion Ψ höchstens nebenher auftreten, indessen nicht als selbständige Variable (vgl. [4.7]).

3. Die grundlegenden Ansätze für die strenge Lösungsmethode. Die spezielle Klasse der schlichten *Grundströmungen* wird, wie in [4.8] ausgeführt ist, durch den einfachsten Lösungsansatz¹ für (2.1) bzw. (2.2) erfaßt:

$$\bar{\vartheta} = \bar{\sigma}, \quad \bar{\nu} = \bar{\tau} \quad (\bar{\text{Ia}})$$

bzw.

$$\bar{\vartheta} = \bar{s}, \quad \bar{N} = \bar{t}. \quad (\bar{\text{Ib}})$$

Die zugehörigen einheitlichen Metrikfunktionen sind durch [4, (8.15)] gegeben:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= \Xi(\bar{\nu}, \bar{\vartheta}; k), \\ \bar{H} &= H(\bar{\nu}, \bar{\vartheta}; k), \end{aligned} \quad (\bar{\text{II}})$$

wobei die Form der Berandung durch die Wahl des Parameters k festgelegt wird.

Für die *gestörte* Strömung wollen wir den Ansatz ($\bar{\text{I}}$) *unverändert* beibehalten:

$$\vartheta = \sigma, \quad \nu = \tau \quad (\text{Ia})$$

bzw.

$$\vartheta = s, \quad N = t. \quad (\text{Ib})$$

Dies schließt natürlich die Voraussetzung ein, daß durch die Störung die Schlichtheit des Strömungsfeldes nicht aufgehoben wird. Der Nachweis hierfür ist in jedem Einzelfall besonders zu erbringen.

Dagegen *erweitern* wir den Ansatz ($\bar{\text{II}}$) für die *Metrikfunktionen*, die einem linearen Differentialgleichungssystem genügen, das zufolge des Ansatzes (I) die spezielle Gestalt [4, (8.3)] hat:

$$\frac{v^2 - a^2}{a^2} \Xi_{\vartheta} - \nu H_{\nu} - H = 0, \quad (3.1a)$$

$$\nu \Xi_{\nu} - H_{\vartheta} - \frac{v^2 - a^2}{a^2} \Xi = 0, \quad (3.1b)$$

durch formale Superposition von Korrekturgliedern, die gemäß [4.8] von der Form [4, (8.15)] sein müssen:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= \bar{\Xi}(v, \vartheta) + \epsilon \sum_{k=2}^{\infty} Q_k^{(1)}(v) \{a_k \cos k\vartheta - b_k \sin k\vartheta\} + (\epsilon^2) \dots \\ H &= \bar{H}(v, \vartheta) + \epsilon \sum_{k=2}^{\infty} Q_k^{(2)}(v) \{a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta\} + (\epsilon^2) \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

($\epsilon > 0$).

¹ Wir denken uns die nebencharakteristischen Koordinaten mittels einer Bezugslänge dimensionslos gemacht.

Dabei gilt

$$Q_k^{(1)}(v) = \frac{k}{\rho v} P_k(v) = \frac{k}{\rho} v^{k-1} H_k(w) \quad (w = v^2) \quad (3.2a)$$

$$Q_k^{(2)}(v) = \frac{P'_k(v)}{\rho} = Q_k^{(1)}(v) + 2 \frac{v^{k+1}}{\rho} \dot{H}_k(w) \quad (3.2b)$$

(der Akzent bedeutet Ableitung nach v , der übergesetzte Punkt Ableitung nach w).

$H_k(w) = v^{-k} P_k(v)$ ist gemäß [4, (8.14)], ausgenommen den Fall $|k| = 1$, die hypergeometrische Funktion²

$$F(\alpha, \beta, \gamma; w) = 1 + \sum_{\iota=1}^{\infty} \frac{\binom{\alpha + \iota - 1}{\iota} \binom{\beta + \iota - 1}{\iota}}{\binom{\gamma + \iota - 1}{\iota}} w^{\iota} \quad (3.3)$$

mit

$$\gamma = k + 1, \quad \alpha + \beta = k - \frac{1}{\kappa - 1}, \quad \alpha\beta = -\frac{k(k+1)}{2(\kappa-1)}.$$

Die konstanten Koeffizienten a_k, b_k ($k = 2, 3, \dots$) werden aus den abgewandelten Randbedingungen bestimmt.

Damit die *Eindeutigkeit* der Lösung erreicht wird, muß die Störung die *Abklingungsbedingung im Unendlichen der Strömungsebene* erfüllen. In unserem Falle der schlichten Strömungsfelder muß daher für $t \rightarrow -\infty$ oder zufolge (Ib) für $v \rightarrow 0$ gelten: $\Xi \rightarrow \bar{\Xi}$ und $H \rightarrow \bar{H}$, mithin für alle k : $Q_k^{(1)}(0) = Q_k^{(2)}(0) = 0$ sein. Dieser Bedingung haben wir in (II) durch geeignete Auswahl³ der Fundamentallösung von (3.1) bereits Rechnung getragen, und ebenso dem Umstand, daß hier nur ganzzahlige k vorkommen, die positiv angenommen werden können. Da für $k = 1$ keine im Nullpunkt reguläre Fundamentallösung existiert⁴, ist die Summation erst von $k = 2$ ab vorzunehmen. Die *Eindeutigkeit* läßt sich dann—unter der Voraussetzung, daß die formal angesetzten Reihen (II) gleichmäßig konvergieren—durch folgende Überlegung plausibel machen⁵. Wir denken uns im Unterschallbereich längs der Berandung ϑ (in unserem Fall ist $\vartheta = \bar{\vartheta}$, da hier Störungsfreiheit angenommen werden soll) sowie längs der Schallgrenze solche

² Vgl. etwa die zusammenfassende Darstellung in [11, C 2.260, S.467].

³ Die andere Fundamentallösung hat bei $v = 0$ einen Pol $(k+1)$ -ter Ordnung, scheidet also hier aus.

⁴ Diese lauten nämlich für [4, (8.14)] $H_1^{(1)} = \frac{1}{w}$ und $H_1^{(2)} = \frac{1}{w} \int^w \rho dw$, wie beiläufig angemerkt sei.

⁵ Zur Belebung der Anschauung ziehe man etwa die spätere Figur 10 heran. An verwickeltere Verhältnisse beim Zusammenwirken von Unterschall- und Überschallbereichen ist hier nicht gedacht.

Randwerte $\vartheta = \vartheta^*$ vorgeschrieben, die im Überschallbereich gerade die gewünschte Gestalt der (verformten) Wand erzeugen. (Für die vorliegende Untersuchung dürfen wir dabei die Randwerte als stetig voraussetzen.) Damit ist die Lösung im *Unterschallbereich*, für den sie einer elliptischen Differentialgleichung genügt, eindeutig bestimmt und zugleich die *Lage der Schallgrenze* festgelegt. Durch Vorgabe der Werte $\vartheta = \vartheta^*$, $\nu = N^* = 0$ auf der Schallgrenze ist dann für den *Überschallbereich* das "*Cauchysche Anfangswertproblem*" der hyperbolischen Differentialgleichung für das *Abhängigkeitsgebiet der Schallgrenze* eindeutig lösbar, innerhalb dessen sich die Fortsetzung der Wandstromlinie befindet. Der kritische Punkt liegt dabei natürlich in der *sachgemäßen* Vorgabe der Werte $\vartheta = \vartheta^*$, da es sich ja grundsätzlich um ein *Randwertproblem* eines *gemischten* Feldes handelt, das wir—wenn auch hier nur für eine spezielle Klasse von Strömungen—zu lösen haben.

Der (positive) Störparameter ϵ braucht an sich *nicht klein* zu sein, sofern nur der Ansatz (I) (der die Schlichtheit des Feldes zum Ausdruck bringt) gültig bleibt, wofür wir unten eine formelmäßige Bedingung angeben. Aus *rechentechnischen* Gründen soll aber hier ϵ so *klein* angenommen werden, daß alle Glieder von höherer als erster Ordnung in ϵ praktisch vernachlässigbar seien. Sonst müßte der Ansatz (II) gegebenenfalls um Terme mit ϵ^2 , $\dots$ von ganz entsprechender Form wie die angeschriebenen linearen erweitert werden, wodurch der Umfang der Rechnung beträchtlich wächst. Ob und inwieweit eine derartige Erweiterung überhaupt grundsätzlich notwendig ist, hängt von der vorgeschriebenen Randbedingung ab.

Die für unsere Beispiele benutzte *umkehrbar eindeutige* Zuordnung von Hodo-graphen- und Ortsplan setzt voraus, daß die *Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\vartheta, \nu)} \neq 0 \quad \text{und endlich} \quad (3.4)$$

bleibt. Zuzufolge [4, (5.9)] muß also $\left(\text{mit } \text{ctg}^2 \alpha = \frac{v^2 - a^2}{a^2}, \alpha = \arcsin \frac{a}{v} \text{ Machscher} \right.$

Winkel, $\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \cdot \frac{d\nu}{dv} = \frac{\text{ctg} \alpha}{v} \Bigg)$ gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\vartheta, \nu)} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\sigma, \tau)} \cdot \frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial(\vartheta, \nu)} = \frac{1}{v} \left\{ \frac{a^2 - v^2}{a^2} \bar{E}^2 + \bar{H}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{v} \left\{ \frac{a^2 - v^2}{a^2} \bar{E}^2 + \bar{H}^2 \right. \\ &\quad + 2\epsilon \sum_{k=2}^{\infty} \left[\left(\frac{a^2 - v^2}{a^2} \bar{E} Q_k^{(1)}(v) a_k + \bar{H} Q_k^{(2)}(v) b_k \right) \cos k\vartheta \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{a^2 - v^2}{a^2} \bar{E} Q_k^{(1)}(v) b_k - \bar{H} Q_k^{(2)}(v) a_k \right) \sin k\vartheta \right] + (\epsilon^2) \dots \right\} \neq 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

wodurch eine obere Schranke für ϵ festgelegt wird, die von dem vorkommenden Geschwindigkeitsbereich abhängt.

Falls jedoch ϵ diese Schranke übersteigt, also die Ungleichung (3.5) nicht durchweg erfüllt ist, müßte auch der Ansatz (I) durch Korrekturglieder erweitert werden; das Strömungsfeld braucht dann *nicht mehr schlicht* zu sein.

4. Die Randbedingung. Mittels der Metrikfunktionen Ξ , H lassen sich die *Ortskoordinaten* x , y durch bloße Quadraturen ermitteln. Gemäß [4, (8.17)] hat man mit (II) und (3.2) ($|k| \neq 1$):

$$\begin{aligned} x = \bar{x}(v, \vartheta) - \epsilon \cdot \frac{1}{\rho} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{v^{k+1}}{k+1} \dot{H}_k(w) [a_k \cos(k+1)\vartheta - b_k \sin(k+1)\vartheta] \right. \\ \left. + \frac{v^{k-1}}{k-1} [kH_k(w) + w\dot{H}_k(w)] [a_k \cos(k-1)\vartheta - b_k \sin(k-1)\vartheta] \right\} - \epsilon A_1 \\ + (\epsilon^2) \dots \end{aligned} \quad (4.1a)$$

und

$$\begin{aligned} y = \bar{y}(v, \vartheta) - \epsilon \cdot \frac{1}{\rho} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{v^{k+1}}{k+1} \dot{H}_k(w) [a_k \sin(k+1)\vartheta + b_k \cos(k+1)\vartheta] \right. \\ \left. - \frac{v^{k-1}}{k-1} [kH_k(w) + w\dot{H}_k(w)] [a_k \sin(k-1)\vartheta + b_k \cos(k-1)\vartheta] \right\} - \epsilon B_1 \\ + (\epsilon^2) \dots ; \end{aligned} \quad (4.1b)$$

A_1 und B_1 sind dabei zwei Integrationskonstanten¹.

Damit ist das gesuchte Strömungsfeld berechnet. Zur Darstellungsform möchten wir bemerken, daß bei unserer Methode ϑ und v als Funktionen der nebencharakteristischen Koordinaten σ , τ bzw. s , t aufzufassen sind, die nur hier gemäß (I) besonders einfach sind und die anschauliche Bedeutung der polaren Geschwindigkeitskoordinaten haben.

Die Lösung (4.1) haben wir nun der *Randbedingung* anzupassen, d.h. das Strömungsfeld soll die durch den *vorgegebenen Buckel abgeänderte Berandung* als Wandstromlinie enthalten. Längs dieser besteht eine (eindeutige) Beziehung zwischen ϑ und v , die wir aus der Stromfunktion Ψ gewinnen. Zuzufolge [4, (8.16)] gilt mit (II) und (3.2a)

$$\Psi = \bar{\Psi}(v, \vartheta) + \epsilon \sum_{k=2}^{\infty} P_k(v) (a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) + \epsilon A_0 + (\epsilon^2) \dots \quad (4.2)$$

A_0 ist eine Integrationskonstante.

Längs einer *Stromlinie* $\Psi = \Psi_0 = \text{const.}$ besteht daher die Beziehung

$$\Psi_0 = \bar{\Psi}(v, \vartheta) + \epsilon \sum_{k=2}^{\infty} P_k(v) (a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) + \epsilon A_0 \dots, \quad (4.2^0)$$

¹ Denn es brauchen die Konstanten $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ in [4, (8.17)] nicht gleich x_0 bzw. y_0 zu sein.

die wir uns nach v aufgelöst:

$$v = v(\vartheta; \Psi_0, a_k, b_k, A_0) \quad (4.3)$$

und dann in (4.1) eingesetzt denken. Dann liefert das Gleichungspaar (4.1a), (4.1b) eine Parameterdarstellung für die Stromlinie $\Psi = \Psi_0$ mit ϑ als Parameter. Den so gewonnenen Darstellungen geben wir die Form von Fourier-Entwicklungen

$$\begin{aligned} x &= x(\vartheta; a_k, b_k, A_0, A_1, B_1) = f_1(\vartheta), \\ y &= y(\vartheta; a_k, b_k, A_0, A_1, B_1) = f_2(\vartheta). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Andererseits sei die stetig differenzierbare² Randbedingung durch die beiden Fourier-Reihen

$$x = X(\vartheta), \quad y = Y(\vartheta) \quad (4.5)$$

gegeben, die wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} \vartheta$ nicht voneinander unabhängig sind. Für die Störung hat man die Ausdrücke

$$\Delta X = X(\vartheta) - X(\bar{\vartheta}), \quad \Delta Y = Y(\vartheta) - Y(\bar{\vartheta}), \quad (4.6)$$

welche die Größenordnung ϵ haben, so daß es in Anbetracht unserer Vernachlässigungen belanglos ist, ob wir sie als Funktionen von ϑ oder von $\bar{\vartheta}$ auffassen.

Unter der *Voraussetzung*, daß für sämtliche Werte ϑ des vorkommenden Wertebereichs $f_1(\vartheta)$ und $f_2(\vartheta)$ *vollständige* Fourier-Entwicklungen darstellen, folgt aus den identisch in ϑ gültigen Beziehungen

$$f_1(\vartheta) \equiv X(\vartheta), \quad f_2(\vartheta) \equiv Y(\vartheta) \quad (4.7)$$

wegen der Eindeutigkeit der Fourier-Entwicklung die eindeutige Bestimmbarkeit der bislang unbekannten Koeffizienten, womit das Problem gelöst ist. Daß diese *Voraussetzung* jedoch *keineswegs immer erfüllt* zu sein braucht, zeigen wir an Gegenbeispielen in Abschnitt 9. In diesen Ausnahmefällen kann unsere *Randbedingung nicht willkürlich* vorgeschrieben werden, sondern muß eine *spezielle* Form haben; wir sprechen dann von "*Eigenlösungen*".

Die praktische Durchführung des angedeuteten Rechnungsganges werden wir für zwei Strömungsbeispiele zeigen.

5. Das Näherungsprinzip und seine Anwendung. Zuvor entwickeln wir noch eine *Näherungsmethode*, die im Sinne unserer Behandlungsweise sich zwangsläufig anbietet und überaus anschaulich erscheint. Sie gründet sich *von vornherein* auf ein *Approximationsprinzip*, und daher ist ihr Anwendungsbereich auf *kleine* Störungen (Störparameter ϵ hinreichend klein) beschränkt.

² Aufgeprägte Unstetigkeiten der Richtungsänderung, die ja zu Verdichtungsstößen führen, sollen hier—wie bereits in der Einleitung angemerkt—von vornherein außer Betracht bleiben.

Zur Gewinnung der *strengen* Lösung konnten wir für die *charakteristischen Hodographengleichungen* den Lösungsansatz (I) *unverändert* beibehalten, während für die *Metrikfunktionen* der Ansatz (II) der modifizierten Randbedingung entsprechend zu *erweitern* war. Nun liegt die Frage nahe: Was bedeutet eine Abänderung von Ansatz (I) bei gleichzeitiger Übernahme des Ansatzes (II) aus der Grundströmung? Da durch (II) die Metrik des Feldes festgelegt wird, läuft diese Abwandlung offensichtlich darauf hinaus, daß das aus der Grundströmung bekannte Koordinatennetz der charakteristischen Grundkurven *ungeachtet der Störung übernommen* wird, während deren Einfluß allein auf die charakteristischen *Hodographengleichungen* abgewälzt ist. Rechentechnisch bringt dies die große Annehmlichkeit mit sich, daß man mit den geläufigen harmonischen Funktionen und ihrem Analogon im Imaginären auskommt bei der Anpassung an die Randbedingung, die hier natürlich in die Ebene der charakteristischen Koordinaten zu übertragen ist, während die unbequeme Behandlung des im allgemeinen verwickelten Differentialgleichungspaares für die Metrikfunktionen [4, (6.4) bzw. (6.5)] entfällt. Andererseits ist zu bedenken, daß jetzt die Ansätze (I) und (II) *nicht* miteinander in *Einklang* stehen, und nur bei nicht zu großen Störungen wird diese Diskrepanz praktisch tragbar bleiben.

Ein weiterer Vorteil dieser Methode liegt in ihrer Anschaulichkeit, die auf der Eigenschaft der Machschen Linien im Überschallbereich beruht, Träger von punktförmigen Singularitäten zu sein (wobei die ungefähre Lage der Machschen Linien im voraus bekannt ist). Diese Vorstellung hat bereits W. TOLLMIEIN in seinen Untersuchungen [2, 3] über die Fortsetzung von punktförmigen Überschallunstetigkeiten verwertet. Seine Resultate lassen sich indessen nicht ohne weiteres für die vorliegenden Untersuchungen ausnutzen, da es sich hier um Störbereiche endlicher Ausdehnung handelt. Der *Vergleich* der Rechnungen nach der *strengen* und nach der *genäherten* Methode, den wir für unser erstes Beispiel¹ durchführen, erweist die Brauchbarkeit unserer Näherungsmethode. Zum mindesten erhält man—auch für größere Störungen—mit ihrer Hilfe qualitativ einen guten Einblick in die Abwandlung, die das Strömungsfeld durch die Störung erfährt. Daß sich dabei die quantitative *Unsicherheit* als in der *Nachbarschaft der Schallgrenze* am größten herausstellt, dürfte nicht überraschen.

Wenn wir nun zur *formelmäßigen Darstellung* übergehen, so haben wir dem oben Ausgeführten entsprechend ϑ und ν als Funktionen von $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ bzw. ϑ und N als Funktionen von $\bar{s}$, $\bar{t}$ zu betrachten. Der Ansatz für den Überschallbereich muß längs der *ungestörten* Schallgrenze $\bar{t} = \bar{\tau} = 0$ ($\bar{s} \equiv \bar{\sigma}$) in den Ansatz für den Unterschallbereich übergehen, der wiederum zufolge der *Abklingungsbedingung* der Störung² hier für $\bar{t} \rightarrow -\infty$ in den Ansatz (Ib) für die Grundströmung übergehen muß. Setzen wir für die Störung eine in Analogie zu (II) stehende Produktsumme an, wobei hier der Summationsbuchstabe k von 1 ab läuft, so hat man bei Beschränkung auf Glieder 1. Ordnung in ϵ für den

¹ Vgl. die Abschnitte 6 und 7.

² Vgl. Abschnitt 3, S.223.

Überschallbereich:

$$\vartheta = \bar{\sigma} + \epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{a}_k \cos k\bar{\sigma} + \bar{b}_k \sin k\bar{\sigma} \} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\tau} \right), \quad (\widetilde{\text{Ia}}_1)$$

$$\nu = \bar{\tau} + \epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ -\bar{a}_k \sin k\bar{\sigma} + \bar{b}_k \cos k\bar{\sigma} \} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\tau} \right). \quad (\widetilde{\text{Ia}}_2)$$

Eine anschaulichere Bedeutung bekommen diese Ausdrücke bei Umschreibung auf hauptcharakteristische Koordinaten ($\bar{\xi} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$, $\bar{\eta} = \bar{\sigma} - \bar{\tau}$):

$$2\vartheta = (\bar{\xi} + \bar{\eta}) + \epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left\{ \bar{a}_k \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\xi} \right) + \bar{b}_k \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\xi} \right) \right\} + \left\{ \bar{a}_k \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\eta} \right) - \bar{b}_k \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\eta} \right) \right\} \right], \quad (\widetilde{\text{I'a}}_1)$$

$$2\nu = (\bar{\xi} - \bar{\eta}) + \epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left\{ \bar{a}_k \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\xi} \right) + \bar{b}_k \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\xi} \right) \right\} - \left\{ \bar{a}_k \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\eta} \right) - \bar{b}_k \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{\eta} \right) \right\} \right]. \quad (\widetilde{\text{I'a}}_2)$$

Entsprechend gilt für den

Unterschallbereich:

$$\vartheta = \bar{s} + \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{a}_k \cos k\bar{s} + \bar{b}_k \sin k\bar{s} \} \cdot e^{k\bar{t}}, \quad (\widetilde{\text{Ib}}_1)$$

$$N = \bar{t} + \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{ -\bar{a}_k \sin k\bar{s} + \bar{b}_k \cos k\bar{s} \} \cdot e^{k\bar{t}}. \quad (\widetilde{\text{Ib}}_2)$$

(Die Freiwerte $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ unterscheiden sich selbstverständlich von den früheren a_k , b_k .)

Der Ansatz ($\widetilde{\text{II}}$) wird zwar formal übernommen:

$$\Xi = \bar{\Xi}(v, \vartheta), \quad H = \bar{H}(v, \vartheta), \quad (\widetilde{\text{II}})$$

die Metrikfunktionen und damit die Ortskoordinaten x, y hängen aber von den nebencharakteristischen Koordinaten über v und ϑ gemäß ($\widetilde{\text{I}}$) ab, wobei für x und y formal die Ausdrücke [4, (8.17)] gelten.

Aus ($\widetilde{\text{I'a}}$) liest man unmittelbar ab, daß sich längs einer Machschen Linie, etwa $\bar{\eta} = \text{const.}$, eine Richtungsstörung $\vartheta - \bar{\vartheta}$ für sich *allein* betrachtet durchaus ändert, jedoch die Kombination $(\vartheta - \bar{\vartheta}) - (\nu - \bar{\nu})$ konstant bleibt. Nur falls die Geschwindigkeitsstörung konstant bliebe, würde sich die Richtungsstörung unverändert fortsetzen; die Geschwindigkeitsstörung ist aber durch die vorgeschriebene Wandstörung (Buckel) eindeutig mitbestimmt, so daß darüber nicht mehr frei verfügt werden kann. Man darf also nicht erwarten, daß sich der *endlich ausgedehnte* Buckel in einem Streifen benachbarter Machscher Linien mit gleich-

bleibender Gestalt fortsetzt, sondern diese kann sich erheblich *verändern*, weil ein *Zusammenwirken* von *Richtungs-* und *Geschwindigkeitsstörung* stattfindet³.

Eine gewisse Schwierigkeit tritt als Folge unseres Näherungsprinzips insofern auf, als im Charakteristikenplan die Bildkurve der "gestörten Schallgrenze" $\nu = N = 0$, die an sich per definitionem in die *Abszissenachse* $\bar{\tau} = \bar{t} = 0$ fallen muß, teils darüber in der $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ -Halbebene, teils darunter in der $\bar{s}, \bar{t}$ -Halbebene verläuft. Je nachdem, ob es sich um die Teile $\bar{\tau} = \bar{\tau}^*(\bar{\sigma})$ oder $\bar{t} = \bar{t}^*(\bar{s})$ dieser Bildkurve handelt, ist die Darstellung $(\widetilde{Ia}_2)$ mit $\nu = 0$ oder diejenige $(\widetilde{Ib}_2)$ mit $N = 0$ heranzuziehen. Andererseits wird aber der Übergang von $(\widetilde{Ia})$ nach $(\widetilde{Ib})$ längs $\bar{\tau} = \bar{t} = 0$ vollzogen, so daß also der Wechsel des Differentialgleichungstypus nicht genau mit dem Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit zusammenfällt, womit die schon erwähnte Unsicherheit der Rechnung in der Nachbarschaft der Schallgrenze zusammenhängt.

Da nach (I) $\vartheta = \sigma$ bzw. $\vartheta = s$ sowie $\nu = \tau$ bzw. $N = t$ gilt, stellen die Gleichungen $(\widetilde{Ia})$ mit $\vartheta = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ bzw. $(\widetilde{Ib})$ mit $\vartheta = \text{const.}$, $N = \text{const.}$ die Nebencharakteristiken der gestörten Strömung in der $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ - bzw. $\bar{s}, \bar{t}$ -Halbebene dar. Es erscheint offensichtlich zweckmäßig, auch die Randbedingung in der Form $\Delta\vartheta = \vartheta - \bar{\vartheta}$ im *Charakteristikenplan* zu formulieren, indem wir uns die Richtungsstörung $\Delta\vartheta$ im Ortsplan nicht als Funktion von x und y sondern als Funktion von $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ bzw. von $\bar{s}$ und $\bar{t}$ gegeben denken. Jedem Punkt (x, y) ist ja dort eindeutig ein Wertepaar der nebencharakteristischen Koordinaten zugeordnet, das längs der ungestörten Stromlinie $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_0$ durch die Beziehung

$$\bar{\tau} = \varphi_0(\bar{\sigma}) \quad \text{im Überschallbereich} \quad (5.1a)$$

bzw.

$$\bar{t} = f_0(\bar{s}) \quad \text{im Unterschallbereich} \quad (5.1b)$$

mit

$$0 = \varphi_0(\bar{\sigma}^*) = f_0(\bar{s}^*), \quad \bar{\sigma}^* = \bar{s}^* \quad (5.1^*)$$

verknüpft sei. Diese Beziehungen stellen die Bildkurven der ungestörten Stromlinien im Charakteristikenplan dar (der hier mit der Hodographenebene zusammenfällt). Unterscheide sich nun die abgeänderte Wandstromlinie von der ursprünglichen um die Größe Δn in Normalenrichtung, und denken wir uns die Störung Δn über der Bogenlänge $\bar{\sigma}$ der Wand aufgetragen (Figur 1), so erkennt

FIG. 1

³ Für diese Überlegungen spielt es natürlich keine Rolle, daß wir uns hier auf genäherte Charakteristiken beziehen anstatt auf die exakten.

man folgenden wichtigen *Zusammenhang* zwischen den *beiden Formen der Randbedingung*:

$$\frac{d\Delta n}{d\bar{\epsilon}} = \operatorname{tg} \chi, \quad \text{mit} \quad \chi = \pi - \Delta\vartheta;$$

daher gilt

$$-\operatorname{tg} \Delta\vartheta \approx -\Delta\vartheta = \frac{d\Delta n}{d\bar{\epsilon}} = \left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\vartheta}\right)^{-1} \cdot \frac{d\Delta n}{d\vartheta}. \quad (5.2)$$

Zur Festlegung der Freiwerte $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ genügt es in erster Näherung, die Bildkurven der *ungestörten* Stromlinien (5.1) zu kennen; denn der Unterschied gegenüber der gestörten Strömung ist von der Größenordnung ϵ . Setzt man nämlich (5.1a) in $(\widetilde{\text{Ia}}_1)$ bzw. (5.1b) in $(\widetilde{\text{Ib}}_1)$ ein, so wirkt sich dieser Unterschied in den Korrekturgliedern nur von der Größenordnung ϵ^2 aus, und solche Größen berücksichtigen wir hier ohnehin nicht. Somit gilt längs des *Randes* $\bar{\text{T}} = \phi(\bar{\sigma})$ bzw. $\bar{\text{T}} = F(\bar{s})$:

$$\Delta\vartheta \equiv \vartheta - \bar{\vartheta} = \epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{\bar{a}_k \cos k\bar{\sigma} + \bar{b}_k \sin k\bar{\sigma}\} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \phi(\bar{\sigma})\right) \quad (5.3a)$$

(Überschallbereich)

bzw.

$$\Delta\vartheta \equiv \vartheta - \bar{\vartheta} = \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{\bar{a}_k \cos k\bar{s} + \bar{b}_k \sin k\bar{s}\} \cdot e^{kF(\bar{s})} \quad (5.3b)$$

(Unterschallbereich),

wobei wir uns etwa die linken und die rechten Seiten in Fourier-Reihen entwickelt denken.

6. Berechnung des ersten Beispiels nach der strengen Methode. Als erste *Anwendung* auf konkrete Fälle wollen wir die Einwirkung einer Wandstörung auf die *Zirkulationsströmung* um den *Einheitskreis* untersuchen. Zwar handelt es sich hierbei um eine sehr spezielle Grundströmung, aber da für sie unsere Methode in voller *Allgemeinheit* zum Einsatz kommt, kann dieses Beispiel dennoch als grundlegend für die Tschapliginschen Strömungen überhaupt betrachtet werden, während andererseits der Rechenaufwand mäßig bleibt. Ferner gestattet dieses Beispiel gerade leicht, interessante *Ausnahmeerscheinungen* zu studieren. Auch in praktischer Hinsicht kommt ihm eine gewisse Bedeutung zu, als geeignete Ausschnitte aus dem Strömungsfeld den einfachsten Fall von Strömungen durch einen gekrümmten Kanal repräsentieren. Indem wir die Berechnung zunächst in *diesem* Abschnitt *streng* und dann im *nächsten* Abschnitt nach unserer *Näherungsmethode* durchführen, bekommen wir den erwünschten Einblick in die Auswirkung des Näherungsprinzips.

Die erstmalige Behandlung der vorliegenden Fragestellung stammt von G. I. TAYLOR [12] und wurde von ihm mittels der üblichen Methode der Linearisierung

durchgeführt. Sein Beispiel ist freilich nur ein *Spezialfall*¹ des von uns hier in voller Allgemeinheit diskutierten Randwertproblems. Überdies wurde auf die *Abwandlung* des Strömungsfeldes im *Großen* in dieser Arbeit nicht eingegangen. Daher halten wir es durchaus nicht für überflüssig, an das Taylorsche Beispiel noch einmal anzuknüpfen.

Die Kreisströmung als Grundströmung (vgl. Figur 2) entspricht gemäß¹ unserer

FIG. 2

Bezeichnungsweise in [4.8] dem Fall $k = 0$ und wird in folgender Weise (vgl. [4, (8.15), (8.17), (8.16)]) beschrieben:

$$\bar{E} \equiv 0, \quad \bar{H} = \frac{\bar{V}}{\bar{v}} \quad (\text{II})$$

($\bar{V}$ ist die konstante Geschwindigkeit auf den Einheitskreis),

wobei $\bar{v} = \begin{cases} v(\bar{\tau}) & \text{im Überschallbereich} \\ v(\bar{t}) & \text{Unterschallbereich} \end{cases}$ gilt;

$$\bar{x} = \bar{V} \frac{\sin \bar{\vartheta}}{\bar{v}}, \quad \bar{y} = -\bar{V} \frac{\cos \bar{\vartheta}}{\bar{v}} \quad (0 \leq \bar{v} \leq \bar{V}, -\pi \leq \bar{\vartheta} \leq \pi) \quad (6.1a, b)$$

oder (bei Zugrundelegung von Polarkoordinaten $\bar{r}, \bar{\omega}$)

$$\bar{r} = \frac{\bar{V}}{\bar{v}}, \quad \bar{\omega} = \bar{\vartheta} - \frac{\pi}{2} \quad (6.2a, b)$$

$$\bar{\Psi} = \bar{V} \int_{\bar{v}}^{\bar{v}^*} \frac{\bar{\rho}}{\bar{v}} d\bar{v}. \quad (6.3)$$

¹ Vgl. hierzu auch [5].

Und es ist

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(\vartheta, \bar{v})} = \frac{\bar{V}^2}{\bar{v}^3} \quad \text{endlich für } \bar{v} > 0. \quad (6.4)$$

($\bar{v} = 0$ ist der Ruhezustand im Unendlichen.)

Für die *abgeänderte Randbedingung* machen wir nun den einfachen Ansatz

$$\Delta n = \Delta r = \Gamma \cdot e^{-\lambda \sigma^2} \quad (-\pi \leq \sigma \leq \pi) \quad (6.5)$$

(Γ, λ frei verfügbare Maßstabsfaktoren),

der einen Wandbuckel darstellt, welcher in nicht zu großer Entfernung von der Stelle $\bar{\sigma} = \vartheta = 0$ glatt in die Kreisberandung einläuft (vgl. hierzu Figur 4a) für hinreichend großes $|\sigma|$ wegen des starken Abklingens der Exponentialfunktion $\Delta r \approx 0$. Mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \sigma^2} d\sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \sigma^2} \cos k\sigma d\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-k^2/4\lambda} \\ &\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \sigma^2} \sin k\sigma d\sigma = 0 \right) \end{aligned}$$

erhalten wir, da wir $\int_{-\pi}^{\pi} \approx \int_{-\infty}^{\infty}$ setzen dürfen, für Δr die Fourier-Reihe

$$\Delta r = \frac{\Gamma}{2\sqrt{\pi\lambda}} + \frac{\Gamma}{\sqrt{\pi\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2/4\lambda} \cos k\sigma. \quad (6.6)$$

Wir können erwarten, daß für kleine ϵ die *Funktionaldeterminante* (3.5) mit (II) und (II) sowie (3.2b):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\vartheta, v)} = \frac{\bar{V}^2}{v^3} + \epsilon \cdot 2 \frac{\bar{V}}{\rho v^2} \sum_{k=2}^{\infty} P'_k(v) (a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) + (\epsilon^2) \dots \quad (6.7)$$

definit innerhalb des ganzen Feldes bleibt. Dann gilt (I), und nach (Ia) kann σ statt ϑ geschrieben werden. Auch dürfen wir im Rahmen unserer Näherung statt dessen $\bar{\sigma}$ setzen, da der Unterschied $\Delta\vartheta$ die Größenordnung ϵ hat. Jedoch sei betont, daß die Störung grundsätzlich in Abhängigkeit von der streng gültigen Koordinate σ anzusetzen ist. Außerdem weisen wir nochmals darauf hin, daß mit dieser gewählten *Richtungsstörung* eine hierdurch bestimmte *Geschwindigkeitsstörung* längs der abgeänderten Wand *gekoppelt* ist.

Der Randbedingung (6.6) sind nun die Metrikfunktionen (II) durch geeignete Wahl der Freiwerte a_k, b_k ($k = 2, 3, \dots$) sowie A_1, B_1 [in (4.1)] und A_0 [in (4.2)] anzupassen. Die Rechnung wird dadurch wesentlich vereinfacht, daß hier längs jeder ungestörten Stromlinie ($\bar{\Psi} = \text{const.}$) $\bar{v} = \text{const.}$ gilt², was jedoch keineswegs eine grundsätzliche Einschränkung bedeutet.

Wir knüpfen, um die Beziehung (4.3) längs der Wand zu erhalten, an (4.2⁰) an.

² Vgl. (6.3).

Da der Ausgangsnäherung ($\epsilon = 0$) $\bar{\Psi} = \Psi_0$ nach (6.3) $v = \bar{v} = \bar{v}_0 = \text{const.}$ entspricht, hat man

$$\bar{\Psi}(v) = \Psi_0 - \epsilon \left\{ A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\bar{v}_0)(a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) \right\}. \quad (6.8)$$

Durch Übergang zur Umkehrfunktion folgt

$$\begin{aligned} v &= v(\bar{\Psi}) = v(\Psi_0 - \epsilon \{ \dots \}) \\ &= v(\Psi_0) - \left(\frac{dv}{d\Psi} \right)_{\Psi=\Psi_0} \cdot \epsilon \{ \dots \} + (\epsilon^2) \dots \\ &\stackrel{3}{=} v(\Psi_0) - \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{\Psi}} \right)_{\bar{\Psi}=\bar{\Psi}_0} \cdot \epsilon \{ \dots \} + (\epsilon^2) \dots, \\ v &= \bar{v}_0 - \epsilon \cdot \frac{\bar{v}_0}{\bar{V}\bar{\rho}_0} \left\{ A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\bar{v}_0)(a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$[\bar{\rho}_0 = \rho(\bar{v}_0)].$$

Die Beziehung (6.9) ergibt die Bildkurve der Stromlinie $\Psi = \Psi_0$ im *Charakteristikenplan*. Handelt es sich insbesondere um die Wandstromlinie $\Psi_0 = 0$ mit der Geschwindigkeitsverteilung $V(\vartheta)$, so ist

$$\begin{aligned} V &= \bar{V} - \frac{\epsilon}{\bar{P}} \left\{ A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\bar{V})(a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) \right\} + \dots \\ &[\bar{P} = \rho(\bar{V})]. \end{aligned} \quad (6.9^0)$$

Die Gleichungen für die Stromlinien selbst gewinnt man durch Einsetzen von (6.9) in (4.1). Zunächst bekommt man für $\bar{x}(v, \vartheta)$ und $\bar{y}(v, \vartheta)$ gemäß (6.1a) bzw. (6.1b):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{V} \frac{\sin \vartheta}{\bar{v}_0} \left[1 + \frac{\epsilon}{\bar{V}\bar{\rho}_0} \{ \dots \} + \dots \right] \\ &= \bar{V} \frac{\sin \vartheta}{\bar{v}_0} + \epsilon \cdot \frac{1}{\bar{v}_0 \bar{\rho}_0} \left\{ A_0 \sin \vartheta + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\bar{v}_0) \left(a_k \frac{\cos(k-1)\vartheta - \cos(k+1)\vartheta}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_k \frac{\sin(k-1)\vartheta - \sin(k+1)\vartheta}{2} \right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.10a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -\bar{V} \frac{\cos \vartheta}{\bar{v}_0} - \epsilon \cdot \frac{1}{\bar{v}_0 \bar{\rho}_0} \left\{ A_0 \cos \vartheta + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\bar{v}_0) \left(a_k \frac{\sin(k-1)\vartheta + \sin(k+1)\vartheta}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_k \frac{\cos(k-1)\vartheta + \cos(k+1)\vartheta}{2} \right) \right\} + \dots. \end{aligned} \quad (6.10b)$$

³ Statthaft, weil in ϵ quadratische Glieder nicht mehr berücksichtigt werden.

Wir fassen nun in (4.1) mit $v = \bar{v}_0$ die in der geschweiften Klammer bei ϵ stehenden Terme mit den entsprechenden von (6.10) zusammen, d.h. wir sammeln die Fourier-Koeffizienten, wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\bar{\rho}_0} \left(\frac{P_k(\bar{v}_0)}{\bar{v}_0} + P'_k(\bar{v}_0) \right) = R_k(\bar{v}_0) = R_k^0 \quad (6.11)$$

gesetzt⁴ werde. Sofern für alle $k = 2, 3, \dots$ $R_k^0 \neq 0$ gilt, ergibt sich für das Störglied der Ortskoordinaten x, y eine *vollständige* Fourier-Entwicklung, und es folgt

$$\begin{aligned} x = \bar{V} \frac{\sin \vartheta}{\bar{v}_0} - \epsilon \left\{ A_1 - \frac{A_0}{\bar{v}_0 \bar{\rho}_0} \sin \vartheta + a_2 R_2^0 \cos \vartheta \right. \\ \left. - b_2 R_2^0 \sin \vartheta + \frac{a_3 R_3^0}{2} \cos 2\vartheta - \frac{b_3 R_3^0}{2} \sin 2\vartheta \right. \\ \left. + \sum_{k=4}^{\infty} \left[\frac{a_k R_k^0 + a_{k-2} R_{k-2}^0}{k-1} \cos (k-1)\vartheta \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{b_k R_k^0 + b_{k-2} R_{k-2}^0}{k-1} \sin (k-1)\vartheta \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.12a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} -y = \bar{V} \frac{\cos \vartheta}{\bar{v}_0} + \epsilon \left\{ B_1 + \frac{A_0}{\bar{v}_0 \bar{\rho}_0} \cos \vartheta - a_2 R_2^0 \sin \vartheta \right. \\ \left. - b_2 R_2^0 \cos \vartheta - \frac{a_3 R_3^0}{2} \sin 2\vartheta - \frac{b_3 R_3^0}{2} \cos 2\vartheta \right. \\ \left. - \sum_{k=4}^{\infty} \left[\frac{a_k R_k^0 - a_{k-2} R_{k-2}^0}{k-1} \sin (k-1)\vartheta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b_k R_k^0 - b_{k-2} R_{k-2}^0}{k-1} \cos (k-1)\vartheta \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.12b)$$

Damit haben wir für eine Stromlinie $\Psi = \Psi_0$ in der *Strömungsebene* eine Parameterdarstellung mit ϑ als Parameter. Speziell für die *Wandstromlinie* $\Psi_0 = 0$ ist in (6.12) $\bar{v}_0 = \bar{V}$ und $R_k(\bar{V}) = R_k$ zu setzen. Um den Koeffizientenvergleich mit unserem Störansatz (6.6) durchführen zu können, gehen wir noch zum Radiusvektor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ über, wodurch überdies eine kleine Vereinfachung erreicht wird. Durch Quadrieren der Ausdrücke (6.12a) und (6.12b) und Addition ergibt sich unter Heranziehung von (6.2a)

⁴ Man beachte, daß der Wert der Konstanten R_k^0 von $\bar{v}_0$ abhängt.

$$\begin{aligned}
r^2 - \bar{r}_0^2 \approx \Delta r \cdot 2\bar{r}_0 \approx 2 \frac{\bar{V}}{\bar{v}_0} \cdot \epsilon \left\{ \frac{A_0}{\bar{v}_0 \bar{\rho}_0} - A_1 \sin \vartheta + B_1 \cos \vartheta \right. \\
\left. - \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{a_k R_k^0}{k-1} \sin k\vartheta - \frac{a_{k-2} R_{k-2}^0}{k-1} \sin (k-2)\vartheta + \frac{b_k R_k^0}{k-1} \cos k\vartheta \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{b_{k-2} R_{k-2}^0}{k-1} \cos (k-2)\vartheta \right] \right\}
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\Delta r \approx \epsilon \left\{ \frac{A_0}{\bar{v}_0 \bar{\rho}_0} - A_1 \sin \vartheta + B_1 \cos \vartheta \right. \\
\left. - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{a_k R_k^0}{k^2 - 1} \sin k\vartheta + \frac{b_k R_k^0}{k^2 - 1} \cos k\vartheta \right] \right\}. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Wir merken hier gleich noch die später benötigte Formel für $\Delta\vartheta$ an, die man aus der Beziehung $\frac{x}{y} = \text{ctg } \omega$ mit (6.2b) herleiten kann. Viel einfacher gelingt dies aber mit Hilfe von (5.2), da in unserem Falle $\Delta n \approx \Delta r$ und $\frac{d\mathcal{G}}{d\vartheta} = \bar{r}_0$ ist. Daher liefert Differentiation von (6.13) nach ϑ (das wir ja mit $\bar{\vartheta}$ vertauschen dürfen⁵) sofort

$$\begin{aligned}
\Delta\vartheta \approx \frac{\epsilon}{\bar{r}_0} \left\{ A_1 \cos \vartheta + B_1 \sin \vartheta \right. \\
\left. + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k}{k^2 - 1} a_k R_k^0 \cos k\vartheta - \frac{k}{k^2 - 1} b_k R_k^0 \sin k\vartheta \right] \right\}. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Durch Vergleich des Ausdrucks für Δr an der *Wand*, d.h. von (6.13) mit $\bar{v}_0 = \bar{V}$, $R_k^0 = R_k$, und (6.6) bestimmen sich, sofern für alle $k \geq 2$ $R_k \neq 0$, die Freiwerte zu

$$\begin{aligned}
A_1 = 0, \quad a_k = 0, \\
A_0 = \frac{\Gamma}{\epsilon} \frac{\bar{V}\bar{P}}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \quad B_1 = \frac{\Gamma}{\epsilon} \frac{e^{-1/4\lambda}}{\sqrt{\pi\lambda}}, \quad b_k = -\frac{\Gamma}{\epsilon} \frac{(k^2 - 1)e^{-k^2/4\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \cdot \frac{1}{R_k} \quad (6.15) \\
(k \geq 2),
\end{aligned}$$

womit die Lösung gefunden ist.

Aus (6.15) ersieht man, daß (von einem gewissen k ab) das Produkt der $b_k R_k$, worauf es ankommt, mit wachsendem k monoton abnimmt. Daher ist die Approximation der Reihen durch endliche Polynome, die man für die praktische Rechnung ja vornimmt, gerechtfertigt. Andererseits kommt dieser Ersatz nur auf eine unbedeutende Abwandlung der Randstörung hinaus, für deren Wahl

⁵ Vgl. S.226, Bemerkung zu Formelpaar (4.6).

wir doch eine gewisse Freiheit haben. Falls für große k die Ungleichung $R_k \neq 0$ nicht durchweg erfüllt ist, worauf die Ausführungen des späteren Abschnitts 9 hindeuten, spielt das wiederum auch keine Rolle, da ja auch die Fourierkoeffizienten der angenommenen Störung gemäß (6.6) so stark nach null konvergieren, daß sie praktisch verschwinden.

Eine grundsätzlich bedeutsame Bemerkung ist noch zu dem Ausdruck (6.13) zu machen. Es fällt auf, daß hierin drei Konstanten auftreten, die der Ansatz (II) für die *Metrikfunktionen* *nicht* enthält, und infolgedessen geht auch, im Widerspruch zur Abklingungsbedingung, *nicht* $\Delta r \rightarrow 0$ für $\bar{v} \rightarrow 0$. Untersuchen wir die Bedeutung der drei ersten Terme in der geschweiften Klammer. Der erste bedeutet offenbar den Übergang zu einem benachbarten konzentrischen Kreis, was lediglich auf eine Veränderung in der Numerierung der Stromlinien hinausläuft und daher unwesentlich ist, wenn auch der Abstand entsprechender Kreise proportional zum Radius $\bar{r}$ für $\bar{v} \rightarrow 0$ unbegrenzt anwächst. Wesentlich sind aber die beiden nächsten Terme, die nicht abklingen können, weil sie eine starre Verschiebung des Gesamtfeldes bedeuten, indem der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise verschoben ist. Das macht man sich leicht an Hand von Figur 3 klar, die

FIG. 3

zwei Kreise mit den Radien r bzw. $r + \epsilon ar$ und den Mittenabstand ϵb zeigt. Dann gilt (bei Anpassung an unsere Bezeichnungsweise)

$$(r + \epsilon ar)^2 = (r + \Delta r)^2 + \epsilon^2 b^2 - 2(r + \Delta r)\epsilon b \cos \vartheta,$$

oder für Glieder gleicher Größenordnung ϵ

$$\epsilon \cdot 2ar^2 = 2r\Delta r - \epsilon \cdot 2rb \cos \vartheta,$$

mithin

$$\Delta r = \epsilon(ar + b \cos \vartheta);$$

und das ist gerade der asymptotische Ausdruck (6.13) für $\bar{v}_0 \rightarrow 0$. Eine solche Verschiebung beeinflusst natürlich die Metrik des Feldes nicht, und außerdem besteht keine Veranlassung, daß eine derartige "Störung" abgebaut wird, da ja das Feld unendlich ausgedehnt ist. Es ergibt sich also, daß im allgemeinen die vorgegebene Randstörung zwar *insofern abklingt*, als in genügend weitem Abstand von der Wand die Stromlinien praktisch die *ungestörte Kreisform* mit umnumerierter Stromfunktion annehmen, der *Mittelpunkt* dieser Kreise jedoch gegenüber

dem Zentrum der Grundströmung um ein kleines, aber endliches Stück *verschoben* ist. Das tritt nur dann nicht ein, wenn die Fourier-Entwicklung der Störung (6.6) keine einfach-harmonische Komponente aufweist, da jetzt $A_1 = B_1 = 0$ wird.

Die Richtungsstörung $\Delta\vartheta$ klingt natürlich in jedem Fall ab, wie auch (6.14) für $\bar{r}_0 \rightarrow \infty$ zeigt, da für hinreichend großen Wandabstand der *Richtungsunterschied* in entsprechenden Punkten *beliebig klein* wird. Über die Lageänderung entsprechender Punkte kann eben (6.14) keine direkte Aussage machen.

Die *Isotachen oder Nebencharakteristiken* $\tau = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$, die in der Grundströmung mit den kreisförmigen *Stromlinien zusammenfallen*, verlieren jetzt natürlich diese Eigenschaft, und zwar besteht ein *Unterschied* bereits in der 1. Näherung. Eine Parameterdarstellung für die Linien $\tau = \bar{\tau}_0$ bzw. $t = \bar{t}_0$ gewinnt man, da zufolge (I) $\nu = \bar{\tau}_0$ bzw. $N = \bar{t}_0$ gilt, indem man in (4.1) $v = \bar{v}_0 = \text{const.}$ setzt (dabei ist gleich das Verschwinden von A_1 und allen a_k gemäß (6.15) berücksichtigt):

$$x = \bar{V} \frac{\sin \vartheta}{\bar{v}_0} + \epsilon \left\{ b_2 Q_2^+ \sin \vartheta + \frac{b_3 Q_3^+}{2} \sin 2\vartheta + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{b_k Q_k^+ + b_{k-2} Q_{k-2}^-}{k-1} \sin (k-1)\vartheta \right\} + \dots, \quad (6.16a)$$

$$-y = \bar{V} \frac{\cos \vartheta}{\bar{v}_0} + \epsilon \left\{ B_1 - b_2 Q_2^+ \cos \vartheta - \frac{b_3 Q_3^+}{2} \cos 2\vartheta - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{b_k Q_k^+ - b_{k-2} Q_{k-2}^-}{k-1} \cos (k-1)\vartheta \right\} + \dots, \quad (6.16b)$$

wobei wir anstelle der Funktion H_k jetzt die symmetrischen Ausdrücke

$$\frac{1}{2\bar{\rho}_0} \left(P'_k(\bar{v}_0) - \frac{kP_k(\bar{v}_0)}{\bar{v}_0} \right) = \frac{Q_k^{(2)}(\bar{v}_0) - Q_k^{(1)}(\bar{v}_0)}{2} = Q_k^-, \quad (6.17a)$$

$$\frac{1}{2\bar{\rho}_0} \left(P'_k(\bar{v}_0) + \frac{kP_k(\bar{v}_0)}{\bar{v}_0} \right) = \frac{Q_k^{(2)}(\bar{v}_0) + Q_k^{(1)}(\bar{v}_0)}{2} = Q_k^+ \quad (6.17b)$$

(unter Weglassen des Arguments $\bar{v}_0$) eingeführt haben.

Hieraus läßt sich wie oben⁶ die Beziehung

$$\Delta r = r - \bar{r}_0 \approx \epsilon \left\{ B_1 \cos \vartheta - \sum_{k=2}^{\infty} b_k \frac{Q_k^{(2)}(\bar{v}_0) + kQ_k^{(1)}(\bar{v}_0)}{k^2 - 1} \cos k\vartheta \right\} \quad (6.18)$$

herleiten, die z.B. für $\bar{v}_0 = a^*$ (kritische Schallgeschwindigkeit) die Störung der Schallgrenze angibt. Es sei auf den Unterschied zwischen den analogen Ausdrücken (6.18) bzw. (6.13) hingewiesen.

⁶ Vgl. S.234.

7. Berechnung des ersten Beispiels nach der Näherungsmethode. Die *genäherte Berechnung* unseres Beispiels gestaltet sich außerordentlich einfach, da hier für die ungestörte Kreisberandung $\phi \equiv \bar{T} = \text{const.}$ (unabhängig von $\bar{\sigma}$) ist. Die *Richtungsstörung* $\Delta\vartheta$ am Rand folgt nach (5.2) aus (6.6) durch Differentiation. Wir können dafür jedoch die bereits bekannte Darstellung (6.14) mit $\bar{\tau}_0 = 1$, $R_k^0 = R_k$ und (6.15) heranziehen, in der $\vartheta = \bar{\sigma}$ zu setzen ist¹. Daher gilt gemäß (5.3a):

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta &\approx \epsilon \left\{ B_1 \sin \bar{\sigma} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2 - 1} b_k R_k \sin k\bar{\sigma} \right\} \\ &= \epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{a}_k \cos k\bar{\sigma} + \bar{b}_k \sin k\bar{\sigma} \} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{T} \right) \quad (7.1) \\ &\quad (-\pi \leq \bar{\sigma} \leq \pi),\end{aligned}$$

und es ergibt sich für die Freiwerte:

$$\begin{aligned}\bar{a}_k &= 0; \\ \bar{b}_1 &= \frac{B_1}{\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + \bar{T} \right)} = \frac{\Gamma}{\epsilon} \cdot \frac{e^{-1/4\lambda}}{\sqrt{2\pi\lambda} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + \bar{T} \right)}, \quad (7.2) \\ \bar{b}_k &= -\sqrt{2} \frac{k}{k^2 - 1} \frac{b_k R_k}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{T} \right)} = \frac{\Gamma}{\epsilon} \cdot \frac{ke^{-k^2/4\lambda}}{\sqrt{2\pi\lambda} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{T} \right)} \quad (k \geq 2); \end{aligned}$$

dabei ist (entsprechend wie im vorigen Abschnitt $R_k \neq 0$) für alle $k = 1, 2, \dots$, $\cos \left(\frac{\pi}{4} + k\bar{T} \right) \neq 0$ vorauszusetzen.

Zur Ermittlung der *Stromlinien* im gestörten Feld kann man umgekehrt durch Integration von (5.2) mit Benutzung von (7.1), wobei $\bar{T} = \bar{\tau}_0$ zu setzen ist, bzw. von $(\widetilde{\text{Ib}}_1)$ mit $\bar{t} = \bar{t}_0$, zu dem Ausdruck $\Delta n = \Delta r$ für den Lageunterschied gelangen (der am Rand in den Störansatz (6.5) übergeht), wenn man bei der Näherungsmethode von dem Richtungsunterschied $\Delta\vartheta$ ausgegangen war. Dabei tritt eine zunächst unbestimmte Integrationskonstante auf, deren Bedeutung wir im vorigen Abschnitt² erkannt hatten.

8. Das Feld der gestörten Zirkulationsströmung. Für eine *numerische Durchrechnung* dieses Beispiels, die wir zum *Vergleich* einmal nach der *strengen* und einmal nach der *genäherten* Methode durchgeführt haben, wurde $\epsilon = \frac{\Gamma}{\sqrt{\pi\lambda}}$ gesetzt, und sind folgende Zahlenwerte für die eingehenden Parameter gewählt: in

¹ Vgl. Anmerkung 5 von S.226, Bemerkung zu Formelpaar (4.6).

² Vgl. S.236.

(6.5) $\lambda = 6$, in (II) bzw. (6.1) oder (6.2) $\bar{V} = 0,6^1$, was in (7.1) $\bar{T} = 16^\circ 45'$ entspricht; sei l die Längeneinheit für den Einheitskreis, so ist $\Gamma = \frac{l}{10}$ oder $\epsilon = 0,02303 l$. Γ ist nach (6.5) die Pfeilhöhe $(\Delta r)_{\max}$ des Wandbuckels an der Stelle $\sigma = \bar{\sigma} = 0$ (die charakteristischen Koordinaten sind bei uns als Winkelgrößen definiert). Im Hinblick darauf, daß wir Glieder der Größenordnung ϵ^2 bereits nicht mehr berücksichtigen, ist zwar die Wandstörung ziemlich groß gewählt; wir haben dies jedoch mit Absicht getan, um die Abwandlung des gestörten Stromfeldes recht sinnfällig zu veranschaulichen. Die auftretenden Fourier-Entwicklungen wurden bis zum 11. Glied einschließlich berechnet, was sich als ausreichend erwies². Das Ergebnis der Rechnung sei durch eine Reihe von Schaubildern mitgeteilt.

Die Figuren 4 zeigen die vorgegebene Randstörung (in Form des Wandbuckels) in Abhängigkeit von der Bogenlänge der Wand, die hier durch $\bar{\sigma}$ gegeben wird, und zwar zeigt Figur 4a den Abstand in Normalenrichtung $\Delta n = \Delta r$ gemäß (6.5), Figur 4b die entsprechende Richtungsstörung gemäß (7.1). Die hierdurch be-

Fig. 4a

Fig. 4b

stimmte Geschwindigkeitsänderung $\Delta V = V - \bar{V}$ nach der strengen Methode zufolge (6.9°) ist ausgezogen, und die nach der Näherungsmethode durch Umrechnung aus $(\tilde{I}a_2)$ mit $\bar{\tau} = \bar{T}$ bzw. aus $(\tilde{I}b_2)$ mit $\bar{t} = \bar{T}$ gewonnene ist gestrichelt in Figur 5 gezeichnet. Hieraus ersieht man einmal, daß sich der Charakter der Geschwindigkeitsstörung erheblich von dem der Richtungsstörung unterscheidet. Dabei ist von Bedeutung, daß auch längs des Wandteiles, wo die *ursprüngliche* (ungestörte) Form besteht $\left(\frac{1}{3}\pi \leq |\bar{\sigma}| \leq \pi\right)$, die *Geschwindigkeit* infolge der *Feldeinwirkung* gestört ist. Des weiteren ist die Abweichung der Näherungswerte

¹ Bezogen auf die Vakuumgeschwindigkeit.

² Je größer der exponentielle Parameter λ gewählt wird, um so mehr Fourier-Glieder sind offensichtlich notwendig.

von Interesse. Man sieht, daß unsere Näherungsmethode, abgesehen von der Nachbarschaft der Schallgrenze ($a^* = 0,4104$ für $\kappa = 1,405$), recht befriedigende Ergebnisse liefert. Zum mindesten wird der Charakter der Störung qualitativ völlig richtig wiedergegeben. Die Unsicherheit bei Annäherung an die kritische Schallgeschwindigkeit liegt im Wesen des Näherungsprinzips und wird durch die nicht ganz gerechtfertigte Größe von Γ bzw. ϵ noch erhöht. Das gesamte Ström-

FIG. 5

ungsfeld zeigen die Figuren 6 (streng) bzw. 7 (genähert), die hier aus Gründen der Übersichtlichkeit getrennt gezeichnet sind. Eingetragen sind (ausgezogen)—außer der Wand—Stromlinien nach (6.13) für $\bar{v}_0 = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1$ sowie (strichpunktiert) die Schallgrenze und zum Vergleich (dünn) die entsprechenden (kreisförmigen) Stromlinien, die Schallgrenze sowie die (sich hier nicht schließenden) Girlanden aus Machschen Linien der Grundströmung. Figur 5 läßt bereits vermuten—was nun das Strömungsbild bestätigt—, daß sich der Wandbuckel im Überschallbereich *nicht* einfach unter Erhaltung seiner Form längs Streifen aus Machschen Linien bis zur Schallgrenze fortsetzt. Vielmehr findet ein *Zusammenspiel* von *Richtungs-* und *Geschwindigkeitstörung* statt (worauf bereits auf S.235 hingewiesen wurde), dessen Auswirkung als eine Feldeigenschaft von vornherein schwer zu übersehen ist. So weicht bereits in einiger Entfernung von der Wand die gewellte Form der Stromlinien erheblich von der Wandform ab. Ferner ist hervorzuheben, daß die Veränderung der Schallgrenze im Vergleich zu dem Wandbuckel größere Ausmaße zeigt. Im Unterschallbereich klingt die Störung nach außen hin rasch ab, so daß die Stromlinien dann eine (praktisch) kreisförmige Gestalt annehmen, jedoch liegen diese Kreise etwas verschoben

FIG. 6

gegen die ungestörten Stromlinienkreise³. Die *Lage* der Schallgrenze in Figur 7 unterscheidet sich von der in Figur 6 beträchtlich, dagegen *nicht* ihre *Form* hinsichtlich der Ausbuchtungen und Einstülpungen. Infolge der erheblichen Veränderung der Schallgrenze liegen hier offensichtlich besonders ungünstige Umstände für die Näherungsmethode vor.

9. Eigenwerte und Eigenlösungen. Wie wir gesehen haben, läßt sich jede Randstörung realisieren, die durch eine Fourier-Reihe (bezüglich des Stromlinienwinkels) darstellbar ist, sofern nur alle¹ $R_k \neq 0$ sind. *Verschwindet* jedoch, falls

³ Vgl. hierzu die Ausführungen in Abschnitt 6, S.236.

¹ Praktisch ist das Nichtverschwinden sämtlicher R_k des *approximierenden Fourier-Polynoms* ausreichend, wenn man "hinreichend kleine" Abweichungen nicht mehr berücksichtigt (vgl. hierzu die Ausführungen auf S.235).

$k = n$ (ganzzählig), für $\bar{V} = \bar{V}_n$ die maßgebliche Koeffizientenfunktion $R_n = R_n(\bar{V}_n)$, so lassen sich, wie (6.13) zeigt, nur Störungen *spezieller* Art verwirklichen, bei denen die n -te Komponente der Fourier-Zerlegung ausfällt. Solche Geschwindigkeitswerte $v = \bar{V}_n$ wollen wir "*Eigenwerte*" der Zirkulationsströmung nennen. Betrachten wir etwa eine rein harmonische Störung, die nur aus der n -ten "Oberschwingung" besteht, so muß gemäß (6.13) $\Delta r = 0$ sein, d.h. die Berandung *streng kreisförmig*. Wohl kann aber längs der *ungestörten Wand* eine *Geschwindigkeitsstörung* $\Delta V \neq 0$ bestehen², da in (6.9°) $P_n(\bar{V}_n)$ als die $\cos n\vartheta$ und $\sin n\vartheta$ zugeordnete Koeffizientenfunktion auftritt³. Da jetzt die Freiwerte a_n und b_n willkürlich sind, bleibt die Amplitude der zugehörigen Geschwindigkeitsstörung *unbestimmt*.

FIG. 7

² $\Delta V = 0$ ergäbe den trivialen Fall der identisch verschwindenden Störung.

³ Vgl. hierzu die folgende Eigenwertgleichung (9.1).

Die Eigenwerte $\bar{V}_n$ genügen zufolge (6.11) der Gleichung⁴

$$\bar{V}_n \cdot P_n(\bar{V}_n) = 1 \quad (9.1)$$

und brauchen für ein gewisses n durchaus nicht einfach zu sein. Einige der kleinsten Eigenwerte sind unten aufgeführt. Sie haben bei $v = a^*$ einen Häufungspunkt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_n = a^*$. Die Eigenwerte dürften sich auf den Überschallbereich beschränken.

Der Zusammenhang dieser Eigenwerte mit einer *Periodizitätseigenschaft* des Überschallbereiches läßt sich leicht mit Hilfe unserer Näherungsmethode erkennen. Entsprechende Verhältnisse wie oben liegen in (7.1) vor, falls $\cos(\pi/4 + n\bar{T}_n) = 0$ wird für $\tau = \bar{T} = \bar{T}_n$ und $k = n$. Die Eigenwerte $\bar{T}_n$ genügen also der Bedingung

$$\bar{T}_n = \frac{(m + \frac{1}{4})\pi}{n} \quad (m = 0, \pm 1, 2, \dots), \quad (9.2)$$

wobei man zu beachten hat, daß τ beschränkt ist; denn es gilt allgemein $\tau \leq \tau_{\max} \approx 129^\circ 19'$ (Vakuum).

Zunächst interessiert, inwieweit die *strengen* Eigenwerte mit denen übereinstimmen, die mittels des *Näherungsprinzips* gewonnen sind. Dies zeigt für die jeweils kleinsten Eigenwerte die folgende Zusammenstellung:

n	2	3	4	5	6
$\bar{V}_n$ streng	0,6518	0,5848	0,5511	0,5302	0,5153
genähert ⁵	0,643	0,585	0,554	0,534	0,519

Die Übereinstimmung ist hiernach recht gut und jedenfalls praktisch völlig ausreichend.

Aus (9.2) folgt, daß die Vielfachheit der Eigenwerte mit n wächst, daher muß offenbar eine sehr starke Wellung der Wand ausgeschlossen bleiben. Wir wollen jedoch auf die Eigenwertverteilung nicht näher eingehen. Weiter erkennt man, daß sich für $\bar{T} = \bar{T}_n$ gerade die *Girlanden* der (ungestörten) *Machschen Linien* schließen⁶. Umgekehrt ist diese *Schließungsbedingung äquivalent* mit dem Auftreten von "*Eigenlösungen*", bei denen bestimmte periodische Geschwindigkeitsstörungen längs einer kreisförmigen (ungestörten) Wand von bestimmtem Radius möglich sind. Diesen speziellen Fall hat G. I. TAYLOR [12] behandelt, was wir schon erwähnten⁷. Die *Äquivalenz* ist leicht nachzuweisen (vgl. hierzu Figur 9):

⁴ Logarithmische Differentiation führt unmittelbar auf (6.11) zurück.

⁵ Durch Umrechnung aus $\bar{T}_n$.

⁶ Vgl. im Gegensatz hierzu die Strömungsbilder in Figur 6 oder 7.

⁷ Vgl. S.230.

Sei für $k = n$ und $m = 0$ an der Wand $\bar{T}_n = \frac{\pi}{4n}$. Trifft den beliebigen Wandpunkt $P(\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_p)$ die linksläufige Machsche Linie⁸ $\bar{\xi} = \text{const.} = \bar{\sigma}_p + \frac{\pi}{4n}$, so gilt für die abgehende rechtsläufige $\eta = \bar{\sigma}_p - \frac{\pi}{4n}$ (der Abstand zweier Girlandenspitzen längs der Schallgrenze beträgt $\frac{\pi}{2n}$). Für die n -te Partialstörung von $\Delta\vartheta$ in P ergibt sich dann zufolge $(\tilde{I}'_{a_1})$ jeweils für die beiden Glieder mit gleichen Koeffizienten

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\bar{\sigma}_p + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\bar{\sigma}_p - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin n\bar{\sigma}_p + \sin n\bar{\sigma}_p = 0$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + n\bar{\sigma}_p + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\bar{\sigma}_p - \frac{\pi}{4}\right) = \cos n\bar{\sigma}_p - \cos n\bar{\sigma}_p = 0$$

unabhängig von $\bar{\sigma}_p$, d.h. längs des ganzen Randkreises ist $\Delta\vartheta \equiv 0$.

FIG. 8

Wir haben den *Taylor'schen Fall* für $n = 3$ streng behandelt: Figur 8 zeigt die harmonische Geschwindigkeitsstörung $\Delta V \sim \epsilon \cos 3\vartheta$ längs der kreisförmigen Wand und Figur 9 hierzu das gesamte Strömungsfeld in analoger Darstellungsweise wie bei den Figuren 6, 7. Wie dort sind (außer der Wandstromlinie $\bar{V} =$

⁸ Vgl. S.221 oder [4, (2.17)].

0,585) Stromlinien für $\bar{v}_0 = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1$ eingetragen. Die geschlossene Machsche Girlande der Grundströmung hat hier $4n = 12$ Spitzen. Im übrigen besteht natürlich eine enge Verwandtschaft zwischen diesem und dem vorigen Strömungsbild, so daß sich eine nähere Diskussion erübrigt.

FIG. 9

10. Zweites (allgemeineres) Beispiel. Unserem *zweiten* Anwendungsbeispiel legen wir die Strömung längs einer (symmetrischen) gekrümmten *Schaufel* von unendlicher Ausdehnung zugrunde. Solche Strömungen erscheinen von vornherein interessanter als die recht spezielle Zirkulationsströmung, da hierbei ein in die *Unterschallströmung eingebetteter Überschallbereich* auftritt und die *Wandstromlinie* in *beiden* Geschwindigkeitsbereichen liegt. Auch können Ausschnitte derartiger Strömungsfelder praktisch von großer Bedeutung sein, etwa für die

Beurteilung der Beströmung von Tragflügelprofilen (obwohl es sich hier natürlich um ein Umströmungsproblem handelt). Bei der Behandlung unserer Fragestellung ergibt sich indessen keine grundsätzlich neuartige Erscheinung, auch nicht an den als *kritisch* angesehenen *Austrittsstellen* der Wand aus dem Überschallbereich. Nach unserer Rechnung tritt also dort *keine Singularität* infolge unendlich anwachsender Geschwindigkeitsstörung auf, wie bei den Untersuchungen von BUSEMANN [9, 10] und GUDERLEY [6, 7, 8].

Für die *Grundströmung* setzen wir $k = -5/2$, was nach [4, (8.16)] als Berandung eine hyperbelartige Schaufel mit den asymptotischen Richtungswinkeln $\bar{\vartheta}_\infty = \pm \frac{\pi}{5}$ liefert. Nach [4, (8.15), (8.17), (8.16)] hat man:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -\frac{5}{2} \frac{\bar{v}^{-7/2}}{\bar{\rho}} H_{-5/2}(\bar{w}) \cdot \sin \frac{5}{2} \bar{\vartheta}, \\ \bar{H} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left[-\frac{5}{2} \bar{v}^{-7/2} H_{-5/2}(\bar{w}) + 2\bar{v}^{-3/2} H'_{-5/2}(\bar{w}) \right] \cdot \cos \frac{5}{2} \bar{\vartheta}\end{aligned}\quad (\bar{w} = \bar{v}^2) \quad (\text{II})$$

[mit $\bar{v} = v(\bar{\tau})$ bzw. $\bar{v} = v(\bar{t})$];

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left\{ \frac{2}{3} \bar{v}^{-3/2} H'_{-5/2}(\bar{w}) \cdot \sin \frac{3}{2} \bar{\vartheta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{7} \bar{v}^{-7/2} \left(\frac{5}{2} H_{-5/2}(\bar{w}) - \bar{w} H'_{-5/2}(\bar{w}) \right) \cdot \sin \frac{7}{2} \bar{\vartheta} \right\},\end{aligned}\quad (10.1a)$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left\{ \frac{2}{3} \bar{v}^{-3/2} H'_{-5/2}(\bar{w}) \cdot \cos \frac{3}{2} \bar{\vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{7} \bar{v}^{-7/2} \left(\frac{5}{2} H_{-5/2}(\bar{w}) - \bar{w} H'_{-5/2}(\bar{w}) \right) \cdot \cos \frac{7}{2} \bar{\vartheta} \right\},\end{aligned}\quad (10.1b)$$

was zusammen mit der Beziehung

$$\bar{v}^{-5/2} H_{-5/2}(\bar{w}) \cos \frac{5}{2} \bar{\vartheta} = \bar{\Psi}_0 = \text{const.} \quad (10.2)$$

eine Parameterdarstellung der Stromlinie $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_0$ ergibt.

Diskutiert man die *Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(\bar{\vartheta}, \bar{v})} = \frac{1}{\bar{v}} \left\{ \frac{\bar{a}^2 - \bar{v}^2}{\bar{a}^2} \bar{x}^2 + \bar{H}^2 \right\} \quad \text{mit (II)}, \quad (3.5)$$

so zeigt sich, daß $\bar{v}$ unterhalb eines gewissen Wertes bleiben muß, da sonst $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(\bar{\vartheta}, \bar{v})}$ *nicht definit* bleibt. Dieser Sachverhalt weist auf das Auftreten von *Tollmienschen Grenzlinien* im Überschallbereich hin, die anzeigen, daß die Strömung nicht als Potentialströmung weiter bestehen kann. Durch die Wahl von $\bar{v}_{\max} =$

0,560 als größtmögliche Geschwindigkeit wird erreicht, daß wir im grenzlinienfreien Teil des Überschallbereiches bleiben. Wegen $P_{-5/2}(0,560) = 5,407$ nach (3.2a) folgt für die Wandstromlinie $\bar{\Psi}_0 = 5,407$.

Als *Randstörung* verwenden wir wieder den Ansatz (6.5). Um die Rechnung zu vereinfachen, liege der Wandbuckel *symmetrisch* zur Schaufel¹. Wir wollen uns in dieser Arbeit zunächst damit begnügen, die Berechnung nur nach der *Näherungsmethode* durchzuführen. Daher schreiben wir als Randbedingung die (6.5) entsprechende Richtungsstörung $\Delta\vartheta$ vor. Da $\vartheta = \bar{\sigma}$ das Intervall $-\frac{1}{5}\pi \cdots +\frac{1}{5}\pi$ durchläuft, setzen wir hier an

$$\Delta\vartheta = \Gamma' \cdot \bar{\sigma} e^{-\lambda' \bar{\sigma}} = \frac{5}{2} \frac{\Gamma'}{\sqrt{\pi \lambda' \lambda'}} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{25k^2}{4\lambda'}} \sin 5k\bar{\sigma} \quad (10.3)$$

mit $\lambda' = 6 \cdot 25 = 150$, $\Gamma' = 5$.

Denken wir uns längs der ungestörten Wand (10.2) mit $\bar{\Psi}_0 = 5,407$ als Beziehung zwischen den nebencharakteristischen Koordinaten gegeben²:

$$\bar{T} = \phi(\bar{\sigma}) \quad \text{für} \quad 0 \leq |\bar{\sigma}| \leq |\bar{\sigma}^*| = 0,479 \quad \begin{array}{l} \text{(entspricht dem Schnitt-} \\ \text{punkt von Schall-} \\ \text{grenze und Wand in} \\ \text{der Grundströmung)} \end{array}$$

im Überschallbereich

sowie

$$\bar{T} = F(\bar{s}) \quad \text{für} \quad |\bar{\sigma}^*| \leq |\bar{s}| \leq \frac{\pi}{5} \quad [0 = F(\bar{\sigma}^*) = \phi(\bar{\sigma}^*)]$$

im Unterschallbereich,

so gilt entsprechend (7.1) identisch in $\bar{\sigma}$ bzw. $\bar{s}$ nach (5.3a)

$$\epsilon \cdot \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5k\phi(\bar{\sigma})\right) \cdot \sin 5k\bar{\sigma} = \frac{5}{2} \frac{\Gamma'}{\sqrt{\pi \lambda' \lambda'}} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{25k^2}{4\lambda'}} \cdot \sin 5k\bar{\sigma} \quad (10.4a)$$

$$\text{für} \quad 0 \leq \bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}^*$$

bzw. nach (5.3b)

$$\epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \cdot e^{5kF(\bar{s})} \cdot \sin 5k\bar{s} = \frac{5}{2} \frac{\Gamma'}{\sqrt{\pi \lambda' \lambda'}} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{25k^2}{4\lambda'}} \cdot \sin 5k\bar{s} \quad (10.4b)$$

$$\text{für} \quad \bar{\sigma}^* \leq \bar{s} \leq \frac{\pi}{5}.$$

Die Freiwerte $\bar{b}_k$ sind dabei gegenüber früher anders numeriert (die $\bar{a}_k$ verschwinden infolge der symmetrischen Lage des Wandbuckels).

¹ Dies bedeutet keine grundsätzliche Einschränkung.

² Praktisch in tabellarischer Form.

Zu ihrer Bestimmung denke man sich den linksseitigen Ausdruck von (10.4), der stückweise aus den beiden Funktionen (10.4a), (10.4b) mit stetigem Übergang bei $\bar{\sigma}^*$ besteht, in eine Fourier-Reihe entwickelt. Für die praktische Durchrechnung haben wir freilich diesen Ausdruck durch ein trigonometrisches Polynom von 11 Gliedern approximiert, wobei Übereinstimmung beider Seiten von (10.4)³ an 12 äquidistanten Stellen⁴ $\bar{\sigma}$ bzw. $\bar{s} = \frac{\pi n}{60}$ ($n = 0, 1, \dots, 11$) gefordert wurde. Die gesuchten Entwicklungskoeffizienten $\bar{b}_k$ lassen sich dann aus einem System von—in unserem Falle 11—linearen Gleichungen ermitteln. Ferner ist zufolge (10.4) mit $\lambda' = 150$, $\Gamma' = 5$ $\epsilon = 0,0326$, womit die Pfeilhöhe des Wandbuckels $\Delta n = 0,5.l$ (l Zeicheneinheitlänge) wird. Das berechnete Strömungsfeld zeigt Figur 10. Eingezeichnet sind eine Reihe von Stromlinien (*stark* ausgezogen) sowie die Schallgrenze (*stark* strichpunktiert) mittels⁵ ($\widetilde{1a}_2$) mit $\nu = 0$ bzw. ($\widetilde{1b}_2$) mit $N = 0$. Zum Vergleich sind in *dünnere* Strichart die entsprechenden Stromlinien, die Schallgrenze sowie die symmetrisch liegende Machsche Girlande für die *Grundströmung* eingetragen. Man erkennt, daß sich bei Entfernung von der Wand der Randbuckel wie beim vorigen Beispiel in gewellte Stromlinien “auflöst”, wobei die Wellung im Unterschallbereich sehr rasch abklingt. In der Nebenfigur ist die Geschwindigkeitsstörung ΔV zufolge ($\widetilde{1a}_2$) bzw. ($\widetilde{1b}_2$) längs der Wand aufgetragen, die in der Nachbarschaft der Austrittsecken des Überschallbereiches zwar hin und her pendelt, jedoch dort keinen übermäßigen Anstieg aufweist.

11. Abschließende Bemerkungen. Unsere an Hand spezieller aber typischer Beispiele gemischter Strömungsfelder durchgeführten Untersuchungen haben im Gegensatz zu dem von BUSEMANN und GUDERLEY vertretenen Standpunkt ergeben, daß zu bekannten Lösungen wohl “Nachbarlösungen”, d.h. solche mit willkürlich etwas abgewandelter Randbedingung, existieren können, bei denen für die dargestellten Strömungen der *stetige Schalldurchgang erhalten* bleibt. Hingegen wird nichts ausgesagt, ob darüber hinaus diese Nachbarlösungen im ganzen Feld analytische Funktionen bleiben.

Im Ergebnis mag wohl überraschen, welch erhebliche *Umbildung* das ursprüngliche Strömungsfeld durch eine nur mäßige Randstörung erfahren kann (vgl. besonders das erste Beispiel), sofern sie im Überschallbereich wirkt. Dies kann darauf hindeuten, daß die Störung weder *zu groß* sein darf noch der Grundströmung *zu unangepaßt* (etwa im Falle sehr starker Wellungen). Die Störung hatten wir dabei der Einfachheit halber durch eine *analytische* Funktion dargestellt, was aber keineswegs notwendig ist. Auch z.B. *Krümmungsunstetigkeiten* ließen sich ohne weiteres behandeln, da es ja nur auf die Entwickelbarkeit des Störungsausdruckes in eine *Fourier-Reihe* ankommt.

³ Die rechte Seite wird dabei natürlich durch den geschlossenen Ausdruck (10.3) ersetzt.

⁴ Bei $\bar{\sigma} = 0$ besteht aus Symmetriegründen die Übereinstimmung von selbst.

⁵ Vgl. hierzu die Bemerkungen auf S.229.

Ganz *andersartig* liegen die Verhältnisse aber bei einer *beiderseitig* begrenzten Strömung, also in einem *Kanal*; denn hier kommt es ja auf das *Zusammenspiel* der *beiden Wandeinflüsse* an. Daher müßte offenbar, wenn man den obigen Beispielen entsprechende Bedingungen schaffen wollte, die Störung der einen Wand

FIG. 10

speziell auf die der anderen Wand *abgestimmt* sein, was in praktischen Fällen kaum eintreten wird. Somit ist es keineswegs überraschend, daß man in Windkanälen die Rückkehr der Überschallströmung in den Unterschallbereich auf *unstetige* Weise (mittels eines *Verdichtungsstoßes*) beobachtet.

Dem Verfasser ist es ein aufrichtiges Bedürfnis, seinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. W. TOLLMIESEN für das fördernde Interesse zu danken, das er der Durchführung dieser Untersuchung entgegen gebracht hat. Auch Herrn cand.phys. K. KIRDE gebührt Dank für wertvolle Unterstützung bei den numerischen Rechnungen.

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung
und Universität Göttingen

LITERATUR

- [1] A. BETZ: Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit in der Nähe einer Wand bei un stetiger Änderung der Krümmung. *Luftfahrtforschung* 19 (1942), 129–131.
- [2] W. TOLLMIESEN: The direct hodograph method in the theory of the flow of compressible fluids. *Reissner Anniversary Volume*, Verlag J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan USA 1949, 89–110.
- [3] W. TOLLMIESEN: Machsches Netz und direkte Hodographenmethode beim Studium von Strömungssingularitäten. Erscheint demnächst in *Z. angew. Math. Mech.*
- [4] M. SCHÄFER: Eine einheitliche Charakteristikenmethode zur Behandlung gemischter Unterschall-Überschallströmungen. *Journ. Rational Mech. Anal.* 2 (1953), 383–412.
- [5] M. SCHÄFER: Über die Berechnung von kleinen stationären Störungen in einer gemischten Überschall-Unterschallströmung mittels einer einheitlichen Charakteristikenmethode. Vortragsauszug in *Z. angew. Math. Mech.* 30 (1950), 271–272.
- [6] G. GUDERLEY: *On the transition from a transonic potential flow to a flow with shocks*. Wright Field Report F-TR-2160-ND.
- [7] G. GUDERLEY: *Two-dimensional flow patterns with a free stream Mach number close to 1*. AF Tech. Report No. 6343.
- [8] G. GUDERLEY: On the Presence of Shocks in Mixed Subsonic-Supersonic Flow Patterns. *Advances Appl. Mech.* III (1953), Academic Press Inc., New York, N.Y., 145–184.
- [9] A. BUSEMANN: *The problem of drag at high subsonic speeds*. Translation 184, British Ministry of Aircraft Production, 1947.
- [10] A. BUSEMANN: The Nonexistence of Transonic Potential Flow. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, IV. McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, 1953, 29–39.
- [11] E. KAMKE: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* Bd. 1, 3. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1944.
- [12] G. I. TAYLOR: Recent work on the flow of compressible fluids. *J. London Mathem. Soc.* 5 (1930), 224–240. Deutsche Übersetzung in *Z. angew. Math. Mech.* 10 (1930), 334–345.