Singuläre Störungstheorie partieller Differentialgleichungen

DIETRICH MORGENSTERN

Vorgelegt von EBERHARD HOPF

INHALT

O.	EINLEITUNG	
	Problemstellung, Beschreibung der Methode und Vergleich der Ergebnisse mit anderen Resultaten	204
I.	ALLGEMEINE SÄTZE IM HILBERT'SCHEN RAUM	
	1. Gewöhnliche Variationsprobleme	205
	2. Eigenwertprobleme	206
II.	ANWENDUNGEN DER ALLGEMEINEN SÄTZE AUF RANDWERTAUFGABEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	
	3. Randwertaufgaben zweiter Ordnung	209
	4. Randwertaufgaben vierter Ordnung	210
III.	UNTERSUCHUNGEN ÜBER KONVERGENZ IM INNERN	
	5. Gleichmäßige Konvergenz der Funktionen im Innern	212
	6. Mittelkonvergenz von Ableitungen im Innern . . .	214
IV.	LITERATURVERZEICHNIS	216

O. *Einleitung*

Problemstellung, Beschreibung der Methode und Vergleich der Ergebnisse mit anderen Resultaten.

Wird bei einem Differentialgleichungsproblem die Abhängigkeit von einem Parameter ϵ untersucht, so spricht man von regulärer Störungstheorie, solange ϵ weder Typ noch Ordnung der Differentialgleichung beeinflusst; sonst von singulärer Störungstheorie.

Meine hier vorliegenden Untersuchungen betreffen singuläre Störungstheorie linearer partieller Differentialgleichungen, bei denen im Grenzfall $\epsilon = 0$ die Ordnung erniedrigt ist. Dabei verwende ich die zu diesen Rand- oder Eigenwertproblemen gehörenden Variationsprobleme. Die Sätze werden zunächst in allgemeiner Weise durch Benutzung der Sprache des Hilbert'schen Raumes formuliert. Der Beweisgedanke läßt sich etwa so beschreiben:

Die zu untersuchenden Gleichungen $L_\epsilon[u] = 0$ werden als Euler-Lagrange'sche Gleichungen von Variationsproblemen $T_\epsilon[u] = \text{Minimum}$ aufgefaßt. Die Lösungen des entarteten Problems $T_0[u] = \text{Minimum}$ oder ihre Näherungen werden als Vergleichsfunktionen für das Problem $T_\epsilon[u] = \text{Minimum}$ benutzt, um damit Abschätzungen dieses Ausdrucks zu erhalten, aus denen die gesuchte Konvergenz gefolgert werden kann.

Im Abschnitt II werden die allgemeinen Sätze auf einige Beispiele partieller Differentialgleichungen angewendet. Dabei ergibt sich zunächst nur die Mittelkonvergenz der Lösungen.

Durch Anwendung eines Kunstgriffs—Zurückführung auf subharmonische Funktionen—wird aus der Mittelkonvergenz auf die gleichmäßige Konvergenz in inneren Teilbereichen geschlossen. Mittels Abschätzungen, die sich als Folge der Euler'schen Differentialgleichungen ergeben, wird auch die Mittelkonvergenz höherer Ableitungen für innere Teilbereiche nachgewiesen.

Über das Verhalten am Rande wird nichts ausgesagt.

Die hier verwandte Methode hat den Vorzug, auf beliebige Dimension und auch auf höhere Ordnung der Differentialgleichungen anwendbar zu sein und erlaubt wahrscheinlich auch, manche nichtlinearen Probleme zu behandeln.

Die bisher verwandte Methode [1,2,4,5], die Entwicklung in asymptotische Reihen, wurde im Allgemeinen nur auf Randwertaufgaben zweiter Ordnung in zwei- oder dreidimensionalen Bereichen angewandt. Die einzige Ausnahme [3] bezieht sich auf den sehr speziellen Fall $\Delta\Delta u + \lambda u = \lambda^k \psi$. Aussagen über Konvergenz höherer Ableitungen wurden dabei nicht gemacht. Eigenwertprobleme sind meines Wissens bisher noch nicht in den Kreis der Betrachtungen gezogen worden.

I. Allgemeine Sätze im Hilbert'schen Raum

1. Gewöhnliche Variationsprobleme

Gegeben sei ein linearer Raum¹ $\mathfrak{H}$ (hier in Abschnitt 1 noch nicht als Hilbert'scher vorausgesetzt), ein Teilraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$ seien Untermannigfaltigkeiten² in $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}_1$. In $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}$ seien die positiv-definiten quadratischen³ Formen A bzw. B definiert.

Die Variationsprobleme ($\epsilon > 0$)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \epsilon A(\varphi) + B(\varphi - \chi) &= \text{Min. } \varphi \in \mathfrak{D}_1 \quad (\epsilon > 0, \chi \in \mathfrak{H} \text{ fest}) \\ B(\varphi - \chi) &= \text{Min. } \varphi \in \mathfrak{D} \end{aligned}$$

seien lösbar; die Lösungen heißen u_ϵ bzw. v . Ich stelle weiterhin folgende

Approximationsbedingung: $\mathfrak{D}_1$ liege in $\mathfrak{D}$ B -dicht. Das soll heißen, daß es in jeder δ -Umgebung der durch B erzeugten Hilbert-Raum-Topologie von jedem $\varphi \in \mathfrak{D}_1$ noch Elemente aus $\mathfrak{D}$ gibt, für die also A existiert. Diese Bedingung ist sicherlich erfüllt, wenn $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$ ist.

Hauptsatz A. *Unter den angeführten Bedingungen gilt*

$$u_\epsilon \rightarrow v \quad \text{in der } B \text{ Metrik für } \epsilon \rightarrow 0.$$

Beweis: Ich wähle $\varphi \in \mathfrak{D}_1$ als δ -Approximation von $v - \chi$, d.h.

$$(1.2) \quad B(\varphi - (v - \chi)) < \delta.$$

Dann folgt aus der Dreiecksungleichung für die B -Metrik, wenn $B(v - \chi)$ mit b und $A(\varphi)$ mit a bezeichnet wird,

$$(1.3) \quad B(\varphi) \leq (\sqrt{b} + \sqrt{\delta})^2.$$

Daraus folgt

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \epsilon A(\varphi) + B(\varphi - \chi) &\leq \epsilon a + (\sqrt{b} + \sqrt{\delta})^2 = \epsilon a + b + o(\delta) \\ &\rightarrow b + o(\delta) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und also gilt unsomewhat wegen der Minimaleigenschaft der u_ϵ

$$(1.5) \quad \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon A(u_\epsilon) + B(u_\epsilon - \chi) \leq b + o(\delta).$$

¹ Alle Räume, Operatoren usw. sind reell.

² D.h. sie genügen der Bedingung, daß aus $f_i \in \mathfrak{D}$ folgt $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 \in \mathfrak{D}$ für alle λ .

³ Für A heißt das: es gibt eine bilineare Form $A(\varphi, \psi)$ mit $A(\varphi) = A(\varphi, \varphi)$. Falls die bilineare Form als symmetrisch angenommen wird, ist sie dadurch eindeutig bestimmt. Positiv-definit bedeutet $A(\varphi) \geq 0$.

Wegen der Definität von ϵA und wegen $B(\varphi - \chi) \geq b$ und weil δ beliebig ist, also

$$(1.6) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} B(u_\epsilon - \chi) = b.$$

Hieraus ergibt sich mit der im Zusammenhang mit dem Dirichlet'schen Integral üblichen Schlußweise die Behauptung, denn wegen der Minimaleigenschaft ist zunächst für alle t , da $(1 - t)v + tu_\epsilon \in \mathfrak{D}$ liegt,

$$(1.7) \quad B(v - \chi + t(u_\epsilon - v)) \geq b;$$

daher (Ableitung nach t bei $t = 0$ verschwindet)

$$(1.8) \quad B(v - \chi, u_\epsilon - v) = 0.$$

Und dann wird

$$(1.9) \quad B(u_\epsilon - \chi) = B((u_\epsilon - v) + v - \chi) = B(u_\epsilon - v) + B(v - \chi),$$

woraus die Behauptung nach (1.6) ersichtlich ist.

Zusatz. *Es gilt*

$$(1.10) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon A(u_\epsilon) = 0 \quad (\epsilon > 0).$$

Dies folgt ebenfalls aus (1.5).

Mit derselben Beweismethode läßt sich auch folgender allgemeinerer Satz beweisen:

Die B -Konvergenz $u_\epsilon \rightarrow v$ für $\epsilon \rightarrow 0$ gilt für die Lösungen von

$$(1.11) \quad A(\epsilon; \varphi) + B(\varphi - \chi) = \text{Min.} \quad (u_\epsilon \in \mathfrak{D}_\epsilon),$$

wo jetzt $A(\epsilon)$ eine von ϵ in allgemeinerer Weise abhängende Schar positiv-definiter quadratischer Formen mit Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_\epsilon$ ist, für die $\mathfrak{D}_{\epsilon_1} \subset \mathfrak{D}_{\epsilon_2}$ wenn $\epsilon_1 > \epsilon_2$ und

$$(1.12) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(\epsilon; \varphi) = 0$$

vorausgesetzt wird.

2. Eigenwertprobleme

Für die Eigenwerttheorie benutze ich folgende unabhängige Festlegung der n -ten Eigenwerte, die der Courant'schen Fassung (Maximum-Minimum-Charakterisierung) analog ist:

Sei K ein linearer, selbstadjungierter, positiv-definiter Operator in einem Hilbert'schen Raum $\mathfrak{H}$, und sei K^{-1} vollstetig,

$$(2.1) \quad K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \quad (0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots)$$

und φ_n seien alle orthonormierten Eigenvektoren.

Dann ist

$$(2.2) \quad \lambda_n = \inf. \text{ aller } \Lambda, \text{ für die es einen } n\text{-dimensionalen Raum } \mathfrak{R}_n \text{ gibt, dessen normierte Elemente } (Kx, x) \leq \Lambda \text{ ergeben.}$$

Dabei genügt es, die $\mathfrak{R}_n$ aus einer linearen Mannigfaltigkeit zu wählen, die den Definitionsbereich von K enthält.

Hauptsatz B. Sind zusätzlich zu den Voraussetzungen des Hauptsatzes A die Operatoren¹ A^{-1} und B^{-1} vollstetig, so gilt für die Eigenwerte $\lambda_n(\epsilon)$ von $\epsilon A + B$ und μ_n von B

$$(2.3) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_n(\epsilon) = \mu_n \quad (\epsilon > 0).$$

Beweis: Wegen der Approximationsbedingung, angewandt auf $\psi_1, \dots, \psi_n$, die Eigenfunktionen von B , und (2.2) gibt es für jedes δ noch einen $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{D}_1$ derart, daß für jedes normierte Element $x \in R_n$ gilt, wie man sich leicht klarmacht,

$$(2.4) \quad (Bx, x) \leq \mu_n + \delta, \quad (Ax, x) \leq a.$$

Dann wird

$$(2.5) \quad ((\epsilon A + B)x, x) \leq \epsilon a + \mu_n + \delta \rightarrow \mu_n + \delta \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0,$$

also $\lim \lambda_n(\epsilon) \leq \mu_n + \delta$. Da δ beliebig ist und da $\epsilon A + B$ aus B durch Addition des positiv-definiten ϵA entsteht, also $\lambda_n(\epsilon) \geq \mu_n$ gelten muß, folgt (2.3).

Ergänzungssatz. Falls $\mu_n < \mu_{n+1}$ ist, so strebt bei $\epsilon \rightarrow 0$ $\varphi_\nu(\epsilon)$ ($\nu \leq n$) gegen den n -dimensionalen Raum, der von $\psi_1 \dots \psi_n$ aufgespannt wird.

Beweis. Es gelte

$$(2.6) \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{\nu_1} < \mu_{\nu_1+1} = \dots = \mu_{\nu_2} < \dots < \mu_{n+1}.$$

R sei der von $\psi_2, \dots, \psi_n$ aufgespannte Raum; ich will zeigen, daß die Länge des Lotes $\chi_n(\epsilon)$ von $\varphi_n(\epsilon)$ auf R nach Null strebt. Ich schreibe

$$(2.7) \quad \varphi_i(\epsilon) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(\epsilon) \psi_k + \chi_i(\epsilon) \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit

$$(2.8) \quad \sum_{k=1}^n |a_{ik}(\epsilon)|^2 + ||\chi_i(\epsilon)||^2 = 1.$$

Indem ich Induktion über die Folge $\nu_1, \nu_2, \dots, n$ anwende², nehme ich als

¹ Die zu den Formen gehörenden Operatoren werden in gleicher Weise bezeichnet.

² Dabei ist zu bedenken, daß die Indexfolge innerhalb eines "Blocks" gleicher Eigenwerte beliebig ist.

bereits bewiesen an:

$$(2.9) \quad \sum_{k=\nu_j+1}^{\nu_{j+1}} |a_{ik}(\epsilon)|^2 \rightarrow \delta_{i\nu_{j+1}} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Wegen der Orthogonalität der $\varphi_i(\epsilon)$ gilt dann (2.9) auch für $i = n$, solange $\mu_{\nu_{j+1}} < \mu_n$ ist. Aus der Minimaleigenschaft von μ_{n+1} folgt

$$(2.10) \quad (B\varphi_\nu(\epsilon), \varphi_\nu(\epsilon)) \geq \sum_{k=1}^n \mu_k |a_{\nu k}(\epsilon)|^2 + \mu_{n+1} \|\chi_\nu(\epsilon)\|^2.$$

Da andererseits aber in (2.3) bewiesen wurde

$$\lambda_\nu(\epsilon) = \epsilon(A\varphi_\nu(\epsilon), \varphi_\nu(\epsilon)) + (B\varphi_\nu(\epsilon), \varphi_\nu(\epsilon)) \rightarrow \mu_\nu,$$

so folgt wegen $(\epsilon A\varphi, \varphi) \geq 0$ aus (2.10) und (2.9) wegen (2.8) $\|\chi_\nu(\epsilon)\| \rightarrow 0$. q.e.d.

II. Anwendungen der allgemeinen Sätze auf Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen

3. Randwertaufgaben zweiter Ordnung.

Gegeben sei ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit zweimal stetig differenzierbarem Rand¹, eine Funktion $b(x) \in C^1$ ² und eine Randfunktion $f \in C^1$. Die Randwertaufgabe

$$(3.1) \quad -\epsilon \Delta u + u = b(x), \quad [u] = f$$

ist bekanntlich dem Variationsproblem (1.1) äquivalent, falls⁴

$$\mathfrak{D} = C^0$$

$$\mathfrak{D}_1 = \text{alle Funktionen aus } C^1 \text{ mit } [u] = f$$

$$\chi = b$$

und die quadratischen Formen⁵

$$A(\varphi) = \int (\text{grad } \varphi)^2$$

$$B(\varphi) = \int \varphi^2.$$

Um nachzuweisen, daß die Approximationsbedingung erfüllt ist, genügt es, Funktionen $u_\delta \in C^1$ anzugeben mit $[u_\delta] = f$ und $B(u_\delta) < o(\delta)$.

Dies wird geleistet durch

$$(3.2) \quad u_\delta = \begin{cases} f(s) \left(1 - \frac{n}{\delta}\right) & (n \leq \delta) \\ 0 & (n > \delta) \end{cases}$$

wobei δ eine hinreichend kleine Konstante ist, n eine vom Rande her auf der Normalen nach innen zählende Koordinate, und s die Randpunkte bezeichnet. Hauptsatz A ergibt dann

Satz 1. Die Lösungen $u(\epsilon)$ von

$$(3.3) \quad -\epsilon \Delta u + u = b(x), \quad [u] = f \quad (\epsilon > 0)$$

streben für $\epsilon \rightarrow 0$ im quadratischen Mittel gegen Null.

¹ Mögliche Abschwächungen dieser Voraussetzungen werden nicht weiter verfolgt, um die Anwendungen der einfachen Gedanken nicht zu verdunkeln.

² Es bedeute C^p die Menge der auf der Abschließung von $\mathfrak{G}$ $p - 1$ mal stetig differenzierbaren Funktionen mit stückweise stetigen p -ten Ableitungen.

³ $[u]$ bedeute immer die Randwerte.

⁴ $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1$ seien die von $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}_1$ aufgespannten Räume.

⁵ Alle Integrale erstrecken sich über $\mathfrak{G}$, solange nicht anders angegeben.

Ein Eigenwertproblem läßt sich in diesem einfachen Fall noch nicht formulieren.

4. Randwertaufgaben vierter Ordnung

Der Rand des Gebietes sei jetzt dreimal stetig differenzierbar, $p(x) \in \mathfrak{C}^2$, $a(x) \in \mathfrak{C}^1$, $b(x) \in \mathfrak{C}^1$ und f, g Randfunktionen $\in \mathfrak{C}^2$, außerdem $p(x) \geq 0$ und $a(x) \geq 0$.

Dann betrachte ich das Randwertproblem

$$(4.1) \quad \epsilon \Delta(p(x) \Delta u) - \Delta u + a(x)u = b(x), \quad [u] = f, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = g.$$

Dies gehört zu dem Variationsproblem (1.1), wenn ich setze¹

$\mathfrak{D} =$ alle Funktionen aus $\mathfrak{C}^1$ mit $[u] = f$

$\mathfrak{D}_1 =$ alle Funktionen aus $\mathfrak{C}^2$ mit $[u] = f$ und $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = g$

$\chi =$ Lösung von $-\Delta \chi + a(x)\chi = b(x)$ mit beliebigen Randbedingungen

$A(\varphi) = \int p(x)(\Delta \varphi)^2$

$B(\varphi) = \int (\text{grad } \varphi)^2 + a(x)\varphi^2$.

Die Approximationsbedingung ist erfüllt, wenn ich Funktionen $u_\delta \in \mathfrak{C}^2$ mit $[u_\delta] = 0$ und $\left[\frac{\partial u_\delta}{\partial n} \right] = g$ sowie $B(u_\delta) < o(\delta)$ angebe.

Dies wird geleistet durch

$$(4.2) \quad u_\delta = \begin{cases} \frac{-n^2 + 2n\delta}{2\delta} g(s) & \text{für } 0 \leq n \leq \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\delta \\ \frac{[n - (1 + \sqrt{2})\delta]^2}{2\delta} g(s) & \text{für } \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\delta \leq n \leq (1 + \sqrt{2})\delta \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wenn wieder n eine Koordinate in Richtung der inneren Randnormalen ist und s den Randpunkt bezeichnet. Hauptsatz A ergibt dann

Satz 2. Die Lösungen $u(\epsilon)$ von

$$(4.3) \quad \epsilon \Delta(p(x) \Delta u) - \Delta u + a(x)u = b(x), \quad [u] = f, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = g \quad (\epsilon > 0)$$

streben bei $\epsilon \rightarrow 0$ im quadratischen Mittel gegen die Lösung von

$$(4.4) \quad -\Delta v + a(x)v = b(x), \quad [v] = f.$$

¹ Die erwähnte Verallgemeinerung des Hauptsatzes A erschlosse den allgemeineren Fall $\Delta(p(\epsilon, x) \Delta u) - \Delta u + a(x)u = b(x)$ mit $p(\epsilon, x) \geq 0$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\epsilon, x) = 0$.

Zum Beweis ist nur nachzutragen, daß die Leray-Poincaré'sche Ungleichung

$$(4.5) \quad \int \varphi^2 \leq C_{\mathfrak{G}} \cdot \int (\text{grad } \varphi)^2$$

aus der B -Konvergenz auf die gewöhnliche Mittelkonvergenz schließen läßt.

Aus dem Hauptsatz B folgt

Satz 3. Die Eigenwerte $\lambda_n(\epsilon)$ von

$$(4.6) \quad \epsilon \Delta(p(x) \Delta \varphi) - \Delta \varphi + a(x) \varphi - \lambda \varphi = 0^2, \quad [\varphi] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = 0 \quad (\epsilon > 0)$$

streben bei $\epsilon \rightarrow 0$ gegen die Eigenwerte μ_n von

$$(4.7) \quad -\Delta \psi + a(x) \psi - u \psi = 0, \quad [\psi] = 0,$$

und die entsprechenden Eigenfunktionen $\varphi_n(\epsilon)$ konvergieren gegen die von $\psi_1, \dots, \psi_n$ aufgespannten Räume, insbesondere $\varphi_n(\epsilon)$ gegen ψ_n , falls μ_n einfach ist.

² Der Summand $a\varphi$ ist selbstredend nur von Bedeutung, falls a nicht konstant ist.

III. Untersuchungen über Konvergenz im Innern

5. Gleichmäßige Konvergenz der Funktionen im Innern.

Um die gleichmäßige Konvergenz in jedem inneren abgeschlossenen Teilbereich¹ von $\mathfrak{G}$ für die Lösungen der in II behandelten Differentialgleichungen nachzuweisen, wende ich folgenden Kunstgriff an:

Ich bilde eine Hilfsfunktion w_* als Summe von Gliedern, die u_* und dessen Ableitungen enthalten und als Folge der Mittelkonvergenz und des Zusatzes zum Hauptsatz A im L^1 -Mittel gegen Null strebt. Außerdem wird diese Funktion als subharmonisch nachgewiesen. Wegen der Mittelwertungleichung für subharmonische Funktionen folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz in Innern für w_* und wegen des Aufbaus auch die von u_* .

Im Falle $-\epsilon \Delta u + u = 0$ setze ich²

$$(5.1) \quad w = u^2.$$

Dann wird

$$(5.2) \quad \frac{1}{2} \Delta w = u \Delta u + (\text{grad } u)^2 \geq u \Delta u = \frac{u^2}{\epsilon} \geq 0$$

und die obige Überlegung ergibt

Satz 4. *Die Lösungen von*

$$(5.3) \quad -\epsilon \Delta u + u = 0, \quad [u] = f, \quad (\epsilon > 0)$$

streben bei $\epsilon \rightarrow 0$ im Innern von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig nach Null.

Im Fall

$$(5.4) \quad \epsilon \Delta \Delta u - \Delta u = 0, \quad [u] = f, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = g$$

kann ich ohne Einschränkung (Subtraktion einer harmonischen Funktion mit Randwerten f) $f = 0$ annehmen.

Dann bilde ich

$$(5.5) \quad w = (1 - \epsilon)u^2 + \epsilon(\Delta u - u)^2.$$

Um einzusehen, daß auch der zweite Summand im L^1 -Mittel nach Null strebt, beachte man, daß $\epsilon \int (\Delta u)^2 \rightarrow 0$ nach dem Zusatz zum Hauptsatz A, und wende die Schwarz'sche Ungleichung an.

¹ Kurz als gleichmäßige Konvergenz im Innern bezeichnet.

² Zur einfacheren Schreibweise setze ich u statt u_* und w statt w_* .

Damit wird

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta w &\geq (1 - \epsilon)u\Delta u + (\epsilon\Delta\Delta u - \epsilon\Delta u)(\Delta u - u) \\
 (5.6) \quad &= (1 - \epsilon)u\Delta u + (1 - \epsilon)\Delta u(\Delta u - u) \\
 &= (1 - \epsilon)(\Delta u)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Es folgt also

Satz 5. *Die Lösungen $u(\epsilon)$ von*

$$(5.7) \quad \epsilon\Delta\Delta u - \Delta u = 0, \quad [u] = f, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = g \quad (\epsilon > 0)$$

streben im Innern gleichmäßig gegen die Lösungen von

$$(5.8) \quad -\Delta v = 0, \quad [v] = f.$$

Im Fall

$$(5.9) \quad \epsilon\Delta\Delta u - \Delta u + au = 0, \quad [u] = f, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = g \quad (a = \text{konst.})$$

nehme ich ohne Einschränkung $a = 1$ und betrachte die Hilfsfunktion

$$(5.10) \quad w = (1 - \epsilon)(u - v)^2 + \epsilon(\Delta u - u)^2 + \epsilon v^2.$$

Für sie wird

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta w &\geq (1 - \epsilon)(u - v)(\Delta u - \Delta v) + (\epsilon\Delta\Delta u - \epsilon\Delta u)(\Delta u - u) + \epsilon\Delta v \\
 &= (1 - \epsilon)(u - v)(\Delta u - v) + ((1 - \epsilon)\Delta u - u)(\Delta u - u) + \epsilon v^2 \\
 (5.11) \quad &= \left\{\frac{u^2}{2} - u\Delta u + \frac{(\Delta u)^2}{2}\right\} + \left\{\frac{u^2}{2} - (1 - \epsilon)uw + \frac{(1 - \epsilon)^2}{2}v^2\right\} \\
 &\quad + \left\{\frac{1 - 2\epsilon}{2}(\Delta u)^2 - (1 - \epsilon)\Delta u \cdot v + \frac{1 + 2\epsilon - \epsilon^2}{2}v^2\right\}.
 \end{aligned}$$

Jede dieser Klammern ist eine positiv-definite quadratische Form in u und Δu bzw. u und v bzw. Δu und v , die letzte weil die Diskriminante $2\epsilon - 6\epsilon^2 + 2\epsilon^4$ positiv ist für hinreichend kleines ϵ . Damit folgt wieder wie bisher

Satz 6. *Die Lösungen von*

$$(5.12) \quad \epsilon\Delta\Delta u - \Delta u + au = 0 \quad (a = \text{konst.}), \quad [u] = f, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = g \quad (\epsilon > 0)$$

streben bei $\epsilon \rightarrow 0$ im Innern gleichmäßig gegen die Lösung von

$$-\Delta v + av = 0, \quad [v] = f.$$

6. Mittelkonvergenz von Ableitungen im Innern.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein kompakter Teilbereich von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}_1$ eine mit ihrer Abschließung noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegende Umgebung von $\mathfrak{B}$. $h \geq 0$ sei eine ganz glatte Funktion mit $h = 1$ in $\mathfrak{B}$ und $h = 0$ außerhalb $\mathfrak{B}_1$.

Im Falle der Differentialgleichung

$$(6.1) \quad -\epsilon \Delta u + u = 0$$

ergibt dann der Green'sche Satz¹ unter Benutzung der Differentialgleichung (6.1)

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} u_i u_i &\leq \int h u_i u_i = \frac{1}{2} \int h_{i,i} u u - \int h u_{i,i} u \\ &= \frac{1}{2} \int h_{i,i} u u - \frac{1}{\epsilon} \int h u u \leq H \int u^2, \end{aligned}$$

wo H eine nur von dem Teilbereich $\mathfrak{B}$ und der Hilfsfunktion h abhängende Schranke bezeichnet. Aus der bewiesenen Mittelkonvergenz von u ergibt sich also die Mittelkonvergenz der Ableitungen in jedem Teilbereich. Da diese Ableitungen derselben Differentialgleichung genügen, folgt daraus wieder die Mittelkonvergenz der zweiten Ableitungen usw. und ich erhalte

Satz 7. Für die Lösungen $u(\epsilon)$ von

$$(6.3) \quad -\epsilon \Delta u + u = 0, \quad [u] = f \quad (\epsilon > 0)$$

streben bei $\epsilon \rightarrow 0$ alle Ableitungen im Mittel in jedem kompakten Teilbereich gegen Null.

Für den Fall der Differentialgleichung

$$(6.4) \quad \epsilon \Delta \Delta u - \Delta u + au = 0, \quad [u] = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = g \quad (a = \text{konst.})$$

benutze ich zunächst folgende Umformung

$$(6.5) \quad \epsilon \int h u_{i,i} u_{i,i} = -\epsilon \int h_{i,i} u_{i,i} u_{i,i} - \int h u_{i,i} u_{i,i} + a \int h u_{i,i} u$$

¹ Indizes bedeuten Differentiation. Summenvorschrift!

und weiter

$$(6.6) \quad \epsilon \int h u_{iik} u_{lik} + \int h u_{iil} u_{lik} = \frac{1}{2} \epsilon \int h_{kk} u_{ii} u_{lik} - a \int h_i u_i u - a \int h u_i u_i .$$

Mit den Abkürzungen

$$(6.7) \quad B_0 = \left(\int_{\mathfrak{B}_1} u^2 \right)^{1/2}, B_1 = \left(\int_{\mathfrak{B}_1} u_i^2 \right)^{1/2}, B_2 = \left(\int_{\mathfrak{B}_1} u_{ii}^2 \right)^{1/2}, B_3 = \left(\int_{\mathfrak{B}_1} u_{iik}^2 \right)^{1/2},$$

und entsprechend B_i^* für Integrale über $\mathfrak{B}$ gilt daher

$$(6.8) \quad \epsilon B_3^{*2} + B_2^{*2} \leq H \epsilon B_2^2 + H a B_0 B_1 + H a B_1^2$$

und aus dem bereits bekannten

$$(6.9) \quad B_0 \rightarrow 0, \quad B_1 \rightarrow 0, \quad \epsilon B_2^2 \rightarrow 0$$

folgt

$$(6.10) \quad B_2^* \rightarrow 0, \quad \epsilon B_3^{*2} \rightarrow 0.$$

Dies gilt für jeden Teilbereich. Benütze ich daher die ähnlichen Umformungen

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \int h u_{iik} u_{jik} &= - \int h_k u_{ii} u_{jik} - \int h u_{iik} u_{jik} = \frac{1}{2} \int h_{kk} u_{ii} u_{ji} - \int h u_{iik} u_{jik} \\ \epsilon \int h u_{iik} u_{jil} &= \int h u_{iik} u_{jil} + a \int h u_{il} u_{jil} + a \int h_i u_i u_{jil} \end{aligned}$$

also

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \epsilon \int h u_{iik} u_{jil} + \int h u_{iik} u_{jik} \\ = \frac{1}{2} \int h_{kk} u_{ii} u_{ji} - a \int h u_{il} u_{ji} - 2a \int h_i u_i u_{ji} - a \int h_{il} u u_{ji} , \end{aligned}$$

so habe ich die neue Ungleichung

$$(6.13) \quad \epsilon B_4^{*2} + B_3^{*2} \leq H B_2^2 + a H B_2^2 + a H B_1 B_2 + a H B_0 B_2 ,$$

aus der weiter folgt

$$(6.14) \quad B_3^* \rightarrow 0, \quad \epsilon B_4^{*2} \rightarrow 0.$$

Da nun Δu derselben Gleichung wie u genügt, geht das Verfahren jetzt iterativ weiter und ich erhalte

Satz 8. *Für die Lösungen von*

$$(6.15) \quad \epsilon \Delta u - \Delta u + au = 0, \quad [u] = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = g \quad (a = \text{konst.}) \quad \epsilon > 0$$

gilt die Mittelkonvergenz bei $\epsilon \rightarrow 0$ in jedem kompakten Teilbereich:

$$\Delta^k u \rightarrow 0, \quad \text{grad } \Delta^k u \rightarrow 0.$$

Durch Anwendung von Satz 6 folgt daraus weiterhin

Satz 9. *Für die Lösungen von (6.15) gilt die gleichmäßige Konvergenz im Innern von*

$$\Delta^k u, \quad \text{grad } \Delta^k u$$

gegen Null.

Diese Arbeit wurde zum größten Teil geschrieben, während der Verfasser durch die Indiana-Universität in Bloomington, Indiana ein Forschungsstipendium vom US-Office of Naval Research und US Army Office of Ordnance Research erhielt. Angeregt wurden diese Untersuchungen durch eine Diskussion mit Herrn Professor Dr. D. GILBARG. Wertvolle Kritik verdankt der Verfasser Herrn Dr. WALTER NOLL.

Mathematisches Institut der Technischen Universität
Berlin-Charlottenburg

IV. Literaturverzeichnis

- [1] E. ROTHE. Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben elliptischer partieller Differentialgleichungen. *Math. Annalen* **108**, 578–594 (1933).
- [2] E. ROTHE. Über asymptotische Entwicklungen bei gewissen nichtlinearen Randwertaufgaben. *Compositio Math.* **3**, 310–327 (1936).
- [3] E. ROTHE. Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta \Delta u + \lambda u = \lambda^k \psi$. *Math. Annalen* **109**, 267–272 (1933/34).
- [4] N. LEVINSON. The first boundary value problem for $\epsilon \Delta u + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = D(x, y)$ for small ϵ . *Annals of Math.* (2) **51**, 428–445 (1950).
- [5] O. A. OLEŖNIK. On the second boundary problem for an equation of elliptic type with small parameter in the highest derivatives (russisch). *Doklady Akad. Nauk SSSR* (NS) **79**, 735–737 (1951), besprochen in *Math. Rev.* **13**, 559 (1952).