*Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen
Instabilität laminarer Grenzschichten
an konkaven Wänden**

GÜNTHER HÄMMERLIN

Universität Freiburg i. Br.

Vorgelegt von H. GÖRTLER

INHALT

§1. Einleitende Übersicht.....	280
I. Abschnitt	
§2. Die Störungsdifferentialgleichungen für die dreidimensionalen Instabilitäten.....	282
§3. Die Lösungen von H. GÖRTLER und von D. MEKSYN.....	285
II. Abschnitt	
§4. Eine Existenzaussage über das Vorhandensein eines kritischen Görtler-Parameters.....	288
§5. Das Iterationsverfahren zur Bestimmung des kleinsten Eigenwerts....	291
§6. Der Verlauf des kritischen Görtler-Parameters für sehr große und sehr kleine Wellenlängen.....	299
§7. Neuberechnung des kleinsten Eigenwerts nach der Determinantenmethode.....	305
§8. Die Abhängigkeit des kritischen Görtler-Parameters von der Profilform.....	314
§9. Die angefachten Störungen.....	315
Zusammenfassung.....	320
Literaturhinweise.....	321

* Diese Arbeit gibt den wesentlichen Teil der an der Universität Freiburg i. Br. angefertigten Dissertation des Verfassers wieder.

§1. Einleitende Übersicht. Die Stabilität laminarer Grenzschichten war schon häufig der Gegenstand eingehender Untersuchungen. Hier sind zunächst die Arbeiten über die zweidimensionalen, in Strömungsrichtung fortschreitenden Tollmien-Schlichtingschen Wellen (vgl.z.B. H. SCHLICHTING [1] S. 280 ff. mit ausführlichem Literaturverzeichnis) zu nennen, die zuerst für Strömungen längs ebenen und später für solche längs gekrümmten Wänden untersucht wurden und eine gewisse Vorstellung über die Entstehung der Turbulenz aus kleinen Störungen gaben. W. TOLLMIEEN war für ebene Wände zu dem bekannten Stabilitätskriterium gelangt, welches aussagt, daß Grenzschichtprofile mit Wendepunkt—die dann auftreten, wenn der der Grenzschicht von außen aufgeprägte Druck in Strömungsrichtung ansteigt—gegenüber den zweidimensionalen Störungen instabil sind. H. GÖRTLER [2] untersuchte die Stabilität von Grenzschichtströmungen längs schwach gekrümmten ruhenden Wänden und zeigte, daß konvexe Wände auf solche Störungen im Vergleich zu ebenen Wänden anfachend, konkave Wände dagegen stabilisierend wirken.

Demgegenüber gibt es eine andere, dreidimensionale Instabilität, die an konkaven Wänden auftritt. Den Ansatz zur Berechnung dieser dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten inkompressibler Strömungen an gekrümmten Wänden führte H. GÖRTLER [3] im Jahre 1940 ein. Es handelt sich dabei um Wirbel, deren Achsen in Richtung der Grundströmung verlaufen; im Gegensatz zu den Tollmien-Schlichtingschen zweidimensionalen Schwingungen sind dies stehende Wirbel, ähnlich den bekannten Taylorschen Wirbeln [4], die zwischen zwei rotierenden coaxialen Zylindern auftreten.

Die Störungsdifferentialgleichungen, auf die dieser Ansatz führt, stellen unter den dem Problem gemäßen Randbedingungen eine Eigenwertaufgabe dar, und es interessiert insbesondere der kleinste Eigenwert in abhängigkeit von der Wellenlänge der angesetzten, bis auf einen zeitlichen Dämpfungsfaktor periodischen Wirbel. Die Eigenwerte haben die Bedeutung einer Zahl $Re(\delta/R)^{\frac{1}{2}}$ (Görtler-Parameter), wobei δ die Grenzschichtdicke, R den Radius der angeströmten Wand und Re die mit der Grenzschichtdicke gebildete Reynoldssche Zahl bezeichnen. Im Falle neutraler Störungen, also solcher Störungen, die weder gedämpft noch angefacht werden, gibt der als kleinster Eigenwert angebbare Görtler-Parameter den zu einer bestimmten Wellenlänge gehörenden "kritischen" Wert. Liegt der den Strömungsverhältnissen zukommende Wert $Re(\delta/R)^{\frac{1}{2}}$ unterhalb des durch den kleinsten Eigenwert neutraler Störungen bestimmten kritischen Werts, so wird jede Störung der angesetzten Art gedämpft, liegt er darüber, so kann sie angefacht werden und schließlich zur Turbulenz führen. Vor allem erhebt sich auch die Frage, ob es eine "gefährlichste" Wellenlänge gibt; das ist eine solche Wellenlänge, der ein Görtler-Parameter von minimalem Betrage entspricht.

Die Görtlersche Arbeit hatte das Ziel, zunächst größenordnungsmäßige Angaben über den damit erkannten Effekt zu liefern, und im Hinblick darauf wurde

eine numerische Auswertung vorgenommen. Man fand damals Eigenwerte positiven Vorzeichens—das bedeutet, daß solche Störungen nur an konkaven Wänden ($R > 0$) auftreten—und die Kurve der kleinsten Eigenwerte besaß ein Minimum für eine gewisse Wellenlänge.

Ausgehend von den Görtlerschen Differentialgleichungen nahm D. MEKSYN [5] die Lösung des Eigenwertproblems zehn Jahre später von neuem in Angriff, und zwar mit einer Methode, die er bereits zur Behandlung der Instabilitäten der Taylorschen rotierenden Zylinder verwandt hatte. Auch D. MEKSYN fand eine Kurve kleinster, positiver Eigenwerte, die für eine bestimmte Wellenlänge ein Minimum besaß.

Allerdings unterscheiden sich die Ergebnisse beider Arbeiten in so hohem Maße, daß die damit zutage getretene Diskrepanz nicht mehr durch Ungenauigkeiten der numerischen Auswertung erklärt werden kann. Eine experimentelle Bestätigung, welche die Theorie inzwischen durch Versuche von H. W. LIEPMANN [6], [7] grundsätzlich erfahren hatte, liefert keinen Aufschluß; denn die experimentell beobachtbaren Werte des laminar-turbulenten Umschlags sind naturgemäß sehr viel höher, als die aus der Theorie hervorgehenden kritischen Werte angeben, und sowohl die GÖRTLERSchen als auch die MEKSYNSchen kritischen Werte liegen unterhalb der beim Umschlag laminar-turbulent experimentell beobachteten Werte von $Re(\delta/R)^{\frac{1}{2}}$.

Das Erscheinen der MEKSYNSchen Abhandlung gab den Anstoß zu dieser Arbeit. Es ist das Ziel der folgenden Seiten, über die Lösung des zugrundeliegenden Eigenwertproblems Klarheit zu schaffen. Dazu werden wir neue Wege einschlagen, die es aufgrund ihrer strengen Fundierung erlauben, über die oben genannten Approximationen ein Urteil zu gewinnen und gesicherte Ergebnisse zu liefern. Die daraus entspringende Lösung unterscheidet sich von den beiden bisher vorhandenen. Es wird uns aber gelingen zu zeigen, daß die von H. GÖRTLER vorgenommene Berechnung der Eigenwerte—die auf eine Annäherung der Nullstellen Fredholmscher Determinanten hinausläuft—bei vorsichtiger Behandlung zu genau denselben Ergebnissen führt.

Die vorliegende Arbeit wurde von Herrn Prof. Dr. H. GÖRTLER angeregt. Für viele fruchtbare Diskussionen und für sein großes Interesse beim Fortgang der Arbeit möchte ich Herrn Prof. GÖRTLER hier herzlich danken.

I. ABSCHNITT

§2. Die Störungsdifferentialgleichungen für die dreidimensionalen Instabilitäten. Mit einem Hinweis auf die Arbeit von H. GÖRTLER [3] können wir uns bei der Ableitung der grundlegenden Gleichungen kurz fassen.

In einer zähen Flüssigkeit erfolge eine Strömung längs einer zylindrischen ruhenden Wand, deren Krümmungsradius R konstant und groß gegenüber der Dicke der sich ausbildenden Grenzschicht sei. Die Grundströmung erfolge in x -Richtung, wobei x die Bogenlänge längs der Wand bedeutet; $y \geq 0$ sei der senkrechte Wandabstand, und z sei die zu beiden senkrechte Koordinate in Richtung der Zylinderachse. R sei > 0 für zur Strömung konkave Wände.

FIG. 1. Das hier benutzte Koordinatensystem.

In diesen Koordinaten lautet z. B. die erste Navier-Stokessche Gleichung:

$$u_t + \frac{R}{R-y} uu_x + vu_y - \frac{uv}{R-y} + wu_z = -\frac{R}{R-y} \frac{1}{\rho} p_x$$

$$+ \nu \left\{ \frac{R^2}{(R-y)^2} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{R-y} u_y - \frac{2R}{(R-y)^2} v_x - \frac{u}{(R-y)^2} \right\}$$

u = Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung
 v = Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung
 w = Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung
 p = Druck
 ρ = Dichte, konstant
 ν = kinematische Zähigkeit, konst.

$1/(R - y)$ und $R/(R - y)$ werden nun nach Potenzen von y/R entwickelt, und unter der Annahme, daß δ/R klein ist, werden die in y/R quadratischen und höheren Glieder gegenüber der ersten Potenz vernachlässigt; wenn wir noch annehmen, daß Veränderungen der Strömung in x -Richtung nicht ins Gewicht fallen, führt das auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & u_t + v \left(u_y - \frac{1}{R} u \right) + w u_z = \nu \left\{ u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{R} u_y \right\} \\
 & v_t + v v_y + \frac{u^2}{R} + w v_z = -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \left\{ v_{yy} + v_{zz} - \frac{1}{R} v_y \right\} \\
 & w_t + v w_y + w w_z = -\frac{1}{\rho} p_z + \nu \left\{ w_{yy} + w_{zz} - \frac{1}{R} w_y \right\} \\
 & v_y - \frac{1}{R} v + w_z = 0
 \end{aligned}$$

Die ungestörte Strömung $u = u_0(y)$; $v = 0$; $w = 0$; $p = p_0(y)$ genügt diesen Gleichungen.

Wegen $u_y \sim \frac{1}{\delta} u$, $u_{yy} \sim \frac{1}{\delta} u_y$ vernachlässigen wir $\frac{1}{R} u$ gegenüber u_y und ebenso $\frac{1}{R} u_y$ gegenüber u_{yy} ; entsprechend geht man für v und w vor.*

Störungsansatz:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & u = u_0(y) + u_1(y) \cos \alpha z \cdot e^{\beta t} \\
 & v = v_1(y) \cos \alpha z \cdot e^{\beta t} \\
 & w = w_1(y) \sin \alpha z \cdot e^{\beta t} \\
 & p = p_0(y) + p_1(y) \cos \alpha z \cdot e^{\beta t} \\
 & \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda \text{ die Wellenlänge der Störung} \\
 & \beta = \text{Dämpfungskonstante.}
 \end{aligned}$$

Vernachlässigt man nun der Störungsrechnung folgend Quadrate und Pro-

* Vgl. den Zusatz bei der Korrektur am Schluß der Arbeit.

dukte der als klein angenommenen Amplitudenfunktionen u_1, v_1, w_1, p_1 , so führt der Ansatz (2.2) auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \beta u_1 + v_1 \frac{du_0}{dy} &= \nu \left(\frac{d^2 u_1}{dy^2} - \alpha^2 u_1 \right) \\
 \beta v_1 + u_1 \frac{2u_0}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_1}{dy} &= \nu \left(\frac{d^2 v_1}{dy^2} - \alpha^2 v_1 \right) \\
 \beta w_1 - \frac{\alpha}{\rho} p_1 &= \nu \left(\frac{d^2 w_1}{dy^2} - \alpha^2 w_1 \right) \\
 w_1 &= -\frac{1}{\alpha} \frac{dv_1}{dy}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Durch Elimination von p_1 und w_1 können die Gleichungen (2.3) auf ein System von zwei Differentialgleichungen reduziert werden:

$$\begin{aligned}
 \nu \frac{d^2 u_1}{dy^2} - (\beta + \nu \alpha^2) u_1 &= v_1 \frac{du_0}{dy} \\
 \nu \frac{d^4 v_1}{dy^4} - (\beta + 2\nu \alpha^2) \frac{d^2 v_1}{dy^2} + \alpha^2 (\beta + \nu \alpha^2) v_1 &= -\frac{2\alpha^2 u_0}{R} u_1
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Nun werden dimensionslose Größen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \eta &= y/\delta & U &= u_0/U_0 & \sigma &= \alpha\delta & \tau &= (\alpha^2 \delta^2 + \beta \delta^2/\nu)^{\frac{1}{2}} \\
 & & & & & & &= (\sigma^2 + \beta \delta^2/\nu)^{\frac{1}{2}} \\
 \mu &= 2 \left(\frac{U_0 \delta}{\nu} \right)^2 \frac{\delta}{R} & u' &= \left(\frac{U_0 \delta}{\nu} \right)^{-1} u_1 & v' &= v_1
 \end{aligned}$$

Schreiben wir anstelle von u' und v' wieder u und v , so ergeben sich die Differentialgleichungen (' symbolisiert jetzt die Differentiation nach η):

$$\begin{aligned}
 u'' - \tau^2 u &= \frac{dU}{d\eta} v \\
 v^{IV} - (\tau^2 + \sigma^2) v'' + \tau^2 \sigma^2 v &= -\mu \sigma^2 U u
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Für neutrale Störungen ($\beta = 0, \tau = \sigma$) lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 u'' - \sigma^2 u &= \frac{dU}{d\eta} v \\
 v^{IV} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v &= -\mu \sigma^2 U u
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Wir werden gelegentlich auch davon Gebrauch machen, daß sich das System (2.5) so schreiben läßt:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u'' - \tau^2 u &= \lambda \frac{dU}{d\eta} v \\ v^{IV} - (\tau^2 + \sigma^2)v'' + \tau^2 \sigma^2 v &= -\lambda \sigma^2 U u, \end{aligned}$$

wenn man mit $\mu^{\frac{1}{2}} = \lambda$ das Produkt λu als neue Funktion u erklärt.

Diese Differentialgleichungen stellen bei den Randbedingungen

$$u(0) = v(0) = v'(0) = 0$$

$$u(\infty) = v(\infty) = v'(\infty) = 0$$

eine Eigenwertaufgabe für den Parameter μ in Abhängigkeit von τ und σ dar. (Die Randbedingungen ergeben sich aus der Forderung, daß die kleinen Störungsfunktionen u_1, v_1, w_1 an der Wand und im Unendlichen verschwinden sollen; dabei fließen die beiden Forderungen für v' aus der vierten der Gleichungen (2.3).) Insbesondere interessiert man sich für die dem Betrage nach kleinsten Eigenwerte μ im Falle $\tau = \sigma$ ($\beta = 0$, neutrale Störungen) sowie dann auch in den Fällen $\tau > \sigma$ ($\beta > 0$, angefachte Störungen). Dabei geht die mit der Grenzschichtdicke δ gebildete Reynoldssche Zahl $Re = U_0 \delta / \nu$ nur in dem Produkt $(\mu/2)^{\frac{1}{2}} = Re(\delta/R)^{\frac{1}{2}}$ in unsere Betrachtungen ein.

§3. Die Lösungen von H. Görtler und von D. Meksyn.

Die Lösung von H. GÖRTLER. Mit Hilfe der Greenschen Funktionen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} G(\eta, \eta_0) &= \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\tau\eta_0} \sinh \tau\eta & \eta \leq \eta_0 \\ \frac{1}{\tau} e^{-\tau\eta} \sinh \tau\eta_0 & \eta_0 \leq \eta \end{cases} \\ \tau \neq \sigma \quad H(\eta, \eta_0) &= \begin{cases} \frac{1}{(\sigma + \tau)(\sigma - \tau)^2} [(e^{-\sigma\eta_0} - e^{-\tau\eta_0})(\cosh \sigma\eta - \cosh \tau\eta) \\ \quad - \frac{1}{\sigma\tau} (\tau e^{-\sigma\eta_0} - \sigma e^{-\tau\eta_0})(\tau \sinh \sigma\eta - \sigma \sinh \tau\eta)] & \eta \leq \eta_0 \\ \frac{1}{(\sigma + \tau)(\sigma - \tau)^2} [(e^{-\sigma\eta} - e^{-\tau\eta})(\cosh \sigma\eta_0 - \cosh \tau\eta_0) \\ \quad - \frac{1}{\sigma\tau} (\tau e^{-\sigma\eta} - \sigma e^{-\tau\eta})(\tau \sinh \sigma\eta_0 - \sigma \sinh \tau\eta_0)] & \eta_0 \leq \eta \end{cases} \end{aligned}$$

$$\tau = \sigma \quad H(\eta, \eta_0) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma^3} [e^{-\sigma(\eta_0+\eta)} \{2\sigma^2\eta_0\eta + \sigma(\eta_0 + \eta) + 1\} \\ \quad - e^{-\sigma(\eta_0-\eta)} \{\sigma(\eta_0 - \eta) + 1\}] & \eta \leq \eta_0 \\ \frac{1}{4\sigma^3} [e^{-\sigma(\eta+\eta_0)} \{2\sigma^2\eta\eta_0 + \sigma(\eta + \eta_0) + 1\} \\ \quad - e^{-\sigma(\eta-\eta_0)} \{\sigma(\eta - \eta_0) + 1\}] & \eta_0 \leq \eta \end{cases}$$

lassen sich die Differentialgleichungen (2.5) in die Integralgleichungen

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u(\eta) &= - \int_0^\infty G(\eta, \eta_0) \frac{dU(\eta_0)}{d\eta_0} v(\eta_0) d\eta_0 \\ v(\eta) &= \mu\sigma^2 \int_0^\infty H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) u(\eta_0) d\eta_0 \end{aligned}$$

überführen.

Ersetzt man nun die Integrale durch Summen, so streben nach FREDHOLM und HILBERT die Nullstellen der Determinante des entstehenden homogenen Gleichungssystems gleichmäßig gegen die Eigenwerte μ des Systems (3.2). Die bei H. GÖRTLER der Berechnung zugrundegelegten Profile (Blasiussche Platten-grenzschicht, zwei Sinusprofile, von denen eines einen Wendepunkt besitzt und das Streckenprofil) haben alle die Eigenschaft $U(\eta) \equiv 1$ für $\eta \geq 1$. Damit schrumpft das Integrationsintervall der ersten Gleichung (3.2) zusammen auf das Intervall $0 \leq \eta_0 \leq 1$. Die Schwierigkeit, die das unendliche Intervall in der zweiten Integralgleichung mit sich bringt, wird so umgangen, daß die Integration nur bis zu einem endlichen Wert η_0 durchgeführt wird, weil $H(\eta, \eta_0)$ wie auch $u(\eta_0)$ für $\eta_0 \rightarrow \infty$ exponentiell abklingen. Bei der vorgenommenen numerischen Auswertung kommt das darauf hinaus, daß auch von diesem Intervall nur das Stück von 0 bis 1 berücksichtigt wird. Die Konvergenz der so gefundenen Werte $\mu(\sigma)$ —vor allem wird der Fall $\tau = \sigma$ behandelt—ist verhältnismäßig gut, und die Ergebnisse scheinen im Hinblick auf die Genauigkeitsansprüche, die für diesen ersten Überblick gestellt wurden, befriedigend zu sein. Die approximierenden algebraischen Gleichungen für $\mu(\sigma)$ weisen hierbei alternierende Vorzeichen auf, so daß man bei dieser Rechnung nur positive Werte $\mu(\sigma)$, also Instabilitäten der angesetzten Art nur an konkaven Wänden erhält.

So findet man z. B. für das Blasius-Profil eine Kurve $\sqrt{\mu(\sigma)/2}$, die in der Gegend von $\sigma = 1, 2$ ein Minimum der Höhe 16 hat (H. GÖRTLER *l.c.* Bild 4). Legt man, um einen physikalisch sinnvollen Vergleich der verwandten Profile zu ermöglichen, allen diesen dieselbe Impulsverlustdicke zugrunde und trägt den mit dieser Impulsverlustdicke ϑ gebildeten kritischen Görtler-Parameter $(U_0\vartheta/\nu)(\vartheta/R)^{\frac{1}{2}}$ über $\alpha\vartheta$ auf, so zeigt sich, daß die den obengenannten Grundprofilen entspringenden Kurven sich nur wenig unterscheiden. Ihre Minima liegen bei $\alpha\vartheta = 0,17$ und haben die Höhe 0,65. Eine Ausnahme bildet hierbei die etwas höherliegende Kurve, welche aus dem Streckenprofil hervorgeht (H.

GÖRTLER *l.c.* Bild 6 und Fig. 11 dieser Arbeit). Entsprechend werden dann noch einige Anfachungskurven ($\tau > \sigma$) berechnet, die dort in Bild 8, doppeltlogarithmisch aufgetragen, zu finden sind.

Die Lösung von D. MEKSYN. Bei D. MEKSYN [5] werden zunächst die Differentialgleichungen (2.5) auf eine einzige Gleichung 6. Ordnung in $v(\eta)$ reduziert. Der Verfasser beschränkt sich dann darauf, das Streckenprofil und dieses nur im Fall $\tau = \sigma$ zu behandeln.

Unter gewissen weiteren Annahmen, die für die Brauchbarkeit der späteren Resultate entscheidend sein dürften, werden mittels dieser Differentialgleichung für $v(\eta)$ sechs Fundamentallösungen $u_1, u_2, \dots, u_6$ im Gebiet $0 \leq \eta \leq 1$ ausgerechnet, als deren Linearkombination sich $u(\eta)$ darstellt.

Im Gebiet $\eta \geq 1$ nehmen die Differentialgleichungen (2.6) für Profile mit $U(\eta) = 1$ die Gestalt

$$\begin{aligned} u'' - \sigma^2 u &= 0 & u(\infty) &= 0 \\ (3.3) \quad v^{IV} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v &= -\mu\sigma^2 u & v(\infty) &= 0 \\ & & v'(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

an und lassen sich lösen zu

$$\begin{aligned} u &= Ae^{-\sigma\eta} \\ v &= (B + C\eta)e^{-\sigma\eta} - \frac{1}{8}A\mu\eta^2 e^{-\sigma\eta} \end{aligned}$$

Wie man nachrechnet, genügen diese Lösungen den Identitäten:

$$\begin{aligned} \sigma u + u' &= 0 \\ (3.4) \quad \sigma^2 v + 2\sigma v' + v'' + \frac{1}{4}\mu u &= 0 \\ \sigma^2 v' + 2\sigma v'' + v''' + \frac{1}{4}\mu u' &= 0 \end{aligned}$$

Von den sechs Fundamentallösungen im Gebiet $0 \leq \eta \leq 1$ wird nun verlangt, daß ihre Linearkombination bei $\eta = 0$ die dortigen Randbedingungen $u(0) = 0$, $u''(0) = 0$, $u'''(0) = \sigma^2 u'(0)$ und bei $\eta = 1$ die Gleichungen (3.4) erfüllt. Das liefert sechs homogene Gleichungen für die sechs freien Konstanten, deren Determinante, gleich Null gesetzt, eine Bestimmungsgleichung für $\mu(\sigma)$ ergibt. Das Ergebnis der Auswertung dieser Determinante ist eine Kurve $\sqrt{\mu(\sigma)}/2$, die für $\sigma = 2,4$ ein Minimum der Höhe 54 oder, bezogen auf die Impulsverlustdicke, bei $\alpha\vartheta = 0,4$ ein Minimum der Höhe 3,65 hat. (D. MEKSYN *l.c.* Fig. 1 und Fig. 11 dieser Arbeit).

Damit stehen wir vor der Tatsache, daß für dasselbe Problem—nämlich die kleinsten Eigenwerte der Differentialgleichungen (2.5) bzw. (2.6) zu finden—zwei Lösungen vorliegen, die sich beträchtlich stärker voneinander unterscheiden, als man für Approximationen gemeinhin zulassen darf.

Im folgenden werden wir uns bemühen, eine Lösung anzugeben, die ein Urteil über die in diesem Paragraphen berichteten Ergebnisse gestattet.

II. ABSCHNITT

§4. Eine Existenzaussage über das Vorhandensein eines kritischen Görtler-Parameters. Wir gehen von dem System der beiden Integralgleichungen

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u(\eta) &= -\lambda \int_0^\infty G(\eta, \eta_0) \frac{dU}{d\eta_0} v(\eta_0) d\eta_0 \\ v(\eta) &= \lambda \int_0^\infty \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) u(\eta_0) d\eta_0 \end{aligned}$$

aus.

Diese Integralgleichungen führen wir durch die Transformation $\eta = \frac{x}{1-x}$, $\eta_0 = \frac{\xi}{1-\xi}$ in ein System von Gleichungen mit dem Definitionsbereich $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$ über, um bei dieser theoretischen Betrachtung die Sonderstellung eines unendlichen Bereichs nicht jeweils beachten zu müssen. Das liefert

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{u}(x) &= -\lambda \int_0^1 \bar{G}(x, \xi) \frac{d\bar{U}}{d\xi} \bar{v}(\xi) d\xi \\ \bar{v}(x) &= \lambda \int_0^1 \bar{H}(x, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{u}(\xi) d(\xi), \end{aligned}$$

wobei diese Abkürzungen verwendet sind:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ \bar{v}(x) &= v\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ \bar{G}(x, \xi) &= G\left(\frac{x}{1-x}, \frac{\xi}{1-\xi}\right) \frac{1}{(1-\xi)^2} \\ \bar{H}(x, \xi) &= \sigma^2 H\left(\frac{x}{1-x}, \frac{\xi}{1-\xi}\right) \frac{1}{(1-\xi)^2} \\ \bar{U}(\xi) &= U\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen lassen sich die Integralgleichungen (4.2) in eine einzige ver-

wandeln; schreibt man etwa die erste Gleichung (4.2) als

$$\bar{u}(\xi) = -\lambda \int_0^1 \bar{G}(\xi, t) \frac{d\bar{U}}{dt} \bar{v}(t) dt$$

und setzt dies in die zweite Gleichung (4.2) ein, so ergibt sich

$$\bar{v}(x) = -\lambda^2 \int_0^1 \bar{H}(x, \xi) \bar{U}(\xi) \left[\int_0^1 \bar{G}(\xi, t) \frac{d\bar{U}}{dt} \bar{v}(t) dt \right] d\xi$$

oder

$$\bar{v}(x) = -\mu \int_0^1 \left[\int_0^1 \bar{H}(x, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{G}(\xi, t) \frac{d\bar{U}}{dt} d\xi \right] \bar{v}(t) dt,$$

also eine Integralgleichung

$$(4.3) \quad \bar{v}(x) = \mu \int_0^1 K(x, t) \bar{v}(t) dt$$

mit dem Kern

$$K(x, t) = -\frac{d\bar{U}}{dt} \int_0^1 \bar{H}(x, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{G}(\xi, t) d\xi.$$

Um diesen Kern explizit zu berechnen, hätte man, dem Charakter der Greenschen Funktionen G und H entsprechend, die Integration so aufzuspalten:

$$(4.4) \quad K(x, t) = \begin{cases} \int_0^x + \int_x^t + \int_t^1 & x \leq t \\ \int_0^t + \int_t^x + \int_x^1 & t \leq x \end{cases}$$

Hier müssen wir eine Bemerkung über die Wahl der Grundprofile $U(\eta)$ einschleichen: Wir werden mit zwei Klassen solcher Profile arbeiten:

- a) Mit dem analytischen Profil $U(\eta) = 1 - e^{-3\eta}$
- b) Mit Profilen, für die gilt: $U(0) = 0, U(\eta) > 0$ für $\eta > 0$
 $U'(0) \geq 0, U'(\eta) > 0$ für $0 < \eta < 1$
 und $U(\eta) \equiv 1$ für $\eta \geq 1, U'(\eta) \equiv 0$ für $\eta \geq 1$.

Man sieht sofort, daß wegen des exponentiellen Abfallens der Greenschen Funktionen $G(\eta, \eta_0)$ und $H(\eta, \eta_0)$ bei $\eta \rightarrow \infty$ oder $\eta_0 \rightarrow \infty$ und wegen des mindestens exponentiellen Abfallens der Ableitungen der zu verwendenden Grenzschicht-Grundprofile $U(\eta)$ der Kern $K(x, t)$ im ganzen Bereich $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ beschränkt ist. Ebenfalls erhellt aus der angedeuteten expliziten Darstellung (4.4), daß $K(x, t)$ wegen der Stetigkeit der Greenschen Funktionen und

der Grundprofile jedenfalls stückweise stetig ist. Damit erfüllt $K(x, t)$ die Forderung der quadratischen Integrabilität, und wir können an die Gleichung (4.3) mit Hilfe der Theorie der homogenen Integralgleichungen 2. Art herangehen.

Eine genauere Diskussion der Greenschen Funktionen G und H wird später folgen. Aus der Darstellung (3.1) ist jedoch leicht zu bestätigen, daß im ganzen Definitionsbereich gilt:

$$\bar{G}(\xi, t) \geq 0 \quad \bar{H}(x, \xi) \leq 0$$

Wegen

$$\bar{U}(\xi) \geq 0 \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} \geq 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist also $K(x, t) \geq 0$ im ganzen Definitionsbereich.

Unter diesen Voraussetzungen bietet sich für eine Existenzaussage der Satz von JENTZSCH (W. SCHMEIDLER [8], S. 298) an, der lautet:

Positive Kerne $K(x, t) > 0$, die quadratisch integrabel sind und höchstens in einer Menge vom Maß Null verschwinden, besitzen stets einen reellen, positiven Eigenwert, der einfach ist und kleiner als die Beträge aller andern Eigenwerte; die zugehörige Eigenfunktion hat im ganzen Intervall dasselbe Vorzeichen.

Um diesen Satz hier anzuwenden, müssen wir uns noch davon überzeugen, daß unser Kern nur in einer Menge vom Maß Null verschwindet. Für diejenigen Profile, welche für uns in Frage kommen, ist das der Fall. Da $\bar{G}(\xi, t)$ und $\bar{H}(x, \xi)$ nur auf dem Rande des Definitionsbereichs verschwinden, läßt sich für das analytische Profil sofort einsehen, daß $K(x, t)$ nur in einer Menge vom Maß Null, nämlich ebenfalls auf dem Rande verschwindet. Bei den Profilen der Klasse b.), bei denen die Variable t nur das Intervall $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ zu durchlaufen hat, reduziert sich das eigentliche Problem auf die Lösung im Intervall $0 \leq x, t \leq \frac{1}{2}$, und hier verschwindet $K(x, t)$ ebenfalls nur auf dem Rande. $\bar{v}(x)$ für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ bestimmt sich dann eindeutig aus dieser Lösung und bleibt dabei einerlei Vorzeichens. Eine analoge Betrachtung kann man für $\bar{u}(x)$ anstellen, wenn man die zweite Integralgleichung in die erste einsetzt.

Damit wissen wir, daß zu jedem Parameterwert $\sigma > 0$ ein einfacher, positiver Eigenwert μ von minimalem Betrage, also ein kritischer Görtler-Parameter existiert und daß die zugehörigen Eigenfunktionen $u(\eta)$ und $v(\eta)$ nie das Vorzeichen wechseln.

Wir wollen uns noch klarmachen, daß auch alle weiteren Eigenwerte μ —falls überhaupt solche vorhanden sind—reell und positiv sein müssen, wenn es möglich sein soll, ihnen eine physikalische Bedeutung beizumessen.

Dazu verwandeln wir die Integralgleichungen (4.2) auf andere Weise in eine

einzigste Gleichung:

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \int_0^2 L(s, t) g(t) dt \\
 g(s) &= \begin{cases} \bar{u}(s) & 0 \leq s \leq 1 \\ \bar{v}(s-1) & 1 \leq s \leq 2 \end{cases} \\
 (4.5) \quad L(s, t) &= \begin{cases} \equiv 0 & 0 \leq s \leq 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -\bar{G}(s, t-1) \frac{d\bar{U}(t-1)}{dt} & & 1 \leq t \leq 2 \\ \bar{H}(s-1, t) \bar{U}(t) & 1 \leq s \leq 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ \equiv 0 & & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Es war $\lambda = Re(\delta/R)^{\frac{1}{2}}$; je nach dem Vorzeichen, das der Krümmungsradius R hat, kommen—da ja Re stets positiv ist—für λ sinnvollerweise nur reelle oder rein imaginäre Werte in Frage. Die Behauptung läuft also darauf hinaus, daß rein imaginäre Werte von λ keinen physikalischen Sinn hätten. Um das einzusehen, haben wir nur daran zu denken, daß sowohl die gesuchten Eigenfunktionen $g(s)$ als auch der Kern $L(s, t)$ bei der physikalischen Bedeutung von $g(s)$ reelle Funktionen sind und als solche bei imaginärem λ die Gleichung (4.5) nicht erfüllen können.

So haben wir physikalisch sinnvolle Lösungen nur für reelle Werte von λ , also positive Werte von $\lambda^2 = \mu$ zu erwarten. Das bedeutet, daß nicht nur die dem minimalen Eigenwert entsprechenden Störungen, sondern überhaupt alle Störungen der angesetzten Art nur an konkaven Wänden ($R > 0$) auftreten können.

§5. Das Iterationsverfahren zur Bestimmung des kleinsten Eigenwerts.

Wir wollen uns nun der Berechnung des kleinsten Eigenwerts μ_1 neutraler Störungen und der zugehörigen Eigenfunktionen $u(\eta)$ und $v(\eta)$ zuwenden. Das soll mit Hilfe des von H. WIELANDT [9] angegebenen Iterationsverfahrens geschehen.

Dazu beziehen wir uns zunächst auf eine Integralgleichung

$$h(x) = \mu \int_0^1 M(x, t) h(t) dt.$$

Es existiere ein Eigenwert μ_1 von minimalem Betrage—wobei es auf die Vielfachheit dieses Eigenwerts nicht ankommt—also $|\mu_1| < |\mu_2|$. Wählt man nun eine beliebige Ausgangsfunktion $h_0(x)$ und führt diese in die rechte Seite der Integralgleichung ein, so berechnen sich daraus $h_1(x)$ und analog die weiteren Iterierten. (In der Wielandtschen Arbeit wird der Begriff der Beteiligung eines Eigenwerts an einer Ausgangsfunktion eingeführt. Für die Konvergenz des Iterationsverfahrens ist erforderlich, daß der Eigenwert μ_1 an der Ausgangsfunktion

h_0 beteiligt ist. Für eine willkürlich gewählte Ausgangsfunktion darf man dies annehmen, da nur durch Berechnung oder Zufall eine solche Beteiligung vermieden werden kann. Vgl. H. WIELANDT *l.c.*)

Die Folge $h_{\nu-1}(x_0)/h_\nu(x_0)$ konvergiert dann gleichmäßig gegen den kleinsten Eigenwert μ_1 , ebenso konvergiert die Folge $h_\nu(x)$ bis auf einen konstanten Faktor gegen die zum kleinsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion; dabei ist x_0 ein beliebiger fester Wert von x . Allgemein konvergieren die Folgen $\mathfrak{G}h_{\nu-1}(x)/\mathfrak{G}h_\nu(x)$ gegen den kleinsten Eigenwert; dabei bezeichnet $\mathfrak{G}$ ein lineares Funktional. Die Konvergenz der Folge $h_{\nu-1}(x_0)/h_\nu(x_0)$ ist asymptotisch so gut wie die von $\sum_\nu (\mu_1/\mu_2)^\nu$.

Zur praktischen Berechnung dieser Iterationsfolgen greifen wir auf das System (4.1) zurück. Das bietet uns den Vorteil, daß sich mehr Zwischenresultate ergeben; diese können, wie gleich dargelegt werden soll, ohne Mehraufwand an Integrationsarbeit bei der Aufstellung der Iterationsfolgen benutzt werden. Dazu soll noch ein Wort über das Iterationsverfahren bei Systemen von Integralgleichungen gesagt werden.

Allgemein lautet ein System von zwei Integralgleichungen

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f(x) &= \lambda \left\{ \int_a^b K_{11}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_a^b K_{12}(x, \xi) g(\xi) d\xi \right\} \\ g(x) &= \lambda \left\{ \int_a^b K_{21}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_a^b K_{22}(x, \xi) g(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Die Iteration hat hier mit zwei beliebigen Ausgangsfunktionen $f_0(x)$ und $g_0(x)$ zu beginnen, und die Folgen $f_{\nu-1}(x_0)/f_\nu(x_0)$ sowie $g_{\nu-1}(x_0)/g_\nu(x_0)$ konvergieren gleichmäßig gegen den kleinsten Eigenwert λ_1 des Systems. Für unser System (4.1)—wir arbeiten der Einfachheit halber mit den Variablen η und η_0 —

$$\begin{aligned} u(\eta) &= \lambda \int_0^\infty -G(\eta, \eta_0) \frac{dU}{d\eta_0} v(\eta_0) d\eta_0 \\ v(\eta) &= \lambda \int_0^\infty \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) u(\eta_0) d\eta_0 \end{aligned}$$

gilt in der Terminologie von (5.1):

$$\begin{aligned} K_{11} &\equiv 0 & K_{12} &= -G(\eta, \eta_0) \frac{dU}{d\eta_0} \\ K_{21} &= \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) & K_{22} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Hier gehen also in $u_1(\eta)$ nur die Anfangsfunktion $v_0(\eta)$ und in $v_1(\eta)$ nur die Anfangsfunktion $u_0(\eta)$ ein. Demzufolge führen $v_0(\eta)$ zu einer Folge $u_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, $u_3(\eta)$, $v_4(\eta)$, $\dots$ und $u_0(\eta)$ zu einer Folge $v_1(\eta)$, $u_2(\eta)$, $v_3(\eta)$, $u_4(\eta)$, $\dots$. Man hat also zum Vergleich die von $u_0(\eta)$ bzw. $v_0(\eta)$ ausgehenden iterativen Funktionen-

folgen getrennt zu benutzen; das liefert die Quotientenfolgen

$$\frac{\mathfrak{G}u_{\nu-1}(\eta)}{\mathfrak{G}u_{\nu+1}(\eta)} = \frac{\mathfrak{G}u_{\nu-1}}{\mathfrak{G}u_{\nu}} \frac{\mathfrak{G}u_{\nu}}{\mathfrak{G}u_{\nu+1}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{G}v_{\nu-1}(\eta)}{\mathfrak{G}v_{\nu+1}(\eta)} = \frac{\mathfrak{G}v_{\nu-1}}{\mathfrak{G}v_{\nu}} \frac{\mathfrak{G}v_{\nu}}{\mathfrak{G}v_{\nu+1}},$$

deren jede natürlich gegen $\lambda_1^2 = \mu_1$ konvergiert. Dies ist die sinngemäße Folge davon, daß das System (4.1) sich auf eine Integralgleichung (4.3) mit dem Eigenwertparameter μ reduzieren läßt.

Ein Schema veranschaulicht das sehr deutlich:

a) Allgemeiner Fall: $K_{\nu\kappa} \not\equiv 0$ ($\nu, \kappa = 1, 2$)

b) Spezieller Fall: $K_{11} \equiv 0$ $K_{12} \not\equiv 0$
 $K_{21} \not\equiv 0$ $K_{22} \equiv 0$

Neben den schon genannten Folgen konvergiert auch die Folge $|\mathfrak{G}_\nu(x)|^{-1/\nu}$ gegen $|\lambda_1|$; man wird hier im allgemeinen eine schlechtere Konvergenz als bei der Quotientenbildung zu erwarten haben. Denn jede Ausgangsfunktion ist mit einem willkürlichen Faktor c behaftet, der sich bei der Quotientenbildung gerade heraushebt. Bei der letztgenannten Vorschrift hingegen verschwindet sein Einfluß nur in dem Maße, wie $c^{-1/\nu}$ gegen Eins strebt.

Die Berechnung der iterierten Funktionen. a) Da bei H. GÖRTLER neben anderen, besseren Profilen auch das Streckenprofil, bei D. MEKSYN nur dieses den Rechnungen zugrundegelegt wird und da dieses Profil wegen seiner einfachen Gestalt ein Minimum an Integrationsarbeit erfordert, wurden die Iterationen zunächst mit diesem Profil durchgeführt. Wir geben also vor:

$$U(\eta) = \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & 1 \leq \eta, \end{cases}$$

behandeln also das System

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u(\eta) &= \lambda \int_0^1 -G(\eta, \eta_0)v(\eta_0) d\eta_0 \\ v(\eta) &= \lambda \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0)\eta_0 u(\eta_0) d\eta_0 + \lambda \int_1^\infty \sigma^2 H(\eta, \eta_0)u(\eta_0) d\eta_0. \end{aligned}$$

Als Anfangsfunktion $v_0(\eta)$ —die nur im Intervall $0 \leq \eta \leq 1$ benötigt wird—verwenden wir $v_0(\eta) \equiv 1$. Man kann das als Mittelwert der Eigenfunktion $v(\eta)$ betrachten, von der wir ja wissen, daß sie nie das Vorzeichen wechselt.

Das ergibt

$$\begin{aligned} u_1(\eta) &= \int_0^1 -G(\eta, \eta_0) d\eta_0 \\ u_1(\eta) &= \begin{cases} -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} e^{\sigma\eta} + \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} e^{\sigma}\right) e^{-\sigma\eta} & 0 \leq \eta \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma^2} (1 - \cosh \sigma) e^{-\sigma\eta} & 1 \leq \eta \end{cases} \end{aligned}$$

Eingeführt in die zweite Gleichung (5.2):

$$\begin{aligned} v_2(\eta) &= \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0)\eta_0 u_1(\eta_0) d\eta_0 + \int_1^\infty \sigma^2 H(\eta, \eta_0)u_1(\eta_0) d\eta_0 \\ v_2(\eta) &= \frac{1}{\sigma^4} \eta + (b_1 + b_2\eta + b_4\eta^2 + b_6\eta^3)e^{\sigma\eta} + (-b_1 + b_3\eta + b_5\eta^2 + b_7\eta^3)e^{-\sigma\eta} \end{aligned}$$

in $0 \leq \eta \leq 1$.

Dabei hängen die Koeffizienten b_ν in komplizierter Weise von σ ab. So ist z. B.

$$b_1 = -\frac{1}{e^\sigma} \left(\frac{1}{24\sigma^2} + \frac{1}{4\sigma^3} + \frac{21}{32\sigma^4} + \frac{11}{16\sigma^5} \right) + \frac{1}{e^{2\sigma}} \left(\frac{1}{16\sigma^4} + \frac{1}{8\sigma^5} \right) - \frac{1}{e^{3\sigma}} \left(\frac{1}{32\sigma^4} + \frac{1}{16\sigma^5} \right).$$

So entstehen sukzessive diese iterierten Funktionen:

$$\begin{aligned} u_3(\eta) &= -\frac{1}{\sigma^6} \eta + (c_1 + c_2\eta + c_4\eta^2 + c_6\eta^3 + c_8\eta^4) e^{\sigma\eta} \\ &\quad + (-c_1 + c_3\eta + c_5\eta^2 + c_7\eta^3 + c_9\eta^4) e^{-\sigma\eta} \quad \text{in } 0 \leq \eta \leq 1, \\ u_3(\eta) &= \bar{c} e^{-\sigma\eta} \quad 1 \leq \eta \\ v_4(\eta) &= 4 \frac{1}{\sigma^{10}} + \frac{1}{\sigma^8} \eta^2 - 4 \frac{1}{\sigma^{10}} e^{-\sigma\eta} + (d_1 + d_2\eta + \dots + d_{14}\eta^7) e^{\sigma\eta} \\ &\quad + (-d_1 + d_3\eta + \dots + d_{15}\eta^7) e^{-\sigma\eta} \quad \text{in } 0 \leq \eta \leq 1. \end{aligned}$$

Dabei ist z. B. d_1 bereits zu einem 46-gliedrigen Ausdruck in Potenzen von $1/\sigma$, $1/e^\sigma$ und den Koeffizienten c_ν von $u_3(\eta)$ angewachsen. Zur Berechnung von $v_4(\eta)$ aus $u_3(\eta)$ waren 161 Integrationen erforderlich, deren jede bis zu 16-gliedrige Ausdrücke liefert.

Als letzte Funktion wurde noch berechnet:

$$u_5(\eta) = \bar{\epsilon} e^{-\sigma\eta} \quad \text{in } 1 \leq \eta$$

Die Durchführung dieser Rechnungen wäre natürlich sehr bedenklich, wenn man nicht hinreichende Kontrollen einschalten könnte. Das ist aber hier möglich; denn alle iterierten Funktionen von v_2 ab müssen den Randbedingungen

$$u(0) = v(0) = v'(0) = 0$$

$$u(\infty) = 0$$

sowie den daraus folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u''(0) &= 0 \\ u'''(0) &= \sigma^2 u'(0) \end{aligned} \right\} \quad \text{aus} \quad u'' - \sigma^2 u = v$$

$$\left. \begin{aligned} v^{\text{IV}}(0) - 2\sigma^2 v''(0) &= 0 \\ v^{\text{V}}(0) - 2\sigma^2 v'''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{aus} \quad v^{\text{IV}} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v = -\mu\sigma^2 \eta u$$

genügen. Das ergibt gewisse lineare Abhängigkeiten der Koeffizienten für alle Werte des Parameters σ . So ist z. B. die Forderung $v'(0) = 0$ für die Iterierte $v_4(\eta)$ gleichwertig mit der Identität in σ :

$$4 \frac{1}{\sigma^9} + 2\sigma d_1 + d_2 + d_3 = 0.$$

TABELLE I. Die numerischen Ergebnisse der Iteration beim Streckenprofil. Das Konvergenzverhalten der Folgen $|u_p(1)|^{-1/p}$ und $|v_p(1)|^{-1/p}$ ist aus dem im Text genannten Grunde wesentlich schlechter.

σ	$u_1(1)$	$v_2(1)$	$u_2(1)$	$v_3(1)$	$u_3(1)$	$\sqrt{\mu_1^{(1)}/2}$	$\sqrt{\mu_1^{(2)}/2}$	$\sqrt{\mu_1^{(3)}/2}$
0,1	-0,452 795 85		-0,013 040			4,166 7		
0,3	-0,373 195 53		-0,008 202 1			4,550 0		
0,5	-0,309 636 24	0,036 508 07	-0,006 232 53	0,03731 11	-0,03125 07	4,984 0	4,996 8	4,991 6
0,6	-0,282 737 42	0,032 634 01	-0,005 187 02	0,03594 36		5,230 6	5,239 6	
0,7	-0,258 598 33	0,029 158 86	-0,004 322 22	0,03482 78		5,469 4	5,495 3	
0,8	-0,236 905 15	0,026 050 81	-0,003 607 10	0,03391 92	-0,03054 19	5,730 5	5,765 0	5,769 1
0,9	-0,217 382 45	0,023 277 19	-0,003 015 56	0,03318 24		6,003 6	6,047 5	
1,0	-0,199 788 20	0,020 805 88	-0,002 525 85	0,03258 50	-0,03031 27	6,288 8	6,343 8	6,355 1
1,1	-0,183 909 50	0,018 606 31	-0,002 119 96	0,03210 27	-0,03023 83	6,586 0	6,651 6	6,669 4
1,2	-0,169 558 86	0,016 650 05	-0,001 783 15	0,03171 09	-0,03018 23	6,895 3	6,975 6	6,993 4
1,4	-0,144 800 03	0,013 364 34	-0,001 269 95	0,03113 87	-0,03010 74	7,550 5	7,660 4	7,689 1
1,6	-0,124 408 04	0,010 766 75	-0,000 912 72	0,03076 37	-0,03006 41	8,255 4	8,395 9	8,438
1,8	-0,107 519 44	0,008 710 10	-0,000 662 00	0,03051 44	-0,03003 87	9,011 5	9,201 2	9,248
2,0	-0,093 455 44	0,007 077 99	-0,000 454 56	0,03035 33	-0,03002 38	9,820 0	10,008	10,089

Zur Aufstellung der Iterationsfolgen für den kleinsten Eigenwert μ_1 wurde das einfachste Funktional $\mathfrak{G}f = f(\eta)$ mit $\eta = 1$ benutzt. Es führt auf die Folgen

$$\begin{aligned}\mu_1^{(\nu)} &= \frac{u_\nu(1)}{u_{\nu+2}(1)} & \mu_1^{(\nu)} &= \frac{v_\nu(1)}{v_{\nu+2}(1)} \\ \mu_1^{(\nu)} &= |u_\nu(1)|^{-1/\nu} & \mu_1^{(\nu)} &= |v_\nu(1)|^{-1/\nu}.\end{aligned}$$

Wir können berechnen:

$$\mu_1^{(1)} = \frac{u_1(1)}{u_3(1)} \quad \mu_1^{(2)} = \frac{v_2(1)}{v_4(1)} \quad \mu_1^{(3)} = \frac{u_3(1)}{u_5(1)}$$

und die 5 ersten Glieder der zweiten Folge:

$$|u_1(1)|^{-1}, |v_2(1)|^{-\frac{1}{2}}, \dots, |u_5(1)|^{-\frac{1}{5}}.$$

FIG. 2. Die ersten drei Annäherungen des kleinsten Eigenwerts μ_1 bei Quotientenbildung; aufgetragen sind die Werte $(\mu_1^{(\nu)}/2)^{\frac{1}{\nu}}$. Vgl. auch Tabelle I.

Für die Parameterwerte $\sigma < 0,5$ konnte die numerische Auswertung der Iterationen nicht über $u_3(\eta)$ hinaus durchgeführt werden, da wir sehr große Koeffizienten erhalten, die auf sehr kleine Funktionswerte führen, so daß wegen der Rundungsfehler die Ergebnisse unbrauchbar werden. Jedenfalls beobachtet man bei $\sigma > 0,5$, daß die Konvergenz der Folgen $\mu_1^{(v)}$ für kleiner werdende σ besser wird; so dürfen wir erwarten, daß sich dieses Verhalten bei $\sigma < 0,5$ fortsetzt und daß damit die Kurve $\mu_1^{(1)}$ auch dort den Wert μ_1 schon sehr gut approximiert. Diese Vermutung wird sich in §6 vollauf bestätigen.

FIG. 3. Die iterierten Funktionen u_3 und v_4 für das Streckenprofil bei den Parameterwerten $\sigma = 0,5$ und $\sigma = 2,0$. (v_4 unterscheidet sich von v_3 praktisch nicht mehr). Normierung: $\text{Max } v_4(\eta) = 1$, ebenso für $|u_3(\eta)|$.

b) Gerüstet mit den beim Streckenprofil gemachten Erfahrungen wurde noch die Kurve $\mu_1^{(1)}$ für das analytische Profil $U(\eta) = 1 - e^{-3\eta}$ berechnet. Es ist anzunehmen, daß sich die Konvergenzverhältnisse hier nicht wesentlich von denen beim Streckenprofil unterscheiden werden; so kann man erwarten, daß $\mu_1^{(1)}$ bereits eine recht gute Approximation für μ_1 liefert. Auch das wird sich noch bestätigen.

Mit $v_0 \equiv 1$ errechnet man sich hier:

$$u_1(\eta) = \frac{3}{\sigma^2 - 9} (e^{-\sigma\eta} - e^{-3\eta})$$

$$v_2(\eta) = (\alpha_1 + \alpha_2\eta + \alpha_3\eta^2)e^{-\sigma\eta} + \alpha_4e^{-3\eta} + \alpha_5e^{-(\sigma+3)\eta} + \alpha_6e^{-6\eta}.$$

$$u_3(\eta) = \beta_1e^{-\sigma\eta} + (\beta_2 + \beta_3\eta + \beta_4\eta^2)e^{-(\sigma+3)\eta} + \beta_5e^{-6\eta} + \beta_6e^{-(\sigma+6)\eta} + \beta_7e^{-9\eta}.$$

Als eine Kontrolle ist z. B. zu benutzen:

$$u_3''(0) = \sigma^2\beta_1 + (\sigma + 3)^2\beta_2 - 2(\sigma + 3)\beta_3 + 2\beta_4 + 36\beta_5 + (\sigma + 6)^2\beta_6 + 81\beta_7 = 0.$$

FIG. 4. Die Ergebnisse der Iteration beim analytischen Profil.

§6. Der Verlauf des kritischen Görtler-Parameters für sehr grosse und sehr kleine Wellenlängen. Unser nächstes Anliegen muß es sein, den Bereich $0 < \sigma < 0,5$ genauer zu untersuchen. Vor allen Dingen erhebt sich hier die Frage, ob tatsächlich die Kurve $u_1^{(1)}$ den Verlauf von μ_1 gut wiedergibt und ob—wie sich nach §5 vermuten läßt—im Widerspruch zu den früheren Ergebnissen ein Grenzwert $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{1/2}$ der kritischen Kurven existiert.

Für kleine Werte des Parameters σ bietet sich ein Potenzreihenansatz für die Funktionen $u(\eta)$ und $v(\eta)$ an, wobei der Parameter σ bzw. σ^2 in den Koeffizienten dieser Reihe auftreten wird. Entsprechend der Ordnung unserer Differentialgleichungen werden wir in den Potenzreihen für $u(\eta)$ und $v(\eta)$ insgesamt sechs Konstanten zur Befriedigung der Randbedingungen zur Verfügung haben. Drei

dieser Konstanten lassen sich sofort durch die Bedingungen $u(0) = 0$, $v(0) = 0$ und $v'(0) = 0$ bestimmen; die drei übrigen bleiben noch frei.

Beschränken wir uns zunächst auf die Profile der Klasse b) in §4; für diese gilt $U(\eta) \equiv 1$ in $\eta \geq 1$.

Bezogen auf diese Profile lauten die Differentialgleichungen (2.6) in $\eta \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & u'' - \sigma^2 u = 0 & u(\infty) &= 0 \\
 & v^{IV} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v = -\mu\sigma^2 u & v(\infty) &= 0 \\
 & & v'(\infty) &= 0
 \end{aligned}$$

mit der exakten Lösung

$$\begin{aligned}
 u(\eta) &= Ae^{-\sigma\eta} \\
 v(\eta) &= (B + C\eta)e^{-\sigma\eta} - \frac{1}{8}A\mu\eta^2 e^{-\sigma\eta}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der drei freien Konstanten der Lösung für $\eta \leq 1$ und der drei Konstanten A , B , C werden nun die Außen- und die Innenlösung bei $\eta = 1$ zusammengeschlossen. Die Anschlußdeterminante soll uns eine Gleichung zur Bestimmung von μ liefern.

Entsprechend der Anzahl von freien Konstanten dürfen wir für den Zusammenschluß sechs Bedingungen stellen. Unsere Differentialgleichungen erlauben die Forderungen:

$$\begin{aligned}
 u_i(1) &= u_a(1) & v_i(1) &= v_a(1) \\
 u'_i(1) &= u'_a(1) & v'_i(1) &= v'_a(1) \\
 v''_i(1) &= v''_a(1) \\
 v'''_i(1) &= v'''_a(1)
 \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen lassen sich sofort durch Eliminieren der Unbekannten A , B , C auf drei homogene Gleichungen in drei Unbekannten reduzieren, wenn man davon Gebrauch macht, daß für $u_a(\eta)$ und $v_a(\eta)$ die Identitäten (3.4) gelten:

$$\begin{aligned}
 \sigma u_a(\eta) + u'_a(\eta) &= 0 \\
 \sigma^2 v_a(\eta) + 2\sigma v'_a(\eta) + v''_a(\eta) + \frac{1}{4}\mu u_a(\eta) &= 0 \\
 \sigma^2 v'_a(\eta) + 2\sigma v''_a(\eta) + v'''_a(\eta) + \frac{1}{4}\mu u'_a(\eta) &= 0
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir zur Bestimmung der drei freien Konstanten der Potenz-

reihen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \sigma u_i(1) + u_i'(1) = 0 \\
 (6.1) \quad & \sigma^2 v_i(1) + 2\sigma v_i'(1) + v_i''(1) + \frac{1}{4}\mu u_i(1) = 0 \\
 & \sigma^2 v_i'(1) + 2\sigma v_i''(1) + v_i'''(1) + \frac{1}{4}\mu u_i'(1) = 0
 \end{aligned}$$

Die Systemdeterminante ergibt, gleich Null gesetzt, eine Gleichung zur Bestimmung von $\mu(\sigma)$.

a) *Das Streckenprofil.*

$$U(\eta) = \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & 1 \leq \eta \end{cases}$$

$$u'' - \sigma^2 u = v$$

$$v^{IV} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v = -\mu \sigma^2 \eta u \quad \text{in } 0 \leq \eta \leq 1$$

Berücksichtigen wir in den Potenzreihen des Lösungsansatzes die erste Potenz von σ und vernachlässigen demgegenüber die höheren Potenzen, so wird dies für sehr kleine Werte von σ brauchbare Resultate liefern. Die Systemdeterminante (6.1) ergibt sich dann zu

$$\Delta_\sigma = \begin{vmatrix} 1 + \sigma & \frac{1}{3!} + \sigma \frac{1}{4!} & \frac{1}{4!} + \sigma \frac{1}{5!} \\ \frac{\mu}{4} & 1 + \frac{\mu}{4 \cdot 4!} + 2\sigma & 1 + \frac{\mu}{4 \cdot 5!} + \sigma \\ \frac{\mu}{4} & \frac{\mu}{4!} + 2\sigma & 1 + \frac{\mu}{4 \cdot 4!} + 2\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Insbesondere wird

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Delta_\sigma = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3!} \\ \frac{\mu}{4} & 1 + \frac{\mu}{4 \cdot 4!} \end{vmatrix} = 0,$$

also $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu(\sigma) = 32$.

Durch Differenzieren von Δ_σ findet man

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{128}{5}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\sqrt{\mu/2}}{d\sigma} = 1,6.$$

Das stimmt genau überein mit den Werten, welche die erste Iteration $\mu_1^{(1)}$ in (5.2) ergab.

Für die übrigen Profile wollen wir uns darauf beschränken, den $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu(\sigma)$

zu berechnen. Eine Darstellung aller Profile findet man in Fig. 5. Die Profile I, II und IV (I = Blasius'sche Plattengrenzschicht, II = Parabelprofil, IV = Analytisches Profil) können auftreten, wenn der der Grenzschicht von außen aufgeprägte Druck in Strömungsrichtung abfällt; das durch einen Wendepunkt ausgezeichnete Profil V kann sich ausbilden, wenn in Strömungsrichtung Druckanstieg herrscht. Das Profil VI mit $U'(0) = 0$ hat eine Gestalt, wie man sie sich an der Ablösestelle einer Grenzschicht vorzustellen hat. Das Streckenprofil III stellt eine Approximation eines realen Profils dar, die—wie sich zeigen wird—für unsere Zwecke sehr brauchbar ist.

Anstatt den Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ erst in der Systemdeterminante von (6.1) zu vollziehen, setzen wir für diesen Zweck in den Differentialgleichungen (2.6)

FIG. 5. Die in den Rechnungen behandelten Profile gleicher Impulsverlustdicke δ .

und in den Ersatzrandbedingungen (6.1) $\sigma = 0$ und machen zur Lösung einen Polynomansatz. Der dadurch bestimmte Wert μ ist gleich dem $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu(\sigma)$. Natürlich hat der Wert $\sigma = 0$ keinen physikalischen Sinn. Die Lösungen unserer Differentialgleichungen für dieses σ sind auch unter den Ersatzrandbedingungen nach wie vor $u(\eta) \equiv 0$ und $v(\eta) \equiv 0$. Der Übergang zum Grenzwert von $\mu(\sigma)$ ist als rein mathematischer Vorgang aufzufassen, während physikalische Bedeutung lediglich den Werten $\mu(\sigma)$ für $\sigma > 0$ beizulegen ist.

b) *Parabelprofil.*

$$U(\eta) = \begin{cases} 2\eta - \eta^2 & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & 1 \leq \eta \end{cases}$$

Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u'' &= 2(1 - \eta)v & u(0) &= 0 \\ & & v(0) &= 0 \\ v^{IV} &= 0 & v'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Polynomansatz:

$$v = \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3$$

$$u'' = 2\{\alpha_2 \eta^2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \eta^3 - \alpha_3 \eta^4\}$$

$$u = \alpha_1 \eta + \frac{1}{2 \cdot 3} \alpha_2 \eta^4 + \frac{1}{2 \cdot 5} (\alpha_3 - \alpha_2) \eta^5 - \frac{1}{3 \cdot 5} \alpha_3 \eta^6$$

Randbedingungen bei $\eta = 1$: $u'(1) = 0$

$$v''(1) + \frac{\mu}{4} u(1) = 0$$

$$v'''(1) = 0.$$

Die Determinante dieses Systems lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{\mu}{4} & 2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{15} \end{vmatrix} = 0$$

also $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu = 80$.

c) *Blasius-Profil*. Das Blasius-Profil wurde approximiert durch ein Polynom vierten Grades:

$$U(\eta) = \begin{cases} 1,9924\eta + 0,5664\eta^2 - 3,1100\eta^3 + 1,5512\eta^4 & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & 1 \leq \eta \end{cases}$$

Von dem Polynom wurde dabei gefordert:

$$U(0) = 0, U(1) = 1, U'(1) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} U'(0) &= 1,9924 \\ U(0,5) &= 0,8640 \end{aligned} \right\} \text{Tabellenwerte.}$$

Hier findet man

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,11547 \\ \frac{\mu}{4} & 2 + \frac{\mu}{4} 0,05941 \end{vmatrix} = 0$$

mit der Lösung $\mu = 142,70$.

d) *Wendepunktprofil:*

$$U(\eta) = \begin{cases} 0,75\eta + 1,5\eta^2 - 1,25\eta^3 & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & 1 \leq \eta \end{cases}$$

Das Profil genügt den Anforderungen:

$$U(0) = 0, \quad U(1) = 1, \quad U'(1) = 0, \quad U''(0,4) = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{\mu}{4} & 2 + \frac{\mu}{4} \frac{7}{80} \end{vmatrix} = 0$$

$$\mu = \frac{640}{13} = 49,231.$$

e) *Ablöseprofil:*

$$U(\eta) = \begin{cases} 3\eta^2 - 2\eta^3 & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & 1 \leq \eta \end{cases}$$

$$U(0) = 0, \quad U(1) = 1, \quad U'(0) = 0, \quad U'(1) = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{10} \\ \frac{\mu}{4} & 2 + \frac{\mu}{4} \frac{1}{10} \end{vmatrix} = 0$$

$$\mu = 40.$$

f) *Analytisches Profil.* Um nun auch das analytische Profil $U(\eta) = 1 - e^{-3\eta}$ so behandeln zu können, machen wir diese Überlegung: Wir lösen uns von der Stelle $\eta = 1$ und vollziehen den Zusammenschluß an einer Stelle η , an der praktisch gilt: $U = 1$; dies wird dann eine Determinantengleichung für μ liefern, wobei die Determinante noch von η abhängt; existiert ein $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Delta$, so hat man den aus der Gleichung $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Delta = 0$ sich ergebenden Wert von μ als $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu(\sigma)$ anzusprechen.

Wir lösen

$$u'' = 3e^{-3\eta}v$$

$$v^{\text{IV}} = 0$$

durch den Ansatz $v = \beta_2\eta^2 + \beta_3\eta^3$; das führt auf

$$\begin{aligned}
u(\eta) &= \beta_0 + \beta_1 \eta + \beta_3 \left(\frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^2}{3} + \frac{2\eta}{9} + \frac{2}{27} \right) e^{-3\eta} + (\beta_2 + \beta_3) \left(\frac{\eta^2}{3} + \frac{2\eta}{9} + \frac{2}{27} \right) e^{-3\eta} \\
&\quad + \frac{2}{3} (\beta_2 + \beta_3) \left(\frac{\eta}{3} + \frac{1}{9} \right) e^{-3\eta} + \frac{2}{27} (\beta_2 + \beta_3) e^{-3\eta} \\
u(0) &= 0 \rightarrow \beta_0 = - \left(\frac{2}{9} \beta_2 + \frac{8}{27} \beta_3 \right)
\end{aligned}$$

Wegen $v''' = 6\beta_3$ reduziert sich die Determinante Δ wieder wie bisher auf eine zweireihige Form:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & - \left(\eta^2 + \frac{2}{3} \eta^3 + \frac{2}{9} \right) e^{-3\eta} \\ \frac{\mu}{4} \eta & 2 + \frac{\mu}{4} \left\{ \left(\frac{4}{9} \eta + \frac{1}{3} \eta^2 + \frac{2}{9} \right) e^{-3\eta} - \frac{2}{9} \right\} \end{vmatrix} = 0 \\
\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Delta &= 2 - \frac{\mu}{4} \cdot \frac{2}{9} = 0 \\
\mu &= 36.
\end{aligned}$$

Eine asymptotische Aussage für sehr große Werte von σ . Für sehr große Werte von σ können wir uns mit einem kurzen Hinweis bescheiden. (Vgl. hierzu H. GÖRTLER [3] S. 18). Stellt man aus den Differentialgleichungen (2.5) eine einzige Differentialgleichung 6. Ordnung für $u(\eta)$ allein her, so kann man μ für $\tau = \sigma$ bei großem σ so darstellen: ($U' = 0$ für $\eta \geq 1$)

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma) &= \sigma^4 \frac{\int_0^1 U'^2 u \, d\eta}{\int_0^1 U U'^3 u \, d\eta} + o(\sigma^4) \\
(\mu/2)^{\frac{1}{2}} &= \sigma^2 \cdot \text{const.} + o(\sigma^2).
\end{aligned}$$

§7. Neuberechnung des kleinsten Eigenwerts nach der Determinantenmethode. Man wird sich nun fragen, warum die Ergebnisse der vorangegangenen Seiten sich in so starkem Maße von den früheren Lösungen unterscheiden. Insbesondere scheint es merkwürdig, daß eine so durchsichtige Methode wie die Fredholm-Hilbertsche Determinantenmethode Kurven $\mu(\sigma)$ liefern soll, die zwar für mittlere und große Werte des Parameters σ in der Nähe unserer Kurven verlaufen, für kleine σ aber ein völlig anderes Verhalten zeigen. Das soll im folgenden aufgeklärt werden.

Dazu ist es notwendig, sich zunächst ein Bild über die unter den Integralen des Systems (3.2) für $\tau = \sigma$ auftretenden Greenschen Funktionen $G(\eta, \eta_0)$ und $H(\eta, \eta_0)$ zu verschaffen.

Unter diesen beiden Greenschen Funktionen hat $G(\eta, \eta_0)$ die einfachere Gestalt. Aus der Darstellung

$$G(\eta, \eta_0) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} e^{-\sigma\eta_0} \sinh \sigma\eta & \eta \leq \eta_0 \\ \frac{1}{\sigma} e^{-\sigma\eta} \sinh \sigma\eta_0 & \eta_0 \leq \eta \end{cases}$$

erkennt man: Über einer Geraden $\eta = \text{const.}$ steigt $G(\eta, \eta_0)$ bei $\eta_0 \leq \eta$ wie $\sinh \sigma\eta_0$ an bis zu dem Maximalwert $\frac{1}{2\sigma} (1 - e^{-2\sigma\eta})$ und fällt dann für $\eta_0 > \eta$ wie $e^{-\sigma\eta_0}$ ab. Aufgetragen über einer η, η_0 -Ebene zeigt $G(\eta, \eta_0)$ das in Fig. 6 wiedergegebene Bild. (Der Verlauf entspricht dem Parameterwert $\sigma = 0, 5$).

FIG. 6. Darstellung der Greenschen Funktion $G(\eta, \eta_0)$ über einer η, η_0 -Ebene.

Anstelle der Funktion $H(\eta, \eta_0)$ wollen wir gleich $\sigma^2 H(\eta, \eta_0)$ diskutieren:

$$\sigma^2 H(\eta, \eta_0) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma} [e^{-\sigma(\eta_0+\eta)} \{2\sigma^2 \eta_0 \eta + \sigma(\eta_0 + \eta) + 1\} - e^{-\sigma(\eta_0-\eta)} \{\sigma(\eta_0 - \eta) + 1\}] & \eta \leq \eta_0 \\ \frac{1}{4\sigma} [e^{-\sigma(\eta+\eta_0)} \{2\sigma^2 \eta \eta_0 + \sigma(\eta + \eta_0) + 1\} - e^{-\sigma(\eta-\eta_0)} \{\sigma(\eta - \eta_0) + 1\}] & \eta_0 \leq \eta \end{cases}$$

Betrachten wir eine Achsenparallele $\eta = \text{const.}$ Das Extremum von $\sigma^2 H(\eta, \eta_0)$

liegt im Intervall $\eta_0 \geq \eta$, und durch Differenzieren findet man für die Stelle η_0 des Extremums in Abhängigkeit von η :

$$\eta_{0\text{Ex}} = \frac{\eta \sinh \sigma \eta}{\sinh \sigma \eta - \sigma \eta e^{-\sigma \eta}} \quad \eta_{0\text{Ex}} \approx \eta \text{ für große } \eta$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta_{0\text{Ex}} = 1/\sigma,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d\eta_{0\text{Ex}}}{d\eta} = 1/3, \quad \text{unabhängig von } \sigma.$$

Als wesentlich wollen wir festhalten, daß für kleiner werdende σ die Werte $\eta_{0\text{Ex}}$ immer weiter nach draußen rücken.

FIG. 7. Darstellung von $-\sigma^2 H(\eta, \eta_0)$ über einer η, η_0 -Ebene. Die auf der Fläche verlaufenden gestrichelten Kurven verbinden die Extrema der Schnitte $\eta = \text{const.}$ bzw. $\eta_0 = \text{const.}$; die strichpunktuierten Kurven stellen ihre Projektion auf die η, η_0 -Ebene dar.

Aus diesen Betrachtungen erhellt, warum die Genauigkeit der GÖRTLERSchen Auswertung namentlich bei $\sigma \rightarrow 0$ nicht hinreichen konnte; die Funktion $\sigma^2 H(\eta, \eta_0)$ geht freilich für $\eta \neq \eta_0$, $\eta \rightarrow \infty$, $\eta_0 \rightarrow \infty$ exponentiell nach Null, aber dieses Abklingen setzt umso später ein, je kleiner σ ist. Den entscheidenden Teil des Integrals $\sigma^2 \int_0^\infty H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) u(\eta_0) d\eta_0$ stellt also die von 1 bis ∞ vorzunehmende Integration, und zwar—wie oben gezeigt—in umso höherem Maße, je kleiner σ wird. Gerade dieser Term wurde damals nicht berücksichtigt.

Unter diesem Gesichtspunkt wurden die approximativen Berechnungen mit Hilfe der Fredholm-Hilbertschen Determinante nochmals durchgeführt und

brachten Ergebnisse, die in vollkommener Übereinstimmung mit unseren Resultaten stehen.

Hierbei zeigt sich, daß offenbar die Konvergenz der nach μ entwickelten Fredholmschen Determinante eine so gute ist, daß zur Bestimmung des kleinsten Eigenwerts praktisch nur der erste Koeffizient eine Rolle spielt, wenn der Parameter σ den Bereich von 0 bis 2 durchläuft. Einige Beispiele:

Blasius-Profil:

Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

Bestimmungsgleichung $1 - d_1^{(1)}\mu = 0$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(1)}$	0,006 810 7	0,005 842 2	0,004 519 4	0,002 823 2

Schrittweite $h = \frac{1}{3}$

Bestimmungsgleichung $1 - d_1^{(2)}\mu + d_2^{(2)}\mu^2 = 0$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(2)}$	0,006 434 3	0,005 410 9	0,004 016 7	0,002 282 0
$d_2^{(2)}$	0,0 ⁶ 012 4	0,0 ⁶ 058 6	0,0 ⁶ 125 1	0,0 ⁶ 162 8

Schrittweite $h = \frac{1}{4}$

Bestimmungsgleichung $1 - d_1^{(3)}\mu + d_2^{(3)}\mu^2 + d_3^{(3)}\mu^3 = 0$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(3)}$	0,006 549 3	0,005 486 7	0,004 034 2	0,002 231 4
$d_2^{(3)}$	0,0 ⁶ 013 8	0,0 ⁶ 080 1	0,0 ⁶ 117 5	0,0 ⁶ 128 9
$d_3^{(3)}$	0,0 ¹⁴ 11	0,0 ¹² 319	0,0 ¹² 268	0,0 ¹² 905

Parabelprofil:

Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(1)}$	0,007 019 1	0,005 966 4	0,004 515 7	0,002 823 2

Schrittweite $h = \frac{1}{3}$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(2)}$	0,009 056 8	0,007 461 0	0,005 333 2	0,002 813 5
$d_2^{(2)}$	0,0 ⁶ 016 4	0,0 ⁶ 074 6	0,0 ⁶ 156 5	0,0 ⁶ 200 3

Schrittweite $h = \frac{1}{4}$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(3)}$	0,009 822 5	0,008 015 9	0,005 627 4	0,002 855 0
$d_2^{(3)}$	0,0 ⁶ 025 8	0,0 ⁶ 105 0	0,0 ⁶ 210 5	0,0 ⁶ 223 8
$d_3^{(3)}$	0,0 ¹⁴ 12	0,0 ¹² 408	0,0 ¹² 429	0,0 ¹¹ 1 485

Streckenprofil:

Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(1)}$	0,006 978 4	0,005 789 5	0,004 119 1	0,002 160 2

Schrittweite $h = \frac{1}{3}$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(2)}$	0,012 067 7	0,009 667 5	0,006 487 7	0,003 014 7
$d_2^{(2)}$	0,0 ⁶ 021	0,0 ⁶ 049	0,0 ⁶ 101	0,0 ⁶ 120

Schrittweite $h = \frac{1}{4}$

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 2,0$
$d_1^{(3)}$	0,015 142 2	0,011 941 4	0,007 817 9	0,003 467 5
$d_2^{(3)}$	0,0 ⁶ 029	0,0 ⁶ 127	0,0 ⁶ 216	0,0 ⁶ 209
$d_3^{(3)}$	0,0 ¹⁴ 23	0,0 ¹² 478	0,0 ¹² 221	0,0 ¹² 694

Mit Ausnahme des Streckenprofils ändert sich der Koeffizient d_1 nur noch verhältnismäßig wenig, und die Güte der Approximation von $\mu_1(\sigma)$ wird durch die Güte der Approximation des Koeffizienten d_1 bestimmt. Die Erklärung für diese letztere Erscheinung liegt darin: Die numerische Annäherung von $G(\eta, \eta_0)U'(\eta_0)$ kommt bei allen glatten Profilen der durch die Sehnentrapezregel vorgenommenen gleich, während sie beim Streckenprofil mit dem Sprung in der ersten Ableitung nur einer Annäherung durch einbeschriebene Rechtecke entspricht.

Man wird also den Gedanken nicht von der Hand weisen, den Koeffizienten d_1 exakt zu berechnen. Wie sieht dieser Koeffizient aus?

Wir erinnern uns an die Integralgleichung (4.3)

$$\bar{v}(x) = \mu \int_0^1 K(x, t) \bar{v}(t) dt$$

mit dem Kern

$$K(x, t) = - \frac{d\bar{U}}{dt} \int_0^1 \bar{H}(x, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{G}(\xi, t) d\xi.$$

Auf diese Integralgleichung lassen sich die Ergebnisse der Fredholmschen Theorie anwenden: Die für alle μ konvergente Reihenentwicklung der Fredholmschen Determinante lautet bekanntlich

$$D(\mu) = 1 - d_1\mu + \frac{1}{2} d_2\mu^2 - + \dots$$

mit

$$d_\nu = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & \cdots & K(s_1, s_\nu) \\ \vdots & & \vdots \\ K(s_\nu, s_1) & \cdots & K(s_\nu, s_\nu) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \cdots ds_\nu;$$

also ist unser gesuchter Koeffizient d_1

$$d_1 = \int_0^1 K(s_1, s_1) ds_1.$$

Mit

$$K(s_1, s_1) = - \frac{d\bar{U}}{ds_1} \int_0^1 \bar{H}(s_1, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{G}(\xi, s_1) d\xi$$

bedeutet das

$$d_1 = - \int_0^1 \int_0^1 \bar{H}(s_1, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{G}(\xi, s_1) \frac{d\bar{U}}{ds_1} ds_1 d\xi.$$

Zurückkehrend zum System (4.1) ist das äquivalent mit

$$(7.1) \quad d_1 = - \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) G(\eta_0, \eta) \frac{dU}{d\eta} d\eta d\eta_0.$$

Um den Übergang von der angenäherten zur exakten Berechnung von d_1 deutlich zu machen, können wir uns noch einen anderen Zugang zur expliziten Form dieses Koeffizienten verschaffen.

Gehen wir aus von dem System (4.2)

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= -\lambda \int_0^1 \bar{G}(x, \xi) \bar{U}'(\xi) \bar{v}(\xi) d\xi \\ \bar{v}(x) &= \lambda \int_0^1 \bar{H}(x, \xi) \bar{U}(\xi) \bar{u}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Eine Zerlegung der Integrale in endliche Summen liefert bei einer äquidistanten Einteilung des Intervalls $\langle 0,1 \rangle$ in n Teilintervalle die linearen Gleichungen (Die Indizes besagen, daß die betreffenden Funktionswerte an einer beliebigen Stelle des i -ten bzw. k -ten Teilintervalls zu nehmen sind):

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_i) + \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{G}(x_i, \xi_k) \bar{U}'(\xi_k) \bar{v}(\xi_k) &= 0 \\ \lambda \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{H}(x_k, \xi_i) \bar{U}(\xi_i) \bar{u}(\xi_i) - \bar{v}(x_k) &= 0. \quad i, k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet

$$D^{(n)}(\lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda \frac{1}{n} \bar{G}_{11} \bar{U}'_1 & \lambda \frac{1}{n} \bar{G}_{12} \bar{U}'_2 & \cdots & \lambda \frac{1}{n} \bar{G}_{1n} \bar{U}'_n \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda \frac{1}{n} \bar{G}_{21} \bar{U}'_1 & \lambda \frac{1}{n} \bar{G}_{22} \bar{U}'_2 & \cdots & \lambda \frac{1}{n} \bar{G}_{2n} \bar{U}'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \frac{1}{n} \bar{H}_{11} \bar{U}_1 & \lambda \frac{1}{n} \bar{H}_{12} \bar{U}_2 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda \frac{1}{n} \bar{H}_{21} \bar{U}_1 & \lambda \frac{1}{n} \bar{H}_{22} \bar{U}_2 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \frac{1}{n} \bar{H}_{n1} \bar{U}_1 & \lambda \frac{1}{n} \bar{H}_{n2} \bar{U}_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

und läßt sich umrechnen in

$$D^{(n)}(\lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 2} \bar{U}'_2 & \cdots & \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu n} \bar{U}'_n \\ \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{2,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & 1 + \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{2,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 2} \bar{U}'_2 & \cdots & \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{2,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu n} \bar{U}'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 2} \bar{U}'_2 & \cdots & 1 + \lambda^2 \frac{1}{n^2} \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu n} \bar{U}'_n \end{vmatrix}$$

(über die mehrfach auftretenden Indizes ist zu summieren). Diese Determinante n -ter Ordnung stellt sich als Polynom in $\lambda^2 = \mu$ so dar:

$$\begin{aligned} D^{(n)}(\mu) = & 1 + \mu \frac{1}{n^2} \sum_{\kappa, \nu} \bar{H}_{\kappa \nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu \kappa} \bar{U}'_\kappa + \mu^2 \left\{ \frac{1}{n^4} \begin{vmatrix} \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 2} \bar{U}'_2 \\ \bar{H}_{2,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & \bar{H}_{2,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 2} \bar{U}'_2 \end{vmatrix} \right. \\ & + \cdots \frac{1}{n^4} \begin{vmatrix} \bar{H}_{n-1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu, n-1} \bar{U}'_{n-1} & \bar{H}_{n-1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu, n} \bar{U}'_n \\ \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu, n-1} \bar{U}'_{n-1} & \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu, n} \bar{U}'_n \end{vmatrix} \\ & \left. + \cdots + \mu^n \frac{1}{n^{2n}} \begin{vmatrix} \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & \cdots & \bar{H}_{1,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu n} \bar{U}'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu 1} \bar{U}'_1 & \cdots & \bar{H}_{n,\nu} \bar{U}_\nu \bar{G}_{\nu n} \bar{U}'_n \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Der Koeffizient von μ^k ist dabei allgemein gleich der Summe der Hauptunterdeterminanten k -ter Ordnung, die aus der Matrix $(a_{im}) = (\frac{1}{n^2} \sum_{\nu} H_{i\nu} U_{\nu} G_{\nu m} U_m)$ gebildet werden können.

Schreiben wir

$$D^{(n)}(\mu) = 1 - d_1^{(n)}\mu + d_2^{(n)}\mu^2 - \dots + (-1)^n d_n^{(n)}\mu^n.$$

Für $n \rightarrow \infty$ streben, wie man sofort einsieht, die Koeffizienten $d_k^{(n)}$ einem Grenzwert $d_k/k!$ zu, nämlich:

$$\frac{1}{k!} d_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \begin{array}{ccc} \int_0^1 \bar{H}(s_1, s) \bar{U}(s) \bar{G}(s, s_1) \bar{U}'(s_1) ds & \dots & \int_0^1 \bar{H}(s_1, s) \bar{U}(s) \bar{G}(s, s_k) \bar{U}'(s_k) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 \bar{H}(s_k, s) \bar{U}(s) \bar{G}(s, s_1) \bar{U}'(s_1) ds & \dots & \int_0^1 \bar{H}(s_k, s) \bar{U}(s) \bar{G}(s, s_k) \bar{U}'(s_k) ds \end{array} \right| \cdot ds_1 ds_2 \dots ds_k$$

und $D^{(n)}(\mu)$ geht über in

$$D(\mu) = 1 - d_1\mu + \frac{1}{2}d_2\mu^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} d_n\mu^n + \dots$$

Man hat die Konvergenz dieser Reihe für $D(\mu)$ zu untersuchen. Wie man weiß, führt diese Konvergenzuntersuchung über die Abschätzung mit Hilfe des Hadamardschen Determinantensatzes zu dem Ergebnis, daß $D(\mu)$ für jeden Wert von μ konvergiert, also eine ganze transzendente Funktion von μ ist.

Insbesondere haben wir damit wieder gefunden:

$$d_1 = - \int_0^1 \int_0^1 \bar{H}(s_1, s) \bar{U}(s) \bar{G}(s, s_1) \bar{U}'(s_1) ds ds_1$$

in Übereinstimmung mit (7.1).

Die exakte Berechnung von d_1 für das Strecken- und das Parabelprofil:

a) Streckenprofil:

$$d_1 = - \int_0^\infty \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) G(\eta_0, \eta) d\eta d\eta_0$$

$$d_1 = d_1^i + d_1^a$$

mit

$$d_1^i = - \int_0^1 \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) G(\eta_0, \eta) d\eta d\eta_0$$

$$d_1^a = - \int_1^\infty \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0) U(\eta_0) G(\eta_0, \eta) d\eta d\eta_0$$

$$d_1^i = \left\{ \frac{3}{4\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{43}{16\sigma^3} + \frac{1}{e^{2\sigma}} \left(\frac{5}{6}\sigma + \frac{19}{6} + 6\frac{1}{\sigma} + \frac{11}{2\sigma^2} + \frac{9}{4\sigma^3} \right) + \frac{1}{e^{4\sigma}} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4\sigma} + \frac{5}{4\sigma^2} + \frac{7}{16\sigma^3} \right) \right\} \frac{1}{8\sigma^2}$$

$$d_1^a = \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{1}{e^{2\sigma}} \left(\frac{1}{2}\sigma + \frac{5}{4} + \frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{8\sigma^2} \right) - \frac{1}{e^{4\sigma}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma} + \frac{5}{8\sigma^2} \right) \right\} \frac{1}{8\sigma^2}$$

Als Approximation für $\mu_1(\sigma)$ verwenden wir also

$$\mu_1(\sigma) = 1/d_1(\sigma)$$

Sehr aufschlußreich ist die Berechnung der Grenzwerte dieser Ausdrücke für $\sigma \rightarrow 0$; so findet man

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1^i(\sigma) = 0$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1^a(\sigma) = 1/32.$$

Das ist genau der Wert, den wir nach den Ausführungen in §6 zu erwarten haben. Hier zeigt sich wohl am deutlichsten, wie die von 1 bis ∞ vorzunehmende Integration über $\sigma^2 H(\eta, \eta_0)$ den wesentlichen Beitrag liefert. Für $\sigma \rightarrow 0$ existiert hier wie auch bei den anderen Profile genau ein Eigenwert. Das erklärt auch die für kleiner werdende σ bessere Konvergenz der Iterationsfolgen, da die Güte dieser Konvergenz wesentlich davon abhängt, wie weit der Eigenwert von nächsthöherem Betrage vom kleinsten Eigenwert entfernt ist.

b) Parabelprofil:

$$d_1 = d_1^i + d_1^a$$

$$d_1^i = - \int_0^1 \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0) (2\eta_0 - \eta_0^2) G(\eta_0, \eta) 2(1 - \eta) d\eta d\eta_0$$

$$d_1^a = - \int_1^\infty \int_0^1 \sigma^2 H(\eta, \eta_0) G(\eta_0, \eta) 2(1 - \eta) d\eta d\eta_0$$

Hier wurde d_1^a exakt berechnet:

$$d_1^a = \frac{1}{64\sigma^5} \left\{ 5 - \frac{1}{e^{2\sigma}} \left(\frac{16}{6}\sigma^4 + \frac{28}{3}\sigma^3 + 8\sigma^2 + 6\sigma + 12 \right) + \frac{1}{e^{4\sigma}} (4\sigma^2 + 10\sigma + 7) \right\}$$

mit $\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1^a(\sigma) = 1/80$; also wieder $\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1^i(\sigma) = 0$.

d_1^i wurde durch numerische Integration gefunden. Die bei Gebeitsintegrationen durch zweimaliges Anwenden der Sehnentrapezregel zu gewinnende Vorschrift

gibt die Darstellung:

$$d_1^i = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \sigma^2 H_{lm} U_m G_{mi} U'_l + \frac{1}{2} \sigma^2 H_{l,n+1} U_{n+1} G_{n+1,l} U'_l \right)$$

Die Rechnung wurde mit $n = 4$ durchgeführt.

§8. Die Abhängigkeit des kritischen Görtler-Parameters von der Profilform.

In den vorangegangenen Paragraphen haben wir mit sechs verschiedenen Profilen gearbeitet. Um diese Profile miteinander vergleichen zu können, stellen wir—nach dem Vorbild von H. GÖRTLER—die Forderung, daß alle Profile dieselbe Impulsverlustdicke

$$\vartheta = \delta \int_0^1 (1 - U) U \, d\eta$$

haben sollen; oder wir können uns auf gleiche Verdrängungsdicken

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1 - U) \, d\eta$$

beziehen. (Anstelle der Integration von 0 bis 1 haben wir beim Profil $U = 1 - e^{-3\eta}$ sinngemäß von 0 bis ∞ zu integrieren). Das liefert die Werte

	ϑ/δ	δ^*/δ
Streckenprofil.	0,166	0,5
Parabelprofil.	0,133	0,33
Blasius-Profil.	0,110 7	0,288 3
Analytisches Profil.	0,166	0,33
Wendepunktprofil.	0,139 29	0,437 5
Ablöseprofil.	0,128 57	0,5

Die Darstellungen in Fig. 8 zeigen $(U_0 \vartheta/\nu)(\vartheta/R)^{\frac{1}{2}}$ und $(U_0 \delta^*/\nu)(\delta^*/R)^{\frac{1}{2}}$ aufgetragen über $\alpha \vartheta$ bzw. $\alpha \delta^*$; interessant sind noch die exakten Werte

	$\lim_{\alpha \vartheta \rightarrow 0} (U_0 \vartheta/\nu)(\vartheta/R)^{\frac{1}{2}}$	$\lim_{\alpha \delta^* \rightarrow 0} (U_0 \delta^*/\nu)(\delta^*/R)^{\frac{1}{2}}$
Streckenprofil.	0,272 17	1,414 2
Parabelprofil.	0,307 92	1,217 2
Blasius-Profil.	0,311 10	1,307 5
Analytisches Profil.	0,288 68	0,817 50
Wendepunktprofil.	0,257 90	1,435 7
Ablöseprofil.	0,206 17	1,581 1

Die Mittelwerte sind 0,272 32 und 1,295 4; Die Abweichungen davon betragen bis zu 27 % bzw. 37 %.

Die Werte der graphischen Darstellung in Fig. 8 sind so berechnet:

I. Blasius-Profil

- a) Berechnung von d_1 mit der Sehnentrapezregel und von $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{\frac{1}{2}}$ mit der Approximation 4. Grades.
- II. Parabelprofil
 - a) Exakte Berechnung von d_1 und von $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{\frac{1}{2}}$.
- III. Streckenprofil
 - a) Exakte Berechnung von d_1 und von $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{\frac{1}{2}}$.
 - b) Iterationsverfahren.
- IV. Analytisches Profil
 - a) Exakte Berechnung von $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{\frac{1}{2}}$.
 - b) Iterationsverfahren.
- V. Wendepunkprofil
 - a) d_1 mit der Sehnentrapezregel und $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{\frac{1}{2}}$ exakt.
- VI. Ablöseprofil
 - a) d_1 mit der Sehnentrapezregel und $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\mu/2)^{\frac{1}{2}}$ exakt.

FIG. 8. Der Verlauf des kritischen Görtler-Parameters für die verschiedenen Profile, aufgetragen über $\alpha\delta$ und $\alpha\delta^*$.

Wie zu erwarten war, hat eine nicht zu starke Änderung der Profilform nur verhältnismäßig geringen Einfluß auf den Verlauf des kritischen Görtler-Parameters, wenn man diesen auf die Impulsverlust- oder Verdrängungsdicke bezieht. Dem mittleren Verlauf der auf die Impulsverlustdicke bezogenen Werte kommt dabei der dem Streckenprofil (III) entspringende Verlauf sehr nahe.

§9. Die angefachten Störungen. Es bereitet uns nun keine Schwierigkeiten,

die Betrachtungen auf die angefachten Störungen auszudehnen, für die also $\tau > \sigma$ ist. Diesen Störungen liegen die Differentialgleichungen (2.5) zugrunde:

$$\begin{aligned} u'' - \tau^2 u &= \frac{dU}{d\eta} v & u(0) &= v(0) = v'(0) = 0 \\ v^{\text{IV}} - (\tau^2 + \sigma^2)v'' + \tau^2\sigma^2 v &= -\mu\sigma^2 U u & u(\infty) &= v(\infty) = v'(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Auch sie lassen sich für $\eta \geq 1$ unter Befriedigung der Randbedingungen im Unendlichen lösen zu: ($U \equiv 1$)

$$(9.1) \quad \begin{aligned} u(\eta) &= A e^{-\tau\eta} \\ v(\eta) &= B e^{-\sigma\eta} + C e^{-\tau\eta} + A \frac{\mu\sigma^2}{2\tau(\tau^2 - \sigma^2)} \eta e^{-\tau\eta} \end{aligned}$$

Wir gehen nun zunächst genau so vor wie in §6: Eine Potenzreihe für die Innenlösung, die nach Erfüllen der Randbedingungen bei $\eta = 0$ noch drei freie Konstanten haben wird, ist mit der Außenlösung (9.1) zusammenzuschließen. Die Elimination der Konstanten A, B, C geschieht mit Hilfe der Identitäten:

$$\begin{aligned} \tau u_a + u'_a &= 0 \\ v''_a + (\tau + \sigma)v'_a + \tau\sigma v_a + \frac{\mu\sigma^2}{2\tau(\tau + \sigma)} u_a &= 0 \\ v'''_a + (\tau + \sigma)v''_a + \tau\sigma v'_a + \frac{\mu\sigma^2}{2\tau(\tau + \sigma)} u'_a &= 0, \end{aligned}$$

so daß die Bestimmung der drei Konstanten der Potenzreihen bzw. die Aufstellung der uns allein interessierenden Anschlußdeterminante nun durch die Gleichungen erfolgt:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \tau u_i(1) + u'_i &= 0 \\ v''_i(1) + (\tau + \sigma)v'_i(1) + \tau\sigma v_i(1) + \frac{\mu\sigma^2}{2\tau(\tau + \sigma)} u_i(1) &= 0 \\ v'''_i(1) + (\tau + \sigma)v''_i(1) + \tau\sigma v'_i(1) + \frac{\mu\sigma^2}{2\tau(\tau + \sigma)} u'_i(1) &= 0 \end{aligned}$$

Wie sich in §8 gezeigt hat, gibt das der Einfachheit seiner Darstellung halber angenehme Streckenprofil kritische Kurven, die—bezogen auf gleiche Impulsverlustdicken als physikalisch sinnvolle Normgröße—in ihrem ganzen Verlauf einen Mittelwert der anderen, realen Profile wiedergeben. Die vollständige Durchrechnung der Anfachungskurven für einige Werte von $\beta\delta^2/\nu$ wurde deshalb nur für dieses Profil vorgenommen.

Für kleine Werte von $\tau, \sigma < \tau \ll 1$, führt auch hier der Potenzreihenansatz

zum Ziel; bezeichnen wir etwa $\mu\sigma^2 \frac{1}{2\tau(\tau + \sigma)}$ mit M , so erhält man, wenn man τ^2 , $\tau\sigma$, σ^2 noch berücksichtigt, aber die Reihenkoeffizienten mit höheren Potenzen dieser Parameter demgegenüber vernachlässigt, für M näherungsweise die Darstellung

$$(9.3) \quad M = 8 \frac{1 + \sigma + 2\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 + 2\tau\sigma + 2\tau^2}{1 + \frac{1}{15}\sigma + \frac{2}{15}\tau + \frac{7}{30}\sigma^2 + \frac{7}{15}\tau\sigma + \frac{4}{9}\tau^2}$$

$$\mu = 16 \frac{\tau^2 + \tau\sigma}{\sigma^2} \cdot \frac{1 + \sigma + 2\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 + 2\tau\sigma + 2\tau^2}{1 + \frac{1}{15}\sigma + \frac{2}{15}\tau + \frac{7}{30}\sigma^2 + \frac{7}{15}\tau\sigma + \frac{4}{9}\tau^2}$$

und für $\sigma \rightarrow 0$ gilt demnach

$$\mu \approx 16 \left(1 + \frac{\tau}{\sigma} + \frac{\beta\delta^2/\nu}{\sigma^2} \right) \frac{1 + 2\tau + 2\tau^2}{1 + \frac{2}{15}\tau + \frac{4}{9}\tau^2}$$

Bei $\sigma \rightarrow \infty$ verhalten sich die angefachten Kurven wegen

$$\tau^2 = \sigma^2 + \beta\delta^2/\nu = \sigma^2 \left(1 + \frac{\beta\delta^2/\nu}{\sigma^2} \right) \approx \sigma^2$$

wie die neutralen Kurven.

Für größere Werte von σ und τ führt der Potenzreihenansatz natürlich nicht mehr mit erträglichem Aufwand zum Ziel. Verwendet man hier wieder die Fredholm-Hilbertsche Determinante, so zeigt sich genau dieselbe Erscheinung wie in §7, daß nämlich für die Güte der Approximation des kleinsten Eigenwerts $\mu_1(\tau)$ der erste Koeffizient d_1 der Determinantenentwicklung die ausschlaggebende Rolle spielt. Wir haben deshalb wieder diesen Koeffizienten exakt berechnet und $\sqrt{\mu/2} = \sqrt{1/2d_1}$ aufgetragen. Die Kurven mit den Anfachsungsgrößen $\beta\delta^2/\nu \leq 0,1$ sind mit Hilfe des Potenzreihenansatzes nach (9.3), diejenigen mit $\beta\delta^2/\nu \geq 0,1$ als $\mu = 1/d_1$ berechnet. Die doppelte Berechnung für $\beta\delta^2/\nu = 0,1$ diente zur Kontrolle der Güte unserer Methoden. Beide Kurven sind praktisch identisch.

Abschließend sei daran erinnert, daß die Theorie der dreidimensionalen Instabilität durch Versuche von H. W. LIEPMANN [6], [7] eine experimentelle Bestätigung erfahren hat. (Vgl. z.B. auch H. L. DRYDEN [10] S. 16 oder A. M. KUETHE-J. D. SCHETZER [11] S. 284).

Bei diesen Versuchen fand man, daß schwache konvexe Krümmung den Umschlag laminar-turbulent nicht beeinflusst, und die für den Umschlag maßgebende Reynoldssche Zahl $(U_0\vartheta/\nu)_{tr}$ hat denselben Wert wie bei der ebenen Platte. Wohl aber zeigt sich ein deutlicher Einfluß der konkaven Krümmung; hier variiert $(U_0\vartheta/\nu)_{tr}$ mit ϑ/R in der Weise, daß $(U_0\vartheta/\nu)(\vartheta/R)^{\frac{1}{2}}$ einen konstanten Wert behält. $Re(\vartheta/R)^{\frac{1}{2}}$ ist genau der Görtler-Parameter $(\mu/2)^{\frac{1}{2}}$. Es handelt sich also offenbar, wie die Theorie voraussagt, bei konkaven Wänden um die Görtler-Wirbel, die schließlich zur Turbulenz führen, wogegen bei der ebenen Platte

FIG. 9. Der Verlauf des Görtler-Parameters für neutrale und einige angefachte Störungen, aufgetragen über $\alpha \vartheta$.

sowie bei konvexer Krümmung die Tollmien-Schlichtingschen zweidimensionalen Schwingungen für das Zusammenbrechen der laminaren Strömung verantwortlich sind. (Z. B. H. SCHLICHTING [1] S. 280 ff.)

Wie zu erwarten war, stehen den theoretischen kritischen Werten wesentlich

FIG. 10. Ergebnisse der LIEPMANNschen Experimente: Messungen an einer schwach gekrümmten Wand ($R = 609,6$ cm) und an der ebenen Platte ($\alpha/R = 0$).

FIG. 11. Vergleichende Darstellung der von H. GÖRTLER und von D. MEKSYN angegebenen kritischen Kurven und der neuen, streng begründeten Lösung.

höhere experimentelle Werte gegenüber, da ja ein angefachter Wirbel, bis er die geordnete Strömung zum Zusammenbrechen bringen kann, stromabwärts in den Bereich beträchtlich höherer Reynoldsscher Zahlen und Werte des Parameters $Re(\vartheta/R)^{\frac{1}{2}}$ gerät, wobei die letzteren mit wachsender Grenzschichtdicke noch stärker als die Reynoldssche Zahl zunehmen.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Eigenwertproblem behandelt, auf das die Untersuchung der Stabilität laminarer Grenzschichten gegenüber den dreidimensionalen Wirbeln führte, die H. GÖRTLER 1940 eingeführt hatte. Wir gehen von den GÖRTLERSchen Differentialgleichungen aus, die eine zweiparametrische Eigenwertaufgabe darstellen, aus der sich zu jeder vorgegebenen Störungswellenlänge die Parameter neutraler und angefachter Störungen bestimmen lassen.

Es wird exakt gezeigt, daß die dreidimensionalen Görtler-Wirbel nur an konkaven Wänden auftreten können. Der einer neutralen Störung entsprechende "kritische" Görtler-Parameter strebt für $\sigma \rightarrow 0$ monoton einem endlichen Grenzwert zu, der für alle hier angenommenen Grundprofile (Blasius-Profil, Parabelprofil, Streckenprofil, analytisches Profil, Wendepunktpprofil und Ablöseprofil) exakt angegeben wird. Der einer angefachten Störung zukommende Görtler-Parameter hat einen minimalen Wert für eine gewisse Wellenlänge, wobei die Lage dieses Minimums von der angenommenen Anfachungsgröße $\beta\delta^2/\nu$ abhängt. Diese Kurven streben für $\sigma \rightarrow 0$ dem Unendlichen zu. Die Abhängigkeit von der Form des vorgegebenen Grundprofils ist nur gering, wenn man alle Profile auf dieselbe Impulsverlustdicke bezieht. Es zeigt sich, daß die aus dem Streckenprofil als Grundprofil hervorgehenden Kurven den mittleren Verlauf der Kurven wiedergeben, die allen betrachteten Grundprofilen entspringen.

Die Diskrepanz zwischen den früheren Lösungen von H. GÖRTLER und von D. MEKSYN wird zugunsten einer neuen, auf verschiedenen und unabhängigen Wegen gewonnenen Lösung aufgeklärt, die aufgrund ihrer strengen Begründung ein Urteil über die bisherigen Lösungen erlaubt. Auf diese Lösung führt auch die von H. GÖRTLER verwandte Methode der numerischen Auswertung bei vorsichtiger Behandlung. Für größere Werte von $\alpha\vartheta$ unterscheidet sich die GÖRTLERSche Lösung nicht mehr sehr stark von der vorliegenden; demgegenüber liegt die MEKSYNSche Lösung beträchtlich höher.

Zusatz bei der Korrektur. Zu einer besseren Beschreibung der physikalischen Verhältnisse gelangt man, wenn man in der ersten der Gleichungen (2.1) das Glied u/R für die weiteren Überlegungen beibehält. Die erste der Gleichungen (2.6) wird dann zu

$$u'' - \sigma^2 u = \left(\frac{dU}{d\eta} - \frac{\delta}{R} U \right) v.$$

Behandelt man das derart abgeänderte System (2.6), so zeigt sich, daß bei $\sigma \rightarrow 0$ kein endlicher Grenzwert des kleinsten Eigenwerts neutraler Störungen

existiert, sondern daß die kritische Kurve $\mu_1(\sigma)$ nach Unendlich geht. Die Abweichung von den aus den ursprünglichen Gleichungen (2.6) hervorgehenden Resultaten tritt freilich erst für sehr kleine Werte von σ ein. Bisher wurde nur das Streckenprofil und für dieses nur der Fall $\sigma \ll \delta/R$ untersucht. Verfasser wird darüber in Kürze des näheren berichten.

Literaturhinweise

- [1] H. SCHLICHTING: *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1951.
- [2] H. GÖRTLER: Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. *ZAMM* **20** (1940), 138–147.
- [3] H. GÖRTLER: Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I, Neue Folge* **2** (1940), 1–26. Übersetzt: On a three-dimensional instability of laminar boundary layers on concave walls. NACA Techn. Mem. 1375, June 1954.
- [4] G. I. TAYLOR: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A223** (1923), 289–343.
- [5] D. MEKSYN: Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces. *Proc. Roy. Soc. London*, **A203** (1950), 253–265.
- [6] H. W. LIEPMANN: Investigations on laminar boundary-layer stability and transition on curved boundaries. *NACA Wartime-Rep. W-107*, 1943.
- [7] H. W. LIEPMANN: Investigation of boundary-layer transition on concave walls. *NACA Wartime-Rep. W-87*, 1945.
- [8] W. SCHMEIDLER: *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. G., Leipzig 1950.
- [9] H. WIELANDT: Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten Eigenwertaufgaben. *Math. Zschr.* **50** (1944), 93–143.
- [10] H. L. DRYDEN: Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. *Advances in appl. mech.* **I** (herausgegeben von R. v. Mises und Th. v. Kármán), Academic Press Inc., New York 1948, 1–40.
- [11] A. M. KUETHE—J. D. SCHETZER: *Foundations of aerodynamics*. John Wiley and Sons Inc., New York 1950.