Su Movimenti di Tipo Browniano

ANTONIO PIGNEDOLI

Istituto matematico Salvatore Pincherle, Università di Bologna

Memoria presentata da DARIO GRAFFI

1. Introduzione e posizione del problema. Nell'ipotesi che sia assegnato un numero N , assai grande, di sistemi simili, si indichi con x l'energia di uno qualunque di questi sistemi, supponendo, inoltre, che x sia soggetta a variazioni del tutto irregolari (moto di tipo browniano).

Essendo $N(x, t) dx$ il numero dei sistemi pei i quali, al tempo t , l'energia è compresa fra i valori x ed $x + dx$, la variazione di $N(x, t)$ riferita all'unità di tempo, variazione che vale $\partial N(x, t)/\partial t$ soddisfa, in generale, ad una equazione funzionale della forma:*

$$(1) \quad \frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = \alpha[N(x, t)],$$

dove con α si indica un operatore lineare. Ora è dimostrato che, affinchè la (1) rappresenti effettivamente un fenomeno a carattere probabilistico, l'operatore α deve essere un operatore differenziale lineare del secondo ordine.

Occorre inoltre che sia soddisfatto un teorema di conservazione del numero di particelle, alla quale condizione si trova potersi ottemperare ponendo:

$$(2) \quad \alpha[N] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{a(x)N\} - b(x)N \right],$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni note. Se ne conclude così che la funzione incognita $N(x, t)$ soddisfa all'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$(3) \quad \frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a(x)N(x, t)] - \frac{\partial}{\partial x} [b(x)N(x, t)].$$

* Vedi: UHLENBECK & ORNSTEIN, Phys. Rev. **36**, 823 (1930); RAYLEIGH, Phil. Magazine **32**, 424 (1891); *idem*, Scient. Papers, **111**, pag. 473; AMALDI & WICK, Fisica nucleare, Roma (1948).

La (3) è chiamata equazione di Fokker e Planck. Ora ci si può proporre il seguente problema: qual'è il numero $N(x, t)$ di sistemi soddisfacenti alle condizioni meccanico-statistiche espresse dalla equazione di Fokker e Planck e tali che l'energia x_0 costituisca una soglia da nessuno di essi superata? (Tale problema interessa la teoria matematica dello spettro energetico dei neutroni nella cosiddetta "zona chimica".)

Teniamo presente che la variazione nell'unità di tempo del numero di sistemi ad energia compresa fra x_1 ed x_2 è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} N(x, t) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial N(x, t)}{\partial t} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a(x)N(x, t)] - \frac{\partial}{\partial x} [b(x)N(x, t)] \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{a(x)N(x, t)\} - b(x)N(x, t) \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Proporsi il problema in parola equivale, dunque, analiticamente, ad integrare l'equazione differenziale (3), imponendo alla medesima la condizione ai limiti:

$$(I) \quad N(x, t) = 0, \quad \text{per } x = 0, \text{ ogni } t;$$

esprimente il fatto che, nella folla di sistemi in agitazione statistica, nessun sistema è praticamente dotato di energia uguale a zero; ed associando poi l'altra condizione ai limiti:

$$(II) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [a(x)N(x, t)] - b(x)N(x, t) = 0, \quad \text{per } x = x_0, \text{ ogni } t;$$

esprimente, evidentemente, il fatto che è nullo il "flusso" di sistemi che transitano attraverso la soglia x_0 .

Potrà inoltre supporre assegnata una condizione iniziale del tipo:

$$(III) \quad N(x, 0) = N_0(x).$$

Per quanto riguarda le funzioni note $a(x)$ e $b(x)$, esse sono rispettivamente legate allo scarto quadratico medio dell'energia e alla derivata della energia media per un sistema avente una assegnata energia all'istante considerato.

2. Il problema ai limiti.

a) L'equazione differenziale (3) si può scrivere intanto:

$$(3'') \quad \frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial^2 N(x, t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} + C(x)N(x, t)$$

dove si è posto

$$A(x) = \frac{1}{2}a(x), \quad B(x) = a'(x) - b(x), \quad C(x) = \frac{1}{2}a''(x) - b'(x).$$

Cercando di soddisfare alla (3'') mediante una funzione $N(x, t)$ che sia il prodotto di una parte spaziale e di una parte temporale (metodo di separazione delle variabili):

$$(4) \quad N(x, t) = \Phi(x) \cdot \Theta(t),$$

e dividendo ambo i membri della trasformata di (3'') mediante la sostituzione (4) per $\Phi(x) \cdot \Theta(t)$, si ottiene:

$$(5) \quad \frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)} = A(x) \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} + B(x) \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} + C(x).$$

Dovendo il primo ed il secondo membro della (5) essere uguali ad una costante $-\alpha^2$ (negativa per ovvie ragioni), la (5) stessa si scinde nel sistema di equazioni differenziali:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{\Theta}(t) + \alpha^2 \Theta(t) &= 0, \\ A(x) \cdot \Phi''(x) + B(x) \Phi'(x) + [C(x) + \alpha^2] \Phi(x) &= 0. \end{aligned}$$

La prima di esse ammette la soluzione generale:

$$(7) \quad \Theta(t) = \Theta_0 e^{-\alpha^2 t},$$

con Θ_0 costante. Alla seconda delle (6) vanno associate le condizioni supplementari:

$$(IV) \quad \begin{aligned} A(x) \Phi'(x) + H(x) \Phi(x) &= 0, \quad \text{per } x = x_0, \\ \Phi(x) &= 0, \quad \text{per } x = 0; \end{aligned}$$

con $H(x) = \frac{1}{2}a'(x) - b(x)$; consegue, quindi, l'esistenza di uno spettro di autovalori del parametro α^2 ; soltanto in corrispondenza di tali autovalori il problema ammette soluzioni soddisfacenti alle condizioni volute. È importante osservare ora che presenta indubbio interesse fisico il caso in cui le funzioni $A(x)$ e $B(x)$ che compaiono nella (3'') siano funzioni lineari di x , cioè della forma:

$$A(x) = a_0 + b_0 x, \quad B(x) = a_1 + b_1 x,$$

essendo, a_0, b_0, a_1, b_1 costanti note. Si avrà, in tale caso:

$$A(x) = \frac{1}{2}a(x) = a_0 + b_0 x, \quad B(x) = a'(x) - b(x) = a_1 + b_1 x$$

da cui:

$$a(x) = 2(a_0 + b_0 x), \quad a'(x) = 2b_0, \quad b(x) = 2b_0 - (a_1 + b_1 x),$$

$$C(x) = \frac{1}{2}a''(x) - b'(x) = b_1$$

$$H(x) = \frac{1}{2}a'(x) - b(x) = -b_0 + a_1 + b_1 x.$$

La (3'') diventerà:

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = (a_0 + b_0 x) \frac{\partial^2 N(x, t)}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} + b_1 N(x, t).$$

Quest' ultima, mediante la già indicata separazione di variabili, si scinde nel sistema di equazioni differenziali:

$$(6') \quad \begin{aligned} \dot{\Theta}(t) + \alpha^2 \Theta(t) &= 0, \\ (a_0 + b_0 x)\Phi''(x) + (a_1 + b_1 x)\Phi'(x) + (\alpha^2 + b_1)\Phi(x) &= 0; \end{aligned}$$

la prima delle quali ammette la soluzione generale (7) e la seconda va associata alle condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} (a_0 + b_0 x)\Phi'(x) + H(x)\Phi(x) &= 0, & \text{per } x = x_0, \\ \Phi(x) &= 0, & \text{per } x = 0, \end{aligned}$$

cioè:

$$(IV') \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(x_0) + K(x_0)\Phi(x_0) = 0,$$

con

$$K(x_0) = \frac{a_1 - b_0 + b_1 x_0}{a_0 + b_0 x_0}.$$

b) Studiamo, cioè, con le condizioni ai limiti (IV'), l'equazione differenziale lineare ed omogenea del secondo ordine:

$$(a_0 + b_0 x)\Phi''(x) + (a_1 + b_1 x)\Phi'(x) + (\alpha^2 + b_1)\Phi(x) = 0$$

con a_0, b_0, a_1, b_1 costanti note ed α^2 parametro.

Operiamo anzitutto, nell'equazione differenziale in questione, la sostituzione:

$$\Phi(x) = e^{hx} \eta, \quad x = \lambda \xi + \mu,$$

dove ξ ed η sono nuove variabili reali ed h, λ, μ sono costanti reali, con $\lambda \neq 0$. Otteniamo, con ciò, l'equazione:

$$(6'') \quad (\alpha_0 + \beta_0 \xi) \frac{d^2 \eta(\xi)}{d\xi^2} + (\alpha_1 + \beta_1 \xi) \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} + (\alpha_2 + \beta_2 \xi) \eta(\xi) = 0,$$

con

$$\alpha_0 = \frac{a_0 + b_0 \mu}{\lambda^2}, \quad \beta_0 = \frac{b_0}{\lambda}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\lambda} A'(h) + \frac{\mu}{\lambda} B'(h),$$

$$\beta_1 = B'(h), \quad \alpha_2 = A(h) + \mu B(h), \quad \beta_2 = \lambda B(h);$$

dove, per brevità, si è posto:

$$\begin{aligned} A(h) &= a_0 h^2 + a_1 h + \alpha^2 + b_1, & A'(h) &= 2a_0 h + a_1, \\ B(h) &= b_0 h^2 + b_1 h, & B'(h) &= 2b_0 h + b_1. \end{aligned}$$

Se è possibile determinare λ e μ in modo che sia

$$\alpha_0 = \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = -\beta_0,$$

la (6'') diventa:

$$\beta_0 \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (\alpha_1 - \beta_0 \xi) \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_2 \eta = 0,$$

cioè, ponendo $\alpha_1/\beta_0 = c$ e $\alpha_2/\beta_0 = -a$:

$$(6''') \quad \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (c - \xi) \frac{d\eta}{d\xi} - a\eta = 0, \quad (c \text{ ed } a \text{ costanti}),$$

che è la forma canonica della equazione differenziale delle funzioni ipergeometriche confluenti. Ora ciò è possibile se si verificano le seguenti condizioni:

1°) h è radice dell'equazione di secondo grado:

$$B(h) = b_0 h^2 + b_1 h = 0, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = -b_1/b_0;$$

2°) μ soddisfa all'equazione di primo grado $a_0 + b_0 \mu = 0$;

3°) λ è tale da aversi $b_0/\lambda + B'(h) = 0$.

La riduzione alla forma canonica della equazione differenziale delle funzioni ipergeometriche confluenti può dunque compiersi in due modi diversi purchè sia:

$$(8) \quad b_0 \neq 0, \quad b_1 \neq 0.$$

Si assumerà come h l'una o l'altra delle due radici dell'equazione di secondo grado $B(h) = 0$, cioè $h_1 = 0$, $h_2 = -b_1/b_0$, indi si porrà $\mu = -a_0/b_0$, $\lambda = -b_0/B'(h)$. Eseguendo i calcoli, risulta:

$$(9) \quad a = \frac{A(h)}{B'(h)}, \quad c = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}.$$

Se le (8) non sono soddisfatte, occorre distinguere i seguenti sottocasi:

1°) $b_0 \neq 0$ con $b_1 = 0$;

2°) $b_0 = 0$ con $b_1 \neq 0$; $a_0 \neq 0$;

3°) $b_0 = b_1 = 0$, con $a_0 \neq 0$;

4°) $a_0 = b_0 = 0$.

Nel terzo sottocaso, l'equazione è a coefficienti costanti; nel quarto, essa si riduce al primo ordine e si integra per mezzo di quadrature. Nel primo sotto-

caso, basta porre:

$$h = 0, \quad \lambda = b_0, \quad \mu = -\frac{a_0}{b_0},$$

per ottenere l'equazione trasformata

$$(10) \quad \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{a_1}{b_0} \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha^2 \eta = 0,$$

la quale si ottiene dall'equazione differenziale più generale:

$$(10') \quad \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (1 - 2\nu) \frac{d\eta}{d\xi} + \left(\beta^2 \gamma^2 \xi^{2\gamma-1} + \frac{\nu^2 - p^2 \gamma^2}{\xi} \right) \eta = 0,$$

facendovi:

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2b_0}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad p = 2\nu = 1 - \frac{a_1}{b_0}, \quad \beta = 2\alpha.$$

La (10) si integrerà, dunque, per mezzo di funzioni di Bessel. Precisamente, essa ammetterà l'integral generale:

$$(11) \quad \eta(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}(1-a_1/b_0)} [A J_{(1-a_1/b_0)}(2\alpha\xi^{\frac{1}{2}}) + B Y_{(1-a_1/b_0)}(2\alpha\xi^{\frac{1}{2}})],$$

dove è chiaro il significato dei simboli, e dove A e B sono costanti arbitrarie*.

Nel sottocaso $\mathcal{Z}'$, nel quale non è possibile determinare λ e μ in modo che sia $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 = -\beta_0$, fisseremo h imponendo che sia $\beta_2 = \lambda B(h)$, per cui sarà $h = 0$. Porremo poi $\lambda = 1$ e determineremo μ in modo che risulti $\alpha_1 = 0$; porremo cioè

$$(12) \quad \mu = -\frac{A'(h)}{B'(h)} = -\frac{2a_0 h + a_1}{2b_0 h + b_1} = -\frac{a_1}{b_1},$$

ottenendo, in tale modo, l'equazione trasformata:

$$(13) \quad a_0 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + b_1 \xi \frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha^2 + b_1) \eta = 0.$$

Essa, mediante il cambiamento di variabile:

$$(14) \quad \xi = \sqrt{-\frac{2a_0}{b_1}} t,$$

* Se $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, si ha $\mu < 0$ e $\lambda > 0$, cioè, per $x = 0$, risulta $\xi = -\mu/\lambda > 0$. Quindi l'intervallo di variabilità della ξ esclude il punto $\xi = 0$ ed è, appunto:

$$-\frac{\mu}{\lambda} \leq \xi \leq \frac{x_0 - \mu}{\lambda}.$$

Occorrerà, nel caso nostro, che sia, appunto, escluso $\xi = 0$, dove Y ha una singolarità logaritmica.

si riduce alla forma:

$$(15) \quad t \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - t \right) \frac{d\eta}{dt} - \frac{(\alpha^2 + b_1)}{2b_1} \eta = 0,$$

che è del tipo delle *funzioni del cilindro parabolico*. Riassumendo, la equazione differenziale

$$(16) \quad (a_0 + b_0 x) \Phi''(x) + (a_1 + b_1 x) \Phi'(x) + (\alpha^2 + b_1) \Phi(x) = 0$$

si riduce alla forma canonica delle funzioni ipergeometriche confluenti;

$$(17) \quad \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (c - \xi) \frac{d\eta}{d\xi} - a\eta = 0,$$

oppure a casi appartenenti al tipo:

$$(18) \quad \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (1 - 2\nu) \frac{d\eta}{d\xi} + \left(\beta^2 \gamma^2 \xi^{2\gamma-1} + \frac{\nu^2 - p^2 \gamma^2}{\xi} \right) \eta = 0.$$

La (17) (per c non intero) ammette l'integrale generale:

$$(19) \quad \eta(\xi) = k_1 {}_1F_1(a, c, \xi) + k_2 \xi^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c, \xi), *$$

dove k_1 e k_2 sono costanti arbitrarie ed ${}_1F_1$ è la funzione di Pochhammer-Kummer definita come segue:

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n \cdot z^n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n \cdot n!}$$

con $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)$, $(\beta)_n = \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)$, $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. La (18) ammette l'integral generale:

$$(20) \quad \eta(\xi) = \xi^\nu [k_1 J_p(\beta \xi^\gamma) + k_2 Y_p(\beta \xi^\gamma)],$$

dove k_1 e k_2 sono, al solito, costanti arbitrarie e dove con J_p ed Y_p si indicano le funzioni di Bessel di ordine p , rispettivamente di prima e di seconda specie. Le condizioni ai limiti diventano, in ogni caso, della forma:

$$\eta(\xi) = 0, \quad \text{per } \xi = -\frac{\mu}{\lambda},$$

(V)

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\xi=(x_0-\mu)/\lambda} + \lambda[h + k(x_0)]\eta(\xi)_{\xi=(x_0-\mu)/\lambda} = 0.$$

Sicchè, nel caso in cui ci si riduca ad una equazione del tipo (17), le condizioni ai limiti stesse, tenuta presente la nota relazione valevole per le funzioni di

* Anche qui va pensato escluso il punto $\xi = 0$, in modo che per $x = 0$, sia $\xi = -\mu/\lambda > 0$; ciò è effettivamente realizzato se $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $b_1 \begin{cases} < 0 \text{ per } h = 0 \\ > 0 \text{ per } h = -b_1/b_0. \end{cases}$

Kummer-Pochhammer:

$$(21) \quad \frac{d}{d\xi} {}_1F_1(a, c, \xi) = \frac{a}{c} {}_1F_1(a+1, c+1, \xi),$$

forniscono, per la determinazione degli autovalori del parametro α^2 , da cui dipende il coefficiente a dell'equazione confluyente canonica, il sistema di equazioni:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & k_1 {}_1F_1\left(a, c, -\frac{\mu}{\lambda}\right) + k_2 \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1-c} {}_1F_1\left(a-c+1, 2-c, -\frac{\mu}{\lambda}\right) = 0, \\ & k_1 \left[\frac{a}{c} {}_1F_1\left(a+1, c+1, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) + \lambda(k(x_0) + h) {}_1F_1\left(a, c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) \right] \\ & + k_2 \left[(1-c) \left(\frac{x_0-\mu}{\lambda}\right)^{-c} {}_1F_1\left(a-c+1, 2-c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) \right. \\ & + \left(\frac{x_0-\mu}{\lambda}\right)^{1-c} \frac{a-c+1}{2-c} {}_1F_1\left(a-c+2, 3-c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) \\ & \left. + \lambda(k(x_0) + h) \left(\frac{x_0-\mu}{\lambda}\right)^{1-c} {}_1F_1\left(a-c+1, 2-c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) \right] = 0; \end{aligned} \right.$$

da cui segue, per la determinazione degli autovalori in questione, la equazione trascendente:

$$(23) \quad \left| \begin{array}{cc} {}_1F_1\left(a, c, -\frac{\mu}{\lambda}\right) & \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1-c} {}_1F_1\left(a-c+1, 2-c, -\frac{\mu}{\lambda}\right) \\ \frac{a}{c} \cdot & (1-c) \left(\frac{x_0-\mu}{\lambda}\right)^{-c} \cdot \\ {}_1F_1\left(a+1, c+1, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) {}_1F_1\left(a-c+1, 2-c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) + \left(\frac{x_0-\mu}{\lambda}\right)^{1-c} \cdot \\ + \lambda(k(x_0) + h) \cdot & \frac{a-c+1}{2-c} {}_1F_1\left(a-c+2, 3-c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) \\ {}_1F_1\left(a, c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) & + \lambda(k(x_0) + h) \left(\frac{x_0-\mu}{\lambda}\right)^{1-c} \cdot \\ & {}_1F_1\left(a-c+1, 2-c, \frac{x_0-\mu}{\lambda}\right) \end{array} \right| = 0.$$

Nel caso poi, in cui ci si riduca ad una equazione del tipo (18), le condizioni ai

limiti (V) forniscono il sistema:

$$\begin{aligned}
 & k_1 \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\nu} J_p \left[\beta \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] + k_2 \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} Y_p \left[\beta \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] = 0, \\
 (24) \quad & k_1 \left\{ \lambda [h + k(x_0)] \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu} J_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] + \left[\frac{d[\xi^{\nu} J_p(\beta \xi^{\gamma})]}{d\xi} \right]_{\xi=(x_0-\mu)/\lambda} \right\} \\
 & + k_2 \left\{ \lambda [h + k(x_0)] \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu} Y_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[\frac{d[\xi^{\nu} Y_p(\beta \xi^{\gamma})]}{d\xi} \right]_{\xi=(x_0-\mu)/\lambda} \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

il quale, tenendo conto delle note relazioni riguardanti le funzioni di Bessel:

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & \frac{dJ_p(x)}{dx} = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x), \\
 & \frac{dY_p(x)}{dx} = \frac{p}{x} Y_p(x) - Y_{p+1}(x);
 \end{aligned}$$

diventa:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & k_1 \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\nu} J_p \left[\beta \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] + k_2 \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} Y_p \left[\beta \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] = 0, \\
 & k_1 \left\{ \lambda [h + k(x_0)] \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu} J_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \right. \\
 & \quad + \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu-1} (\nu + \gamma p) J_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \\
 & \quad \left. - \beta \gamma \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu+\gamma-1} J_{p+1} \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \right\} \\
 & + k_2 \left\{ \lambda (h + k(x_0)) \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu} Y_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \right. \\
 & \quad + \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu-1} (\nu + \gamma p) Y_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \\
 & \quad \left. - \beta \gamma \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu+\gamma-1} Y_{p+1} \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \right.$$

e fornisce, perciò, per la determinazione degli autovalori del parametro β , quindi

anche del parametro α^2 , l'equazione trascendente:

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\nu} J_p \left[\beta \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] & \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\nu} Y_p \left[\beta \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \\
 & \lambda(h + k(x_0)) \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu} & \lambda(h + k(x_0)) \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu} Y_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \\
 & \cdot J_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] & + \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu-1} (\nu + \gamma p) Y_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \\
 & + \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu-1} (\nu + \gamma p) & - \beta \gamma \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu+\gamma-1} Y_{p+1} \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] \\
 & \cdot J_p \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] & \\
 & - \beta \gamma \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\nu+\gamma-1} & \\
 & \cdot J_{p+1} \left[\beta \left(\frac{x_0 - \mu}{\lambda} \right)^{\gamma} \right] & \\
 & & = 0.
 \end{aligned}$$

c) Siano ora $\Phi_i(x)$ e $\Phi_j(x)$ due autofunzioni dell'equazione differenziale:

$$(28) \quad A(x)\Phi''(x) + B(x)\Phi'(x) + [C(x) + \alpha^2]\Phi(x) = 0,$$

relative alle condizioni ai limiti:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(x_0) + \kappa(x_0)\Phi(x_0) = 0$$

e corrispondenti agli autovalori α_i ed α_j . Ora la (28) si può notoriamente mettere nella forma autoaggiunta:

$$(29) \quad \frac{d}{dx} [P(x)\Phi'(x)] + [Q(x) + \alpha^2]\Phi(x) = 0.$$

Avremo:

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \frac{d}{dx} [P(x)\Phi'_i(x)] + [Q(x) + \alpha_i^2]\Phi_i(x) = 0, \\
 & \frac{d}{dx} [P(x)\Phi'_j(x)] + [Q(x) + \alpha_j^2]\Phi_j(x) = 0.
 \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima delle (30) per $\Phi_j(x)$, la seconda per $\Phi_i(x)$ e sottraendo

membro a membro, si ottiene:

$$\Phi_j \frac{d}{dx} [P\Phi'_i] - \Phi_i \frac{d}{dx} [P\Phi'_j] + (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)\Phi_i \Phi_j = 0,$$

cioè anche:

$$(31) \quad \frac{d}{dx} [P(\Phi_j \Phi'_i - \Phi_i \Phi'_j)] + (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)\Phi_i \Phi_j = 0.$$

Integrando ora fra 0 ed x_0 si ottiene:

$$\int_0^{x_0} \frac{d}{dx} [P(\Phi_j \Phi'_i - \Phi_i \Phi'_j)] + (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \int_0^{x_0} \Phi_i \Phi_j dx = 0;$$

cioè:

$$[P(\Phi_j \Phi'_i - \Phi_i \Phi'_j)]_0^{x_0} + (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \int_0^{x_0} \Phi_i \Phi_j dx = 0.$$

La parte integrata del primo membro della soprascritta uguaglianza si annulla per $x = 0$; ma si annulla anche per $x = x_0$, avendosi:

$$\Phi'_i(x_0) + k(x_0)\Phi_i(x_0) = 0, \quad \Phi'_j(x_0) + k(x_0)\Phi_j(x_0) = 0,$$

cioè, moltiplicando la prima per $\Phi_j(x_0)$ e la seconda per $\Phi_i(x_0)$ e sottraendo:

$$\Phi'_i \Phi_j - \Phi_i \Phi'_j = 0, \quad \text{per } x = x_0.$$

Allora, si ha:

$$(\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \int_0^{x_0} \Phi_i \Phi_j dx = 0,$$

ed infine, essendo $\alpha_i \neq \alpha_j$:

$$(32) \quad \int_0^{x_0} \Phi_i \Phi_j dx = 0,$$

che esprime la ortogonalità delle autofunzioni.

Una soluzione semplice del nostro problema sarà, ora, del tipo:

$$(33) \quad N_i(x, t) = \theta_0^{(i)} \Phi_i(x) e^{-\alpha_i^2 t}, \quad \theta_0^{(i)} \text{ costante arbitraria.}$$

Poniamo, allora:

$$(34) \quad N(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_0^{(i)} \Phi_i(x) e^{-\alpha_i^2 t},$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli autovalori del parametro α^2 . Bisogna ora

determinare le costanti $\theta_0^{(i)}$ in modo da soddisfare alla condizione iniziale $N(x, 0) = N_0(x)$, che si traduce nella:

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \theta_0^{(i)} \Phi_i(x) = N_0(x).$$

Moltiplicando ambo i membri della (35) per $\Phi_j(x)$ ed integrando fra 0 ed x_0 otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_0^{(i)} \int_0^{x_0} \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \int_0^{x_0} N_0(x) \Phi_j(x) dx,$$

cioè, tenendo conto della relazione di ortogonalità (32):

$$\theta_0^{(j)} \int_0^{x_0} \Phi_j^2(x) dx = \int_0^{x_0} N_0(x) \Phi_j(x) dx,$$

da cui, finalmente:

$$(36) \quad \theta_0^{(j)} = \frac{\int_0^{x_0} N_0(x) \Phi_j(x) dx}{\int_0^{x_0} \Phi_j^2(x) dx}.$$

Abbiamo, pertanto:

$$(37) \quad N(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{\int_0^{x_0} N_0(y) \Phi_i(y) dy}{\int_0^{x_0} \Phi_i^2(y) dy} e^{-\alpha_i^2 t}.$$

3. Applicazione: sulla teoria matematica dello spettro dei neutroni nella "zona chimica".

a) Le considerazioni ed i risultati precedenti trovano immediato campo di applicazione nella teoria matematica dello spettro energetico dei neutroni lenti, teoria di evidente importanza in Fisica nucleare.

È noto come, fra i neutroni rallentati in paraffina ($C_{25}H_{52}$) sia presente una notevole percentuale di neutroni la cui energia è dell'ordine di grandezza dell'energia di agitazione termica, cioè, con chiaro significato dei simboli, $\epsilon \sim kT = 0,025$ electronvolt, dove $k = R/N$ è la costante di Boltzmann della Meccanica statistica classica (R = costante dei gas, N = numero di Avogadro) e T è la temperatura assoluta.

Considerando la progressiva degradazione energetica dei neutroni nel fenomeno di rallentamento e di diffusione nel mezzo considerato, si è condotti naturalmente a domandarsi quale sia la reale forma dello spettro energetico dei neutroni. Si procede, allora, nel modo seguente: i neutroni di "energia chimica" cioè di energia

$\epsilon < x_0 = 0,4$ electronvolt, possono essere considerati come particelle relativamente leggere, che si muovono in un gas di gruppi CH_2 molto più pesanti. L'energia dei neutroni varierà di poco in un urto, sicchè le variazioni energetiche che interessano saranno effetto di molti urti, con conseguente possibilità di applicare le leggi del Calcolo delle probabilità.

Precisamente, rappresentando l'energia del neutrone con l'ascissa x di un punto rappresentativo su di una semiretta, e potendosi, per effetto degli urti, pensare il punto rappresentativo come animato di moto browniano, indicando con $F(x, t) dx$ il numero dei neutroni che, al tempo t , hanno energia compresa fra x ed $x + dx$, trascurando, in una prima approssimazione, i termini dipendenti dalla generazione e dalla cattura dei neutroni nel blocco di paraffina, si ottiene, per la funzione $F(x, t)$, un'equazione differenziale alle derivate parziali di Fokker-Planck, per la quale è

$$(38) \quad a(x) = \frac{2}{\theta} x, \quad b(x) = -\frac{1}{\theta} \left(x - \frac{3}{2} \right),$$

essendo θ una costante, che si può chiamare "tempo di rilassamento" e tale che si può assumere dell'ordine di 10^{-5} sec. Si ha dunque l'equazione:

$$\theta \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x F(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(x - \frac{3}{2} \right) F(x, t) \right],$$

cioè:

$$(39) \quad \theta \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = x \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} + \left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + F(x, t).^*$$

Esprimendo il fatto che il numero di neutroni che, per unità di tempo, passano da valori minori a valori maggiori dell'energia è nullo per la soglia $x = x_0 = 0,4$ electronvolt, otteniamo la condizione ai limiti:

$$\frac{1}{2} \theta \frac{\partial}{\partial x} [a(x) F(x, t)] - \theta b(x) F(x, t) = x \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2} \right) F(x, t) = 0$$

per $x = x_0 = 0,4$ electronvolt e per ogni t , cioè $\partial F(x, t)/\partial x + h F(x, t) = 0$ per $x = x_0 = 0,4$ eV e per ogni t , con $h = \text{costante} \sim 0,213$. Imporremo poi alla (39) la condizione supplementare

$$F(x, t) = 0, \quad \text{per } x = 0 \text{ e per ogni } t;$$

esprimente questa il fatto—largamente evidente per il nostro problema—che è nullo il numero di neutroni di energia uguale a zero per ogni t , (esprimente inoltre

* Avvertiamo che, naturalmente, tempi e costanti sono pensati, d'ora in avanti, nel sistema C.G.S.; le energie in volt-elettroni ($1 \text{ eV} = 1,59 \cdot 10^{-12} \text{ ergon}$).

la validità, anche in questo caso, del teorema di conservazione del numero di particelle). Si supporrà infine assegnata una condizione iniziale

$$F(x, 0) = f(x).$$

Mediante la separazione di variabili

$$F(x, t) = \varphi(x) \cdot T(t),$$

la (39) si scinde nel sistema:

$$(40) \quad \dot{T}(t) + \frac{\alpha^2}{\theta} T(t) = 0, \quad T(t) = T_0 e^{-(\alpha_2/\theta)t};$$

$$x\varphi''(x) + (x + \tfrac{1}{2})\varphi'(x) + (\alpha^2 + 1)\varphi(x) = 0;$$

con le condizioni ai limiti:

$$(41) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(x) + h\varphi(x) = 0, \quad \text{per } x = x_0 = 0, 4 \text{ eV},$$

($h = \text{cost}$).

La seconda delle (40) è l'equazione della funzione di Pochhammer-Kummer ${}_1F_1(\alpha^2 + 1, \tfrac{1}{2}, -x)$.

Avremo dunque:

$$(42) \quad \varphi(x) = A {}_1F_1(\alpha^2 + 1, \tfrac{1}{2}, -x) + Bx^{\frac{1}{2}} {}_1F_1(\alpha^2 + \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, -x)$$

con A e B costanti arbitrarie.

In virtù della prima condizione ai limiti, si ha:

$$\varphi(0) = A {}_1F_1(\alpha^2 + 1, \tfrac{1}{2}, 0) = 0.$$

Ora la funzione ${}_1F_1(a, c, x)$, è definita dalla serie:

$${}_1F_1(a, c, x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

con $c \neq 0$ e non intero negativo.

Sicchè la funzione:

$${}_1F_1(\alpha^2 + 1, \tfrac{1}{2}, -x) = 1 - \frac{\alpha^2 + 1}{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 2)}{\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2}} \cdot \frac{x^2}{2!} - \dots$$

non si annulla per $x = 0$. Risulta, quindi $A = 0$ e la soluzione (42) si riduce a

$$Bx^{\frac{1}{2}} {}_1F_1(\alpha^2 + \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, -x).$$

A questa dovremo imporre la seconda condizione ai limiti:

$$\varphi'(x_0) + h\varphi(x_0) = 0, \quad (h = \text{costante}),$$

cioè

$${}_1F_1(\alpha^2 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -x_0) - \frac{4}{3}\sqrt{x_0}({}_1F_1(\alpha^2 + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -x_0) + 2h\sqrt{x_0}{}_1F_1(\alpha^2 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -x_0)) = 0,$$

che è l'equazione determinatrice degli autovalori del parametro α^2 .

Dopo ciò, il problema si può considerare risolto.