*Beiträge zu Theorie und Anwendung der
unstetigen Strömungen*

R. EPPLER

Technische Hochschule, Stuttgart

Communicated by H. VILLAT

INHALT

1. Einleitung und Übersicht.....	592
2. Die verschiedenen Problemstellungen bei der Helmholtz-Strömung	593
3. Das unbestimmte Problem der Helmholtz-Strömung.....	599
4. Die Verallgemeinerung der Helmholtz-Strömung, unbestimmtes Problem, symmetrischer Fall.....	613
5. Die Verallgemeinerung der Helmholtz-Strömung, bestimmtes Problem, symmetrischer Fall.....	619
6. Beispielrechnungen	630
7. Die Beziehung zu den unstetigen Kanalströmungen	634
8. Der Übergang auf schwach zähe Flüssigkeiten	635
9. Vergleich von Theorie und Experiment.....	641

1. Einleitung und Übersicht. Die von Helmholtz, Kirchhoff und Levi-Civita unter den bekannten Voraussetzungen zuerst berechneten unstetigen Potentialströmungen¹ stellten zu ihrer Zeit einen großen Fortschritt in der theoretischen Hydromechanik dar, weil sie erstmals einen Widerstand für die Bewegung von Konturen in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit lieferten, der in Übereinstimmung mit der praktischen Erfahrung proportional zum Staudruck $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$ war. Tatsächlich stellten auch die berechneten Stromlinienbilder mit ihrem von zwei freien Stromlinien begrenzten Gebiet von relativ zur Kontur ruhender Flüssigkeit eine gewisse Idealisierung der wirklichen Strömungen in schwach zähen Medien dar, die auch hinter der Kontur ein Gebiet kleiner Geschwindigkeiten, ein Totwasser aufweisen. Dieser Idealisierung hatten jedoch zwei Mängel an. Sie ergibt im Totwasser den statischen Druck p_∞ , während bei der wirklichen Strömung dort immer ein Unterdruck herrscht. Deshalb wird der berechnete Widerstand immer wesentlich zu klein. Zudem tritt er nur dann auf, wenn die Totwasserbreite parabolisch unendlich wird, was einem unendlichen, also unmöglichen Nachlaufimpuls entspricht. Trotzdem wurde das mathematische Gebilde der Helmholtz-Strömung nach allen Richtungen hin sehr eingehend erforscht (Näheres im Lauf der Arbeit). Andererseits fehlen aber auch die Versuche nicht, die Übereinstimmung mit den Experiment zu verbessern. Dies geschah aber meist nur im Hinblick auf den Widerstand und die Druckverteilung um die Kontur mit Hilfe zusätzlicher Parameter, die eine Angleichung an das Experiment ermöglichten. Auf die entstehende Strömungsform wurde häufig gar keine Rücksicht genommen. Sie wies oft noch schwerwiegendere Mängel auf als die Ausgangsströmung. Bei L. Jacob² ist beispielsweise die Geschwindigkeit auf den freien Stromlinien nicht konstant. Die wohl beste Verallgemeinerung gab D. Riabouchinsky³ an. Sie ist jedoch mathematisch etwas schwerfällig und konnte noch nicht auf runde Konturen ausgedehnt werden. Auch weist sie immer noch einen Widerspruch zum Impulssatz auf, wie hier noch gezeigt wird.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Strömungsform konstruiert, die von vorn herein als eine bessere Idealisierung der wirklichen Strömung aufgefaßt werden kann. Auch hier wird ein zusätzlicher freier Parameter, der Totwasserdruck p_1 auftreten. Er muß jedoch nicht grundsätzlich dem jeweiligen Experiment entnommen werden, wie dies bisher notwendig war. Die Eigenart der beschriebenen Strömungsform — sie hat endliche Totwasserbreite — gestattet vielmehr einen allgemeinen Vergleich mit der wirklichen Strömungsform, der mit Hilfe des Impulssatzes auf einen gewissen Vorzugswert des Totwasserdrucks führt. Dieser auch im Experiment häufig vorhandene Wert ergibt einige überraschend gute rein theoretische Ergebnisse. Allgemein wird der Totwasserdruck auf einen „Einschnürungsfaktor“ zurückgeführt, der sich auf die turbulente Vermischung

¹ Einen ausführlichen Bericht über die frühen Arbeiten gibt beispielsweise G. JAFFÉ, Z. angew. Math. Mech. **1** (1921) S. 398.

² Vgl. die Darstellung in W. MÜLLER, *Mathematische Strömungslehre*, Berlin 1928.

³ D. RIABOUCHINSKY, *Recherches d'Hydrodynamique*, Thèse, Paris 1922.

und die Auflösung des Totwassers bezieht. Da dieser Vorgang sich in einiger Entfernung von der Kontur abspielt, ist er von ihr weitgehend unabhängig, wodurch sich für weitere Untersuchungen einige neuartige Gesichtspunkte eröffnen.

Die gefundene Strömungsform ist eine einfache Verallgemeinerung der bekannten konformen Abbildungen. Ihre große Einfachheit erlaubt einen weitgehenden Überblick über die berechenbaren Einzelformen und die numerische Berechnung von Strömungen um vorgegebene gekrümmte Profile, was bei den vorhandenen Verallgemeinerungen nicht möglich war.

Im Verlauf der Arbeit ergaben sich verschiedene Beiträge zur Theorie der Helmholtz-Strömung, über die zuerst in Ziff. 2 und 3 berichtet wird. Die Verallgemeinerung erfolgt in Ziff. 4 bis 6, in Ziff. 7 wird eine einfache Beziehung zu den unstetigen Kanalströmungen angegeben, Ziff. 8 und 9 enthalten die physikalischen Überlegungen beim Vergleich mit Strömungen in schwach zähen Flüssigkeiten.

Einige Teile der vorliegenden Arbeit sind schon in der Dissertation des Verfassers⁴ enthalten, über die bisher nur kurz berichtet wurde.⁵

Herrn Professor Kravtchenko (Univ. Grenoble) bin ich für verschiedene Hinweise zu großem Dank verpflichtet.

2. Die verschiedenen Problemstellungen bei der Helmholtz-Strömung. Die mathematische Aufgabe der Berechnung von unstetigen Strömungen des Helm-

ABB. 1. Skizze der konformen Abbildung $w(z)$. Einander entsprechende Linien und Punkte sind gleich benannt und gezeichnet.

holtz-Typus¹ kann folgendermaßen formuliert werden. Es sei in einer z -Ebene mit

$$z = x + iy \quad (1)$$

eine endliche, doppelpunktfreie Kurve $\mathcal{C}$ mit den Endpunkten P_1 und P_2 vorgegeben, die auch zusammenfallen können. Je nach der Problemstellung wird

⁴ R. EPPLER, *Zur Theorie der unstetigen Strömungen*, Dissertation Stuttgart 1951.

⁵ Z. angew. Math. Mech. **31** (1951), S. 287.

¹ Mit "Helmholtz-Strömung" werden in Übereinstimmung mit vielen Autoren alle unstetigen Strömungen mit unendlich langen freien Stromlinien bezeichnet.

von $\mathfrak{C}$ noch eine Stetigkeitseigenschaft verlangt, in der einführenden Ziff. 2. soll $\mathfrak{C}$ außer in einem Punkt S endliche Krümmung haben. Der Punkt S kann willkürlich noch nach $z = 0$ gelegt werden. Auf $\mathfrak{C}$ wählen wir zwei Punkte A_1 und A_2 , die durch S getrennt werden und bezeichnen den Teil A_1SA_2 von $\mathfrak{C}$ mit ω (Abb. 1). $\mathfrak{C}$ und ω können identisch sein. Nun sucht man zwei in A_1 und A_2 beginnende Linien λ_1 und λ_2 , die so beschaffen sein sollen, daß bei der konformen Abbildung des Bereichs $\mathfrak{Z}$ außerhalb von ω , λ_1 , λ_2 auf die längs der positiv reellen Achse aufgeschlitzte w -Ebene $\mathfrak{W}$ die folgenden Forderungen erfüllt sind:

$$w(z = 0) = 0 \quad (2)$$

$$w(z = \infty) = \infty \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dz}(z = \infty) = 1 \quad (4)$$

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = 1 \quad \text{längs } \lambda_1, \lambda_2. \quad (5)$$

Da die Form der Linien λ_1 , λ_2 nicht bekannt ist, kann die Funktion $w(z)$ nicht direkt gefunden werden. Man geht vielmehr in bekannter Weise² auf eine Hodo-graphenebene

$$\zeta = \ln \frac{dz}{dw} = T + i\theta \quad (6)$$

über und sucht eine Funktion $\zeta(w)$ zu bestimmen, die mittels

$$z = \int_0^w \frac{dz}{dw} dw = \int_0^w e^{\zeta(w)} dw \quad (7)$$

auf die gewünschte Abbildung führt.

Für einige spezielle, aus geraden Linien zusammengesetzte Kurven $\mathfrak{C}$ kann auf diesem Weg das Problem einfach gelöst werden.³ Bei gekrümmten Vorgaben von $\mathfrak{C}$ treten wesentlich größere Schwierigkeiten auf. Diese umging zuerst Levi-Civita⁴ dadurch, daß er die Problemstellung umkehrte und ein *unbestimmtes Problem*⁵ formulierte. Er fragt, wie die Funktion $\zeta(w)$ beschaffen sein muß, damit die nach (7) dazu definierte Funktion $z(w)$ eine Abbildung liefert, die den Bedingungen (2)–(5) genügt und den Bereich $\mathfrak{Z}$ auf irgend einen Bereich $\mathfrak{Z}$ abbildet, dessen Randkurve ω nicht vorgegeben ist.

Über die verschiedenen Lösungen des unbestimmten Problems wird in Ziff. 3.

² Vgl. z. B. MILNE-TOMSON, *Theoretical Hydrodynamics*, S. 269 ff. New York (1950).

³ Vgl. auch G. JAFFÉ, Fußnote¹ von Seite 592.

⁴ T. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza*. Rendiconti Circolo Matematico Palermo **23** (1907), S. 1.

⁵ Übersetzung des im Französischen gebräuchlichen “problème indéterminé”, oft auch “inverses Problem”.

berichtet werden. Nachdem erkannt war, daß ganze Mannigfaltigkeiten von solchen Lösungen existieren, konnte das ursprüngliche Problem als *bestimmtes Problem*⁶ neu formuliert werden: Wie muß die Lösung des unbestimmten Problems $\zeta(w)$ beschaffen sein, damit der Rand des Bereiches $\mathfrak{Z}$ eine vorgegebene Kurve $\mathfrak{C}$ oder einen Teil ω davon enthält?

Auch über die Lösungen dieses Problems wird noch einiges zu sagen sein. Zunächst müssen jedoch einige physikalische Gültigkeitsbedingungen formuliert werden.

Die durch die Lösungen des unbestimmten oder bestimmten Problems als Umkehrung von (7) definierten Funktionen

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (8)$$

werden als komplexes Potential von Strömungen der z -Ebene aufgefaßt, deren Geschwindigkeitsvektor dann

$$\mathfrak{v} = ve^{i\theta} = \frac{\overline{dw}}{dz} \quad (9)$$

ist. Diese Strömung geht wegen (4) im Unendlichen in Parallelströmung von der Geschwindigkeit $v_\infty = 1$ über und hat als Berandungen ω , λ_1 und λ_2 . ω muß man sich als feste Wand oder Kontur vorstellen, λ_1 und λ_2 kann man als freie Strahlgrenzen auffassen, da längs dieser Linien wegen (5) nach der Bernoullischen Gleichung (ρ = Dichte)

$$p + \frac{1}{2}\rho \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \quad (10)$$

der Druck p konstant ist. Die Strömung kann hier von ruhender Flüssigkeit (Totwasser) begrenzt sein. Man hat dann beim Überschreiten der Linien λ_1 , λ_2 eine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit, aber Stetigkeit im Druck. Als Grenze zwischen der umströmten Kontur und dem Totwasser kann eine willkürliche Linie zwischen A_1 und A_2 gewählt werden.

Auf Grund dieser physikalischen Deutung von $w(z)$ müssen nun noch weitere Forderungen an diese Funktion gestellt werden. Nach Brillouin⁷ muß man verlangen, daß

$B_1)$ der Bereich $\mathfrak{Z}$ schlicht ist, daß sich also ω , λ_1 und λ_2 nicht überschneiden, und

$B_2)$ der Druck p nach (10) nicht negativ wird, daß also

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \leq 1 + \frac{2}{\rho} p_\infty \quad (11)$$

ist.

⁶ Im Französischen "problème déterminé".

⁷ M. BRILLOUIN, *Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la résistance des fluides*. Ann. de Phys. et de Chim. **23** (1911), S. 145.

Die Bedingung B_2) in der Form (11) wird hier nicht berücksichtigt, da vor allem das praktische Problem behandelt wird. Bei ihm ist meist der statische Druck p_∞ sehr hoch, sodaß nur in allernächster Nähe von vorspringenden, nicht mit dem Staupunkt S identischen Ecken der Kontur (11) nicht erfüllt ist. Dieser Fall ist zunächst noch ausgeschlossen. Wenn er später zugelassen wird, dann muß man sich die Ecke durch eine kleine Ausrundung ersetzt denken, ohne daß dabei am Wesentlichen der Strömung etwas geändert wird. Diese Hilfsvorstellung wird ja in der praktischen Hydromechanik, beispielsweise bei der Theorie der dünnen Profile, häufig mit Erfolg benützt.

Die Forderung B_1) der Schlichtheit ist dagegen entscheidend für die Realisierbarkeit der Strömung. Sie hat vor allem auf die Umgebung der Ablösungsstellen A_1, A_2 einen Einfluß.

Wie Brillouin⁸ gezeigt hat, ist die Krümmung der freien Stromlinien in der Ablösungsstelle unendlich, wenn nicht $\zeta(w)$ eine zusätzliche Bedingung erfüllt (Vgl. Ziff. 3.). Wenn also in der Nähe eines nicht mit dem Endpunkt zusammenfallenden Ablösungspunktes, in welchem $\mathbb{C}$ endlich gekrümmt ist, die Bedingung B_1) erfüllt sein soll, dann muß dort entweder ein konkaves Totwasserstück vorhanden sein, oder die zusätzliche Bedingung für $\zeta(w)$ erfüllt sein.

Auf Grund dieser Überlegungen wurden in der zurückliegenden Literatur drei wesentlich verschiedene Problemstellungen für das bestimmte Problem formuliert und bearbeitet (Vgl. Abb. 2).

ABB. 2. Lösungsskizzen der drei formulierten Probleme.

a) Problem der scharfkantig abgeschlossenen Kontur⁹: Es sei eine nicht geschlossene Linie $\mathbb{C}$ vorgegeben, deren Endpunkte P_1, P_2 die Ablösungsstellen A_1 und A_2 sein sollen. Das Verhalten der dort beginnenden freien Stromlinien λ_1, λ_2 ist beliebig.

⁸ A.a.O.⁷

⁹ Französisch "problème du sillage".

b) **Problem des bugförmigen Totwassers**¹⁰: Es sei eine nicht notwendig geschlossene Kontur $\mathfrak{C}$ vorgegeben, die Ablösungsstellen A_1, A_2 sind willkürlich. Die freien Stromlinien sollen aber entweder in der Ablösungsstelle endliche Krümmung haben, oder in der Umgebung der Ablösungsstelle ein konvexes Totwasser begrenzen, was wegen B_1) nur möglich ist, wenn die entsprechende Ablösungsstelle in das Konturende fällt.

c) **Uneingeschränktes Problem**: Es sei eine nicht notwendig geschlossene Linie $\mathfrak{C}$ vorgegeben. Die Ablösungsstellen und die Formen der freien Stromlinien sind frei.

Das Problem c) ist das umfassendste. Es enthält die Probleme a) und b), die dagegen nur eingeschränkt sind. Es kommt aber auch dem physikalischen Sachverhalt am nächsten, denn weder die Vorgabe der Ablösungsstellen noch die einschränkende Bedingung für die Form der freien Stromlinien ist physikalisch notwendig. Die Vorgabe der Ablösungsstellen ist bei gewissen Konturen (beispielsweise bei der ebenen Platte) naheliegend, dort sind sie jedoch auch im Rahmen des Problems c) eindeutig festgelegt. Die andere Bedingung rührt von der verschärften Form der Gleichung (11) her, die nach Brillouin oft in der nur hinreichenden Form

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| \leq 1 \quad (12)$$

verwendet wurde. Im Rahmen dieser Bedingung, die nur konvexe Totwasser zuläßt, ist die Fragestellung b) die allgemeinste.

Die Probleme a) und b) hat Leray¹¹ in der angegebenen Form präzisiert und für gewisse Klassen von Konturen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen. Das Problem c) läßt zu den Lösungen von b) hin noch alle diejenigen zu, bei denen die Krümmung der freien Stromlinien in der Ablösungsstelle unendlich ist und das Totwasser konkav beginnt, zu den Lösungen von a) hin alle diejenigen, bei denen nicht beide Ablösungsstellen in den Endpunkten von $\mathfrak{C}$ liegen. Es ist also zu vermuten, daß wenn die Probleme a) und b) jeweils nur eine Lösung besitzen, bei c) Vieldeutigkeiten auftreten. Dies hat (vor den Arbeiten von Leray) Schmieden an zwei Beispielen gezeigt¹². Der dort gegebene allgemeine Beweis ist nicht bindend, wie verschiedene Kritiken¹³ gezeigt haben. Inzwischen hat jedoch Lavrentieff¹⁴ einen neuen Beweis für einen Teil der Schmiedenschen Behauptungen gegeben.

¹⁰ Französisch "problème de la proue".

¹¹ J. LERAY, *Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz: théorie des sillages et des proues*. Comm. Math. Helv. **8** (1936), S. 149 und 250.

¹² C. SCHMIEDEN, *Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unstetigen Strömungen*. Ing.-Arch. **3** (1932), S. 356 und **5** (1934), S. 374.

¹³ Siehe z.B. A. WEINSTEIN, *Non-linear problems in the theory of fluid motion with free boundaries*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics I, S. 1, New York 1949 (mit ausführlicher Bibliographie).

¹⁴ M. LAVRENTIEFF, *Sur certaines propriétés des fonctions univalentes et leurs applications à la théorie des sillages*, Rec. Mat. (Mat. Sbornik) **44** (1938), S. 391.

Bei den unstetigen Strömungen zwischen zwei ebenen Wänden (Kanalströmungen) liegen die Verhältnisse praktisch gleich. Villat¹⁵ gab sehr allgemeine Lösungen des unbestimmten Problems an. Kravtchenko¹⁶ behandelte die Probleme a) und b) und erhielt weitgehend die gleichen Ergebnisse wie Leray. Bergmann¹⁷ wies im Fall der Problemstellung c) auf Vieldeutigkeiten hin.

Bei den Arbeiten über das bestimmte Problem sind noch zwei sehr verschiedene Ziele zu unterscheiden. Einerseits kann man Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für bestimmte Konturenklassen suchen,¹⁸ andererseits will man Strömungen um konkrete vorgegebene Konturen numerisch berechnen.¹⁹ Naturgemäß muß man, um die Schlichtheit B_1 für ganze Konturenklassen und die dazugehörigen Strömungen zu garantieren, viel schärfere Bedingungen an $\mathfrak{C}$ stellen, als wenn man notfalls mit Hilfe der numerischen Lösung die Schlichtheit nachkontrollieren kann.

In der vorliegenden Arbeit wird vor allem das bestimmte, numerische Problem in der Form c) interessieren, allerdings erst bei der noch zu besprechenden Verallgemeinerung. Dieses Problem ist auch bei der Helmholtz-Strömung nur für wenige geradlinige Konturen exakt gelöst worden.²⁰ Für gekrümmte Konturen existieren nur mehr oder weniger gute Näherungslösungen. Man fragt dabei, wie eine Lösung des unbestimmten Problems beschaffen sein muß, damit die entstehende Kontur $\mathfrak{C}$ "möglichst gut" mit einer vorgegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ oder einem Teil davon übereinstimmt, wobei das "möglichst gut" jeweils zu definieren ist.

Man kann sich nach Rapoport²¹ mit einem gewissen Taster nach der Lösung begnügen, wenn sich die Lösung des unbestimmten Problems numerisch einfach gestaltet. Schmieden²² hat eine Methode zur Berechnung von Tragflügelströmungen entwickelt, die im Prinzip der Herstellung von Strömungen um Tragflügelprofile nach Kutta-Joukowski gleichkommt. Die meisten Arbeiten versuchen jedoch die Krümmung der Kontur in Abhängigkeit von ihrer Steigung anzunähern. Dies wird auch hier in Ziff. 5 und 6. geschehen. Zuvor wird jedoch eine neuartige Lösung des unbestimmten Problems gegeben, die gegenüber den bekannten Lösungen Vorteile hat, und die sich anschließend leicht verallgemeinern läßt.

¹⁵ Siehe z.B. H. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*. Paris 1920.

¹⁶ J. KRAVTCHENKO, *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz; théorie des sillages et des piques*. Journ. de Math. pures et appl. XX (1941), S. 35 (mit umfassender Bibliographie).

¹⁷ S. BERGMANN, *Mehrdeutige Lösungen bei Potentialströmungen mit freien Grenzen*. Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 83.

¹⁸ Vgl. z.B. die Arbeiten von LAVRENTIEFF, LERAY und KRAVTCHENKO, Fußnoten^{11, 14} und¹⁶ von Seiten 597–598, ebenso einige neuere Arbeiten von J. SERRIN, Journal of Rat. Mech. and Anal. 2, S. 563 und das dortige Literaturverzeichnis.

¹⁹ Z.B. die Arbeiten von BERGMANN und SCHMIEDEN, Fußnoten¹² und ¹⁷ von Seiten 597–598.

²⁰ Fußnote¹ von Seite 592.

²¹ Darüber berichtet J. KRAVTCHENKO, *Note sur les solutions approchées du problème déterminé des sillages*. Annales de l'institut Fourier, III (1951), S. 287.

²² C. SCHMIEDEN, *Über Tragflügelströmungen mit Wirbelablösung*. Luftfahrt-Forschung 17 (1940), S. 37.

3. Das unbestimmte Problem der Helmholtz-Strömung. Als Lösungen des unbestimmten Problems werden alle Funktionen $\zeta(w)$ angesprochen, die mittels (7) den Bereich $\mathfrak{B}$ der w -Ebene konform auf einen Bereich $\mathfrak{Z}$ der z -Ebene abbilden, wobei die Bedingungen (2)–(5) und B_1) erfüllt sein sollen, die Kurve ω jedoch im Rahmen ihrer Stetigkeitsforderungen noch willkürlich ist.

Für diese Funktionen sind sehr verschiedene Ansätze gegeben worden. Levi-Civita setzte sie als mittelbare Funktion an, indem er den Bereich $\mathfrak{B}$ mittels

$$w = 4C \left[\cos \sigma_0 - \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right]^2 \quad (13)$$

noch auf einen Halbkreis $\mathfrak{T}$ der τ -Ebene abbildete¹ (Abb. 3). Dabei kommt der Punkt $S(w_s = 0)$ ² nach $\tau_s = e^{i\sigma_0}$, die beiden Konturteile SA_1 und A_2S , die mit ω_1 und ω_2 bezeichnet werden, auf die Kreisbögen $\tau = e^{i\sigma}$ mit $\pi \geq \sigma \geq \sigma_0$ und $\sigma_0 \geq \sigma \geq 0$, die Punkte A_1 und A_2 nach $\tau_{A_1} = -1$, $\tau_{A_2} = +1$, die freien Stromlinien λ_1, λ_2 auf den negativen bzw. positiven Teil der reellen Achse, der Punkt $\omega_B = \infty$ nach $\tau_B = 0$. Die Größen C und σ_0 können in Abhängigkeit von w_{A_1} und w_{A_2} festgelegt werden, der Faktor C reguliert nur den Maßstab von z - und w -Ebene. In dieser τ -Ebene lautet der Ansatz von Levi-Civita

$$\zeta(\tau) = \gamma \ln \frac{1 - e^{i\sigma_0}\tau}{1 + e^{-i\sigma_0}\tau} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n. \quad (14)$$

Für ihn zeigt man leicht, daß bei reellen a_n und auf $|\tau| \leq 1$ konvergierender Potenzreihe der Zusammenhang $w(z)$, der durch (13) und das in der Form

$$z = \int_{e^{i\sigma_0}}^{\tau} e^{\zeta} \frac{dw}{d\tau} d\tau \quad (15)$$

auf τ transformierte Integral (7) gegeben ist, den Bedingungen (2) bis (5) genügt. Die Schlichtheit im Sinn der Bedingung B_1) ist jedoch nicht garantiert, sondern muß jeweils gesondert nachgeprüft werden.

Dieser Ansatz hat sich bei der Berechnung von Beispielen und als Grundlage für die Lösung des bestimmten numerischen Problems gut bewährt. Zur Gewinnung einer Übersicht über die erfaßbaren Strömungsformen und zu anderen allgemeinen Betrachtungen ist er jedoch schlecht geeignet.

Villat³ gab deshalb längs $\tau = e^{i\sigma}$ den Imaginärteil $\theta(\sigma)$ von $\zeta(\tau)$ vor. Das Poissonsche Integral⁴ bestimmt damit die Funktion $\zeta(\tau)$. Dieser Ansatz gibt die Möglichkeit, die zu den gewählten Funktionen $\theta(\sigma)$ gehörenden Konturen zu beurteilen, da jeder längs $\tau = e^{i\sigma}$ auftretende Wert θ längs der Kontur ω in der z -Ebene als Steigungswinkel wieder vorkommt. Dies wird später bei den

¹ Fußnote⁴ von Seite 594.

² Der Wert der komplexen Variablen eines Punktes wird durch Anhängen der Punktbezeichnung als Index an die Variable gekennzeichnet.

³ Fußnote¹⁵ von Seite 598.

⁴ HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*, 2. Auflage Berlin 1925.

ABB. 3

ABB. 3. Der von LEVI-CIVITA eingeführte Halbkreis $\mathfrak{T}$.

ABB. 4

ABB. 4. Skizze eines möglichen Bereichs Ω .

Gleichungen (16)–(18) ausführlich besprochen. Die Form der freien Stromlinien in der z -Ebene ist jedoch auch hier schlecht zu übersehen.

Wir gehen deshalb noch einen anderen Weg. Genau wie bei der Kontur ω reicht es schon aus, wenn man auch längs der freien Stromlinien λ_1, λ_2 über den Verlauf von $\Im m\{\zeta\}$ leicht Aussagen machen kann. Dies gelingt, wie anschließend gezeigt wird, mit der Kenntnis der durch $\zeta(\tau)$ vermittelten Abbildung des τ -Halbkreises $\mathfrak{T}$ auf die ζ -Ebene. Anstatt aber für irgend einen Ansatz $\zeta(\tau)$ diese Abbildung zu untersuchen, gehen wir sofort den umgekehrten Weg und definieren $\zeta(\tau)$ durch eine konforme Abbildung. Damit entsteht eine Lösung des unbestimmten Problems, die keinen der bisherigen Nachteile mehr aufweist.

Wir geben in der ζ -Ebene einen Bereich Ω vor, der folgende Eigenschaften hat (Abb. 4):

- 1) Er ist einfach zusammenhängend (nicht notwendig schlicht).
- 2) Er hat keinen Punkt außerhalb des Streifens $-\frac{1}{2}\pi \leq \Im m\{\zeta\} \leq \frac{1}{2}\pi$.
- 3) Sein Rand besteht aus Jordanschen Kurvenstücken.
- 4) Die Berandung geht höchstens einmal nach $\zeta = \infty$, und dann bei $T > 0$ auf zwei Linien mit waagrechten Asymptoten im Abstand $\gamma\pi$ ($\gamma \leq 1$).
- 5) Zwei endliche Stücke λ_1, λ_2 des Randes, die bei $\zeta = 0$ zusammenstoßen, fallen auf die imaginäre Achse $T = 0$.

Diesen Bereich bilden wir konform auf die obere Hälfte $\mathfrak{T}$ des τ -Einheitskreises so ab, daß der Punkt $\zeta = 0$ nach $\tau = 0$ fällt, die anderen beiden Endpunkte der Randstücke λ_1, λ_2 nach $\tau = \mp 1$. Damit ist nach dem Riemannschen Abbildungssatz in seiner Erweiterung auf schlichtartige Bereiche⁵ wegen der Festlegung dreier Randpunkte eine und nur eine Funktion $\zeta(\tau)$ bestimmt, von der leicht zu zeigen ist, daß sie eine Lösung des unbestimmten Problems ist.

Zum Beweis bilden wir nach (15) und (13)

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dw} = e^{\zeta} = e^T \cdot e^{i\theta}. \quad (16)$$

⁵ HURWITZ-COURANT, a.a.O.

Man kennt also mit $\zeta(\tau)$ die Ableitung der Abbildungsfunktion $z(w)$ und damit nach (9) wegen

$$v = \left| \frac{dw}{dz} \right| = |e^{-\tau}| = e^{-\tau}, \quad (17)$$

$$\arg \frac{dw}{dz} = \arg \frac{dz}{dw} = \theta \quad (18)$$

den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ nach Betrag v und Richtung θ . Dies ist vor allem am Rand des Bereiches $\mathfrak{Z}$ nützlich, da man dessen Steigung mit $\Im m(\zeta)$ beurteilen kann, auch ohne die Funktion $\zeta(\tau)$ explizit zu kennen. In diesen Aussagen ist aber der ganze Beweis schon enthalten.

Zunächst folgt aus der Zuordnung der Punkte $\tau = 0$ und $\zeta = 0$, daß für $\tau \rightarrow 0$, also für $w \rightarrow \infty$ die Ableitung $dz/dw \rightarrow 1$ geht, wie in (4) verlangt wurde. Daraus folgt aber sofort auch (3).

Außerdem ist für reelle τ , also nach (13) für $w = \phi + i0$, $\phi \geq \phi_{A_1}$ und $w = \phi - i0$, $\phi \geq \phi_{A_2}$ wegen Bedingung 5) mit $T = 0$ der Ableitungsbetrag $|dz/dw| = 1$, was in (5) verlangt wurde.

Längs des Halbkreisbogens ist $\zeta(\tau)$, also auch dz/dw wegen Forderung 3) stetig⁶, außer eventuell in einem Punkt $\tau_s = e^{i\sigma_0}$, dem Bildpunkt von $\zeta_s = \infty$. Daraus folgt, daß das Bild dieses Kreisbogens, bzw. dasjenige der entsprechenden Geradenstücke der w -Ebene, stetige Tangente hat, deren Steigungswinkel θ wegen (18) mit $\Im m(\zeta)$ übereinstimmt.

Im Punkt $\tau_s = e^{i\sigma_0}$ springt θ um $\gamma\pi$. Übernimmt man den durch das Bild von $\zeta_s = \infty$ bestimmten Wert von σ_0 in (13) und (15), dann erhält man als Bild der Umgebung von $\tau_s = e^{i\sigma_0}$ oder $w_s = 0$ die Umgebung des Staupunktes $z_s = 0$, in welchem die Kontur ω eine Ecke vom Winkel $\gamma\pi$ hat. (Ist $\gamma = 0$ oder $\zeta = \infty$ gar kein Randpunkt, dann ist die Abbildung in $z = 0$ auch noch konform, die Kontur bekommt dann dort eine Spitze.) Der Stetigkeitsbeweis der Abbildung in dieser Ecke kann genau so geführt werden, wie dies bei der Schwarz-Christoffel-schen Polygonabbildung geschieht. Damit ist dann auch gezeigt, daß das Integral (15) für alle oberen Grenzen des τ -Halbkreises außer $\tau = 0$ konvergiert, da der Integrand sonst keine Singularitäten mehr enthält.

Also ist im Innern des Halbkreises mit $\zeta(\tau)$ und $w(\tau)$ auch $z(\tau)$ analytisch, und wegen $\zeta \neq \infty$ ist $dw/dz \neq 0$. Insgesamt wird also mittels (13) und (15) der Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen Bereich $\mathfrak{Z}$ so konform abgebildet, daß die Bedingungen (2)–(5) erfüllt sind. Die Form des entstehenden Bereichs $\mathfrak{Z}$ kann man schon weitgehend beurteilen, da die Steigung in einem Randpunkt von $\mathfrak{Z}$ durch $\Im m(\zeta)$ im entsprechenden Randpunkt von Ω festgelegt ist. Weitere Einzelheiten werden noch abgeleitet werden.

Zunächst bleibt noch die Schlichtheit von $\mathfrak{Z}$ zu untersuchen. Dazu reicht es bekanntlich aus, die Schlichtheit des Randes zu untersuchen, und dies gelingt

⁶ C. CARATHÉODORY, *Funktionentheorie*, 2. Band S. 85, Basel 1950.

nun auf Grund der soeben gemachten Aussagen über seine Steigung sehr einfach. Es folgt aus Bedingung 1) und Gleichung (18), daß das Bild eines Ufers der reellen w -Achse höchstens noch insofern die Schlichtheit stören kann, als mit der größtmöglichen Steigung $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ ein Geradenstück mehrfach durchlaufen wird. Dies ist aber unmöglich, weil dazu mindestens ein Sprung von θ notwendig wäre, der nach Bedingung 3) ausgeschlossen ist.

Genau gleich kann man für die negativ reelle w -Achse schließen, sodaß das Bild der oberen w -Halbebene $\mathfrak{B}_1$ bzw. der unteren w -Halbebene $\mathfrak{B}_2$ sicher schlicht ist. Nicht garantiert ist dies beim gesamten Bild $\mathfrak{Z}$ des Gesamtbereichs $\mathfrak{B}$. Hier können sich die Bilder der beiden Ufer der positiv reellen w -Achse noch überschneiden. Dies soll jedoch hier nicht stören. Falls es eintritt, sollen die Bilder der beiden Halbebenen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ getrennt betrachtet werden. Man kann sich Staustromlinie und Halbkontur als feste Wände denken und so Strömungen entlang von langen, plötzlich endenden Wänden erhalten.

Will man die Schlichtheit restlos garantieren, dann muß man etwa

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ längs } \omega_1, \quad -\pi \leq \theta \leq 0 \text{ längs } \omega_2 \quad (19)$$

verlangen. Dies hat zur Folge, daß die Kontur ω in der z -Ebene von einer waagrechten Geraden nur in einem Punkt (oder Intervall) geschnitten wird. Dadurch werden viele praktisch wichtige Strömungen um geschlossene Konturen ausgeschlossen, auf die nicht verzichtet werden kann. Die Voraussetzungen (19) werden deshalb nicht mehr erwähnt, obwohl sie in verschiedenen vorangehenden Arbeiten zugrundeliegen und die im folgenden mitgeteilten Ergebnisse meist auch unter ihnen gelten.

Wir wollen hier unter einem Bereich Ω immer einen solchen verstehen, der den Bedingungen 1)–5) genügt und einfach sagen, er ist eine Lösung des unbestimmten Problems. Streng genommen trifft dies ja nur für die zugehörige Abbildungsfunktion $\zeta(\tau)$ zu.

Diese Lösung hat nun verschiedene Vorteile. Vor allem kann man bei ihr in der z -Ebene nicht nur die Form der Kontur ω , sondern auch diejenige der freien Stromlinien λ_1, λ_2 nach (18) weitgehend beurteilen. Damit lassen sich nicht nur die anderweitig schon gewonnenen Wendepunktsätze für die freien Stromlinien mühelos ableiten, sondern man kann auch die Existenz von beliebig komplizierten Strömungen leicht zeigen.

Wir stellen zunächst fest, daß die Bedingung 1) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür ist, daß Ω eine Lösung des unbestimmten Problems ist, daß also nicht einfach zusammenhängende Bereiche Ω nicht in Frage kommen. Sie stehen nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie⁷ dazu im Widerspruch, daß $\zeta(\tau)$ im τ -Halbkreis analytisch ist. Damit könnte auch $\zeta(w)$ in $\mathfrak{B}$ nicht überall analytisch sein, also in $\mathfrak{Z}$ keine Potentialströmung definiert sein.

Diese Aussage führt sofort auf die Wendepunktsätze. Betrachten wir in der ζ -Ebene eine solche Linie λ_1 , die auf der imaginären Achse mehrmals auf- und

⁷ HURWITZ-COURANT, a.a.O.

ABB. 5

ABB. 5. Skizze des Bereichs Ω bei Vorhandensein von zwei Wendepunkten längs der oberen freien Stromlinie λ_1 .

ABB. 6

ABB. 6. Beispiel einer Kontur ohne Minimum von θ längs ω_1 und ohne Maximum von θ längs ω_2 .

absteigt, wobei jede Umkehr einem Wendepunkt der freien Stromlinie λ_1 der z -Ebene entspricht (Abb. 5). Wegen des einfachen Zusammenhangs von Ω muß sich das Bild von ω_1 auf einer mehrblättrigen Riemannschen Fläche in der in Abb. 5 skizzierten Weise um die Umkehrpunkte schlingen. Wenn also λ_1 n Wendepunkte hat, dann müssen längs ω_1 mindestens $n - 1$ (relative) Extremwerte von θ auftreten, die wegen (18) wieder auf Wendepunkte der Kontur ω_1 der z -Ebene führen (die gegebenenfalls in Geradenstücke ausarten können). Dies entspricht genau der Aussage von Kravtchenko⁸.

Darüber hinaus ist aber gleichzeitig mit der skizzierten Möglichkeit des Umschlingens auch schon die Existenz von solch komplizierten Strömungsformen gezeigt. Diese einfache Art der Herleitung wird bei der in Ziff. 4 folgenden Verallgemeinerung vorteilhaft sein⁹.

Der erste längs der oberen (unteren) Konturhälfte $\omega_1(\omega_2)$ bei Vorhandensein von zwei oder mehr Wendepunkten der freien Stromlinien notwendige Extremwert von θ ist stets ein Minimum (Maximum). Dies ist in Abb. 5 leicht zu erkennen. Ist ein solches Minimum oder Maximum nicht vorhanden, wie etwa bei den von Leray eingeführten Konturen "en accolade"¹⁰ (Abb. 6), dann können die freien Stromlinien höchstens einen Wendepunkt besitzen.

Man kann so mit der gegebenen Lösung des unbestimmten Problems noch weitere Eigenschaften der Strömungen in der z -Ebene ableiten. Es erscheint auch nicht unmöglich, sie zu Existenzbeweisen für das bestimmte Problem zu benutzen. Dies wird hier jedoch nicht weiter verfolgt. Es werden dagegen noch

⁸ Fußnote¹⁶ von Seite 598, S. 112.

⁹ Mit anderen Methoden gewinnt J. SERRIN, Fußnote¹⁸ von Seite 598, andere Aussagen über das mögliche "pathologische" Benehmen der freien Stromlinien, die jedoch nicht im Widerspruch zu den vorliegenden stehen.

¹⁰ Vgl. auch J. KRAVTCHEKO, Fußnote¹⁶ von Seite 598, S. 125.

einige Tatsachen abgeleitet, die später bei der numerischen Behandlung des bestimmten Problems nützlich sein werden. Es handelt sich vor allem um eine genauere Untersuchung der Ablösungsstellen, deren Ergebnisse teilweise schon vorweggenommen wurden, sowie um einige asymptotische Formeln für die freien Stromlinien bei großen z -Werten. Bei diesen Untersuchungen wird teilweise die Funktion $\zeta(\tau)$ in analytischer Form benützt, ohne daß eine solche explizit bekannt ist. Die Ergebnisse lassen sich aber wieder weitgehend allein auf Grund der Form von Ω beurteilen.

Bezeichnet man die Bogenlänge einer Stromlinie der z -Ebene mit l , dann ist ihre Krümmung wegen (18)

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dw} \frac{dw}{dl}, \quad (20)$$

wobei nach (6)

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \Im \left\{ \frac{d\zeta}{d\tau} \right\}, \quad (21)$$

nach (17)

$$\frac{dw}{dl} = \left| \frac{dw}{dz} \right| = |e^{-\zeta}| \quad (22)$$

und nach (13)

$$\frac{dw}{d\tau} = -4C \left[\cos \sigma_0 - \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right] \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2} \quad (23)$$

ist.

Längs der freien Stromlinien, bzw. ihres Bildes, der reellen τ -Achse, ist speziell ζ rein imaginär, also

$$|e^{-\zeta}| = 1 \quad (24)$$

und

$$\Im \left\{ \frac{d\zeta}{d\tau} \right\} = -i \frac{d\zeta}{d\tau}. \quad (25)$$

Damit wird dort

$$\frac{d\theta}{dl} = -i \frac{d\zeta}{d\tau} \frac{1}{\frac{dw}{d\tau}}. \quad (26)$$

In den Bildern der Ablösungsstellen $\tau = \pm 1$ hat $dw/d\tau$ nach (23) einfache Nullstellen, also wird die Krümmung der freien Stromlinien dort im allgemeinen

unendlich, und zwar entsteht in beiden Punkten das mögliche, von der Kontur weg gekrümmte konkave Totwasser, wenn

$$-i \frac{d\zeta}{d\tau} > 0 \quad (27)$$

ist. Endlich bleiben kann die Krümmung nur dann, wenn in der Umgebung der Punkte $\tau = \pm 1$

$$\left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right| \leq \text{const} \cdot |\tau \pm 1|^k, \quad (k \geq 1) \quad (28)$$

ist, also $d\zeta/d\tau$ dort mindestens von der ersten Ordnung verschwindet. Dies ist die vorweggenommene Bedingung für "endlich gekrümmte Ablösung"¹¹.

In der Umgebung der Ablösungsstellen treten noch einige andere Besonderheiten auf. Wir nehmen einmal an, die in der ζ -Ebene als Jordankurve vorausgesetzte Randkurve ω_1 von Ω sei so beschaffen, daß die Abbildungsfunktion $\zeta(\tau)$ in der Nähe von $\tau = -1$ (oder $\tau = +1$ bei ω_2) die in einer endlichen Umgebung gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\zeta(\tau) = i \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\tau + 1)^{\beta_n}, \quad A_n \text{ reell}, \quad \beta_n > \beta_{n-1}, \quad \beta_0 = 0 \quad (29)$$

besitzt. Diese Entwicklung ist schon sehr allgemein, da die β_n nicht ganzzahlig sein müssen. Sie umfaßt mit den ganzzahligen β_n auch den Fall, in dem $\zeta(\tau)$ und damit ω_1 in der Umgebung von $\tau = -1$ noch analytisch ist. Wegen der in (29) enthaltenen Winkelproportionalität ist der Winkel β zwischen ω_1 und λ_1 (Vgl. z. B. später Abb. 7a) in der ζ -Ebene

$$\beta = \frac{1}{2}\pi\beta_1. \quad (30)$$

Die Entwicklung der freien Stromlinien erhält man mit reellen $\tau + 1 > 0$. Geht man damit in (26) ein, oder auch direkt mit (29) in (28), dann folgt, daß bei endlich gekrümmter Ablösung $\beta_1 \geq 2$ und $\beta \geq \pi$ sein muß.

Für die Entwicklung der Kontur setzen wir in (29)

$$\tau = e^{i(\pi-2\epsilon)}, \quad \tau + 1 = 2 \sin \epsilon \cdot e^{i(\frac{1}{2}\pi-\epsilon)}. \quad (31)$$

Ihre Krümmung erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \theta &= \Im(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2 \sin \epsilon)^{\beta_n} \cos \beta_n (\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon), \\ T &= \Re(\zeta) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2 \sin \epsilon)^{\beta_n} \sin \beta_n (\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon), \end{aligned} \quad (32)$$

¹¹ Im Französischen "détachement en proue".

aus der zu (20) analogen Gleichung

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{d\theta}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\phi} e^{-T} \quad (33)$$

worin wegen (13)

$$\phi(\epsilon) = \Re(w) = 4C(\cos \sigma_0 + \cos 2\epsilon)^2 \quad (34)$$

und

$$\frac{d\phi}{d\epsilon} = -F(\epsilon) \sin \epsilon, \quad F(\epsilon) = 32C(\cos \sigma_0 + \cos 2\epsilon) \cos \epsilon \quad (35)$$

zu setzen ist. Insgesamt ergibt sich, wenn noch $D_n = 2^{\beta_n} \beta_n A_n$ gesetzt wird

$$F(\epsilon) e^T \frac{d\theta}{dl} = -\frac{1}{\sin \epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin^{\beta_n-1} \epsilon \sin(\beta_n + 1)(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon). \quad (36)$$

Die Funktion $F(\epsilon)$ verschwindet in der Umgebung von $\epsilon = 0$ nicht, T geht nach (32) mit ϵ gegen Null. Wegen des von $d\epsilon/d\phi$ herrührenden $\sin \epsilon$ im Nenner wird also die Konturkrümmung $d\theta/dl$ in der Ablösungsstelle $\epsilon = 0$ unendlich, wenn nicht die Summe in (36) mit ϵ gegen Null geht. Dazu muß $\beta_n \geq 2$ sein; kleiner kommt nur der Wert $\beta_1 = 1$ in Frage, bei welchem der zweite Faktor des Summengliedes mit ϵ Null wird. Es muß also bei endlicher Konturkrümmung entweder $\beta = \tfrac{1}{2}\pi$ oder $\beta \geq \pi$ sein.

Noch mehr Einschränkungen ergeben sich aus der Betrachtung der Größe

$$\frac{d^2 \theta}{dl^2} = e^{-2T} \frac{1}{\left(\frac{d\phi}{d\epsilon}\right)^2} \left[\frac{d^2 \theta}{d\epsilon^2} - \frac{d\theta}{d\epsilon} \left(\frac{d^2 \phi}{d\epsilon^2} + \frac{dT}{d\epsilon} \right) \right], \quad (37)$$

die sich mit (32) und (35) zu

$$\begin{aligned} F^2(\epsilon) e^{2T} \frac{d^2 \theta}{dl^2} = & - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin^{\beta_n-4} \epsilon \left[\beta_n \cos(\beta_n + 2)(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) \right. \\ & + \cos \beta_n (\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) + \frac{\cos \sigma_0 \cos 2\epsilon + \cos 4\epsilon}{(1 + \cos \sigma_0 - 2 \sin^2 \epsilon) \cos \epsilon} \sin(\beta_n + 1)(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) \left. \right] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin^{\beta_n-4} \epsilon \sin(\beta_n + 1)(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin^{\beta_n} \epsilon \cos(\beta_n + 1)(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) \end{aligned} \quad (38)$$

berechnet. Zu dieser Größe liefern erst alle $\beta_n \geq 4$ sicher nur endliche Beiträge. Für alle nicht ganzzahligen $\beta_n < 4$ wird sie sicher bei $\epsilon = 0$ unendlich, da dort die eckige Klammer der ersten Summe nicht verschwindet und das Summenprodukt nicht gleichzeitig mit der Ordnung ϵ^{β_n-4} gegen unendlich gehen kann. Mit den ganzzahligen Werten $\beta_n = 1, 2, 3$ geht man versuchsweise in (38) ein. Nach

einiger Zwischenrechnung erhält man als zusätzliche Bedingung für das Endlichbleiben des Summenproduktes

$$D_1(D_1 - \tfrac{1}{2}D_2) = 0, \quad (40)$$

während die erste Summe automatisch endlich bleibt. Der erste Faktor in (40) verschwindet, wenn $A_1 = 0$ ist. Dies bedeutet, daß das kleinste noch vorhandene $\beta_n = 2$ ist, also endlich gekrümmte Ablösung vorhanden ist. Der zweite Faktor in (40) verschwindet, wie man leicht mittels (36) bestätigt, wenn die Krümmung $d\theta/dl$ bei $\epsilon = 0$ verschwindet. Insgesamt besagt die Zusatzbedingung (40), daß eine Kontur mit endlicher, nicht verschwindender Krümmung und endlicher Krümmungsableitung in der Ablösungsstelle durch die Entwicklung (29) nur erfaßt werden kann, wenn endlich gekrümmte Ablösung vorhanden ist, also auch die freie Stromlinie endliche Krümmung besitzt.

Soll dagegen bei endlicher Krümmung und Krümmungsableitung, wie sie die meisten praktisch vorkommenden Konturen haben werden, nicht von vorn herein die Ablösung endlich gekrümmt sein, dann reicht die Entwicklung (29) zur Erfassung nicht aus. Insbesondere kann dann $\zeta(\tau)$ im Punkt $\tau = -1$ nicht analytisch sein. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß in diesem Fall $\zeta(\tau)$ dort eine logarithmische Singularität in der dritten Ableitung haben muß.

Es überrascht vielleicht, daß die glattere Kontur hier die Singularität hervorruft. Dies setzt sich jedoch noch weiter fort, wenn man etwa analytische Konturen (Kreis, Ellipse) betrachtet, da bei jeder weiteren Ableitung von $\theta(l)$ noch eine Potenz von $\sin \epsilon$ in den Nenner kommt.

Für die asymptotische Form der freien Stromlinien im Bereich großer z -Werte ist das Verhalten von $\zeta(\tau)$ in der Umgebung von $\tau = 0$ entscheidend¹². Dies ist aber einfach zu übersehen. Man kann den τ -Halbkreis an der reellen Achse spiegeln, den Bereich Ω an der imaginären, also $\zeta(\tau)$ in die Spiegelbilder analytisch fortsetzen. Dann ist $\zeta(\tau)$ im ganzen Einheitskreis analytisch, sodaß in der Darstellung

$$\zeta(\tau) = -i \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n, \quad b_n \text{ reell} \quad (41)$$

die Potenzreihe in $|\tau| < 1$ konvergiert. In der Umgebung des Nullpunktes geben die ersten Glieder den Ausschlag. Man geht mit (41) und (23) in (15) ein und erhält die für kleine $|\tau|$ brauchbare Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{z(\tau)}{C} = & \frac{1}{\tau^2} - (4 \cos \sigma_0 + 2b_1) \frac{1}{\tau} + (-4ib_1 \cos \sigma_0 + 2ib_2 + b_1^2) \ln \tau \\ & + [2ib_3 + 2b_1 b_2 - \tfrac{1}{3} ib_1^3 - 2 \cos \sigma_0 (b_1^2 + 2ib_2 + 2)] \tau + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

¹² Vgl. auch C. SCHMIEDEN, Fußnote¹² von Seite 597. Dort sind jedoch einige Rechenfehler unterlaufen.

Daraus folgt für reelle $\tau = \epsilon$ die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{C} &= \frac{1}{\epsilon^2} - 4 \cos \sigma_0 \cdot \frac{1}{\epsilon} + b_1^2 \ln |\epsilon| + (4b_1 \cos \sigma_0 - b_2) \operatorname{arc}(\epsilon) + \dots \\ \frac{y}{C} &= -2b_1 \frac{1}{\epsilon} + (4b_1 \cos \sigma_0 - 2b_2) \ln \left| \frac{1}{\epsilon} \right| + b_1^2 \operatorname{arc}(\epsilon) \\ &\quad + (2b_3 - \frac{1}{3} b_1^3 - 4 \cos \sigma_0 b_2) \epsilon + \dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

der freien Stromlinien. Positives ϵ ergibt die untere, negatives die obere freie Stromlinie. Ist hier $b_1 \neq 0$, so wird

$$\frac{y}{C} \approx \pm 2b_1 \sqrt{\frac{x}{C}}, \quad (44)$$

wobei das positive Zeichen für die obere, das negative für die untere freie Linie gilt. Der Fall $b_1 > 0$ gibt also die bekannte, parabolisch zunehmende Totwasserbreite, der Fall $b_1 < 0$ sicher eine Überschneidung der freien Stromlinien, also eine nur zur Hälfte realisierbare Strömung.

Ist $b_1 = 0$ und $b_2 \neq 0$, dann folgt analog zu (44)

$$\frac{y}{C} \approx -b_2 \ln \frac{x}{C}, \quad (45)$$

die freien Stromlinien haben die logarithmische Form, die bei Zirkulationsströmungen auftritt. Nach (43) läßt der Übergang von $\tau = -\epsilon_1$ auf $\tau = +\epsilon_1$ bei $b_1 = 0$ den zugehörigen Wert y bis auf Glieder, die mit ϵ_1 gegen Null gehen, konstant, während x im wesentlichen um $8 \cos \sigma_0 \cdot (1/\epsilon)$ abnimmt. Die waagrechte Entfernung der zu gleichen Beträgen von ϵ gehörenden Punkte der oberen und unteren freien Stromlinie ist also (für kleine ϵ , d.h. große x) proportional $1/\epsilon$. Nach (45) geht außerdem die Steigung dieser Linien mit $1/x$, also nach (43) mit ϵ^2 gegen Null, sodaß die Totwasserbreite in diesem Fall gegen Null geht, und zwar bei positivem $\cos \sigma_0$ von positiven Werten her.

Ist schließlich $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$, dann wird

$$\frac{y}{C} \approx \mp 2b_3 \sqrt{\frac{C}{x}}. \quad (46)$$

Die freien Stromlinien haben eine waagrechte Asymptote, die Totwasserbreite geht gegen Null, und zwar bei negativem b_3 von positiven Werten her. Positives b_3 würde wieder zu Überschneidungen führen.

Man kann natürlich noch mehr von den ersten Koeffizienten verschwindend annehmen. Dies gibt jedoch nur noch stärker konvergierende Totwasserformen. Außer ihnen existieren nur die Formen (44)–(46), insbesondere gibt es keine Strömungen mit endlicher, nicht verschwindender asymptotischer Totwasserbreite.

Die Größe oder das Verschwinden der ersten Koeffizienten in der Entwicklung (41) hängt mit der Form von Ω in der Nähe von $\zeta = 0$ zusammen, sodaß man die asymptotischen Formen der freien Stromlinien auch wieder direkt beurteilen kann. So ist beispielsweise dann und nur dann $b_1 > 0$, wenn die Abbildung bei $\tau = 0$ konform ist und beim Übergang von τ nach ζ Drehung um 90° im mathematisch negativen Sinn erfolgt, etwa wie bei den früheren Abbildungen 4 und 5. Ist $b_1 = 0$, $b_2 > 0$, dann entsteht die in Abb. 7a skizzierte Form von Ω und umgekehrt, für $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 < 0$ ist in Abb. 7b ein Beispiel skizziert.

ABB. 7. Beispiele für Ω -Bereiche bei speziellen Formen der Gleichung (41) sowie die entstehenden $\mathcal{Z}$ -Konfigurationen.

Mit diesen Skizzen ist aber auch wieder die Existenz von Strömungen mit solchen asymptotischen Formen gezeigt. Darüber hinaus kann man auch bei diesen Strömungen noch beliebig viele Wendepunkte auf den freien Stromlinien konstruieren und so die Wendepunktsätze mit den asymptotischen Formen verbinden. So erhält man Sätze darüber, daß beispielsweise im Fall $b_1 = b_2 = 0$ zu n Wendepunkten einer freien Stromlinie schon mindestens n Extremwerte von θ längs der entsprechenden Halbkontur gehören.

Insgesamt ist gezeigt, welche Vielfalt von Strömungen durch die beschriebene Lösung des unbestimmten Problems erfaßt wird, und wie viel man allein auf Grund der Form von Ω über den Verlauf von θ längs Kontur und freien Stromlinien sowie über das asymptotische Verhalten der freien Stromlinien aussagen kann. Um nicht ins Uferlose zu geraten, greifen wir für die weiteren Untersuchungen einige besonders wichtige Strömungsformen heraus und beschränken uns auf diese.

Die erste Beschränkung ist die auf zur x -Achse symmetrische Konturen und Strömungen. Solche entstehen, wie man sich mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips überzeugt, dann und nur dann, wenn der Bereich Ω symmetrisch zur reellen Achse ist. In diesem Fall kommt der Punkt S bei der konformen Abbildung $\zeta(\tau)$ nach $\tau_s = i$, es wird $\sigma_0 = \frac{1}{2}\pi$. Das Bild der reellen ζ -Achse ist die imaginäre τ -Achse, in der Entwicklung (41) verschwinden die b_n mit geradem Index. Da nun alle in z -, w -, ζ - und τ -Ebene vorkommenden Bereiche Symmetriegeraden haben, genügt es, immer nur die Hälfte dieser Bereiche zu betrachten. Wir nehmen die obere w -Halbebene $\mathfrak{B}_1$ und die ihr entsprechenden oberen Halbbereiche $\mathfrak{Z}_1$ und Ω_1 in z - und ζ -Ebene, wozu in der τ -Ebene der im zweiten Quadranten liegende Teil $\mathfrak{T}_1$ des Einheitskreises gehört. Die Symmetriegerade wird überall mit ν bezeichnet.

Im Rahmen dieser ersten Beschränkung sei noch auf eine Strömungsform hingewiesen, deren Existenz vielleicht überrascht. Sie hat längs der Staustromlinie ν Extremwerte des Geschwindigkeitsbetrages. Um dies zu erreichen, braucht man nur den Halbbereich Ω_1 entsprechend der Skizze in Abb. 8 zu wählen. Auch hier kann die Umschlingung natürlich beliebig oft wiederholt werden.

ABB. 8. Beispiel einer Strömung mit Geschwindigkeits-Extremwerten auf der Staustromlinie ν .

Um auch solche Komplikationen ebenso wie die beliebig vielen Wendepunkte der freien Stromlinien auszuschließen, folgt noch eine zweite Beschränkung, diejenige auf Konturen ohne (relatives) Minimum von θ längs w_1 . Zudem soll noch $\gamma > 0$ sein.

Es wurde schon abgeleitet, daß bei solchen Konturen die freien Stromlinien höchstens einen Wendepunkt haben können. Wir unterscheiden und beschreiben die bei ihnen möglichen Strömungsformen noch etwas genauer. Es ist dabei unwesentlich, wenn wir in der Ablösungsstelle wieder nur die in der Entwicklung (29) enthaltenen Fälle berücksichtigen.

In Abb. 9 sind fünf Strömungsformen skizziert, die offenbar alle bei Konturen ohne Minimum von θ längs w_1 vorkommen können. Sie unterscheiden sich haupt-

sächlich durch die mit E bezeichnete Nullstelle von $\zeta'(\tau)$ längs des von $\tau_{A_1} = -1$ jeweils geradlinig über $\tau_B = 0$ nach $\tau_s = i$ gehenden Weges $\mathfrak{G}$, zu dem Anfangs- und Endpunkt nicht gehören sollen.

I. Im Beispiel I ist längs $\mathfrak{G}$ keine Nullstelle von $\zeta'(\tau)$ vorhanden, und es ist $\beta < \pi$. Längs des ganzen Weges, also auch bei $\tau_B = 0$, findet beim Übergang von τ nach ζ Drehung um -90° statt, also ist $i\zeta'(\tau) > 0$ und speziell in (41) $b_1 > 0$. Nach (27) und (30) und den daraus gezogenen Folgerungen hat die freie Stromlinie in der Ablösungsstelle unendliche Krümmung zur Kontur hin, und nach (44) nimmt die Totwasserbreite parabolisch zu.

II. Hier hat $\zeta'(\tau)$ auf $\mathfrak{G}$ ebenfalls keine Nullstelle, aber es ist $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$. Die freie Stromlinie bekommt in der Ablösungsstelle endliche Krümmung. Alle anderen Merkmale sind gleich wie bei I.

III. Auf der negativ reellen Achse liegt eine einfache Nullstelle E von $\zeta'(\tau)$ (Winkelverdoppelung), und es ist $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$. Das Bild des Punktes E in der z -Ebene ist ein Wendepunkt der freien Stromlinie. Die Totwasserbreite nimmt immer

ABB. 9. Die an Konturen ohne Minimum von θ längs ω_1 möglichen grundsätzlichen Strömungsformen.

noch parabolisch zu, die freie Stromlinie hat in der Ablösungsstelle unendliche Krümmung von der Kontur weg, da bei $\tau_{A_1} = -1$ jetzt (27) erfüllt ist.

IV. Die Nullstelle von $\zeta'(\tau)$ liegt bei $\tau_B = 0$ und ist von 2. Ordnung, außerdem ist $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$. Es ist jetzt $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 < 0$, wie in Abb. 7b. Das Totwasser konvergiert nach (46), die Krümmung der freien Stromlinien geht von der Kontur weg.

V. Die Nullstelle von $\zeta'(\tau)$ ist wieder einfach und liegt auf der imaginären Achse, es bleibt $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$. Das Bild des Punktes E in der z -Ebene stellt ein Maximum des Geschwindigkeitsbetrages längs der Staustromlinie dar. Die unendliche Krümmung der freien Stromlinie in der Ablösungsstelle geht von der Kontur weg. Da jetzt aber die Drehung bei $\tau_B = 0$ um $+90^\circ$ erfolgt, ist in (41) $b_1 < 0$, die freien Stromlinien überschneiden sich, wenn man die ganze Strömung betrachtet. Diese Form hat hier nur theoretische Bedeutung, wird aber später wieder in den Vordergrund rücken.

Diese fünf Strömungsformen enthalten alles, was an Konturen ohne Minimum von θ vorkommen kann. Alle Ω -Formen, die nur eine einfache, höchstens bei $\tau = 0$ doppelte Nullstelle von $\zeta'(\tau)$ längs $\mathfrak{G}$ haben und deren Winkel β den gestellten Forderungen genügt, lassen sich einordnen. Die Formen mit mehr oder höheren Nullstellen von $\zeta'(\tau)$ längs $\mathfrak{G}$ oder größeren Winkeln β haben notwendig ein Minimum von θ längs ω_1 . Also können um Konturen ohne ein solches Minimum nur die Strömungstypen I–V vorkommen, und wie beschränken uns künftig auf diese.

Abschließend ist zu sagen, daß die gegebene Lösung des unbestimmten Problems auf einfache Art und Weise einen Überblick über die groben Formen der erfaßbaren Strömungen gibt. Zu quantitativen Ergebnissen benötigt man natürlich die Abbildungsfunktion $\zeta(\tau)$ explizit, von der bisher im wesentlichen nur die Existenz benützt wurde. Es ist natürlich für die praktische Berechnung nur in einfachen Fällen (eckige Konturen) möglich, die Funktion $\zeta(\tau)$ oder etwa die b_n in (41) durch die Durchführung der konformen Abbildung zu gewinnen. Man wird im allgemeinen den umgekehrten Weg gehen und die b_n so wählen, daß ein brauchbarer Bereich Ω entsteht. Dies läuft im wesentlichen auf die Levi-Civitasche Lösung des unbestimmten Problems hinaus, da man die Potenzreihe (41) auch in der Form (14) schreiben kann, wobei die a_n für gleiche Funktionen $\zeta(\tau)$ mit den b_n durch

$$a_n = \frac{2\gamma}{n} \sin n\sigma_0 - b_n \quad (47)$$

verknüpft sind. Für die Wahl der a_n oder b_n kommt nur noch die Bedingung $B_1)$ der Schlichtheit des Bereichs $\mathfrak{Z}$ dazu. Die durchzuführenden Rechnungen bleiben formal erhalten. Dieses Vorgehen wird daher erst bei der in Ziff. 4. und 5. folgenden Verallgemeinerung besprochen, die die Helmholtzströmung immer als Spezialfall enthält.

4. Die Verallgemeinerung der Helmholtz-Strömung, unbestimmtes Problem, symmetrischer Fall. Wir zielen nun auf Strömungen ab, in deren Totwasser nicht mehr der statische Druck p_∞ herrscht, auf deren freien Stromlinien dann der Betrag der konstanten Geschwindigkeit nicht mehr $v_\infty = 1$ ist. Bei ihnen liegt das Bild der freien Stromlinien in der ζ -Ebene nicht mehr auf der imaginären Achse, sondern auf einer zu ihr parallelen Geraden. Solche Strömungen lassen sich nach den vorangehenden Untersuchungen sehr einfach gewinnen.

Wir gehen aus von einem im Sinn der Bedingungen 1)–5) von Seite 600 zulässigen symmetrischen Bereich Ω und der zu ihm gehörenden Abbildung $\zeta(\tau)$. Wir wählen auf der imaginären τ -Achse einen Punkt D mit $\tau_D = ir$, $0 \leq r < 1$. Sein Bild in Ω liegt auf der reellen Achse bei $\zeta_D = \ln v_1$. Wir verschieben nun den Bereich Ω um die Strecke $\ln v_1$ in waagrechter Richtung, sodaß $\zeta_D = 0$ wird (Abb. 10). Der verschobene Bereich sei Ω' , seine Ränder werden

ABB. 10. Die Parallelverschiebung des Ω -Bereichs und die Änderungen in τ -und w -Ebene.

zur Unterscheidung ebenfalls mit einem Strich versehen. Ω' sei längs der reellen Achse von B and D aufgeschlitzt, an Stelle des einen Punktes B treten die beiden, auf verschiedenen Ufern liegenden Punkte B_1 und B_2 . Die Abbildung $\zeta(\tau)$ des τ -Halbkreises $\mathfrak{T}$ auf Ω konnte in der Form (41) dargestellt werden, wo im symmetrischen Fall die b_n mit geradem Index verschwanden. Also wird die neue Abbildung des ebenfalls von B nach D aufgeschlitzten τ -Halbkreises $\mathfrak{T}'$ auf Ω' mit den gleichen, reellen b_{2n+1}

$$\zeta(\tau) = i \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \tau^{2n+1} - \ln v_1, \quad (48)$$

wo

$$\zeta(ir) = 0 \quad (49)$$

sein muß, also v_1 nach

$$v_1 = \exp \left[- \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} (-1)^n r^{2n+1} \right] \quad (50)$$

zu berechnen ist.

Der τ -Halbkreis $\mathfrak{T}$ wird wieder auf die aufgeschlitzte w -Ebene $\mathfrak{W}$ abgebildet, aber nicht mehr mittels (13), sondern mittels

$$w = C \frac{(1 + \tau^2)^2}{(\tau^2 + r^2)(r^2 \tau^2 + 1)}. \quad (51)$$

Damit wird erreicht, daß der Punkt D nach $w_D = \infty$ fällt. Für $r = 0$ ist (51) identisch mit (13), wenn dort noch die Symmetriebedingung $\sigma_0 = \frac{1}{2}\pi$ eingeführt wird. Mit $r = 0$ wird aber nach (50) auch $v_1 = 1 = v_\infty$, also ist dieser Spezialfall die in Ziff. 3 behandelte Abbildung, die künftig immer mit enthalten ist. Zu jeder solchen Ausgangsabbildung kommt noch eine einparametrische Schar von weiteren Abbildungen mit $0 < r < 1$.

Genau wie in Ziff. 3. zeigt man jetzt mittels (16)–(18), daß die Gleichungen (49) und (51) in Verbindung mit (15) für $r > 0$ das in Abb. 11 skizzierte Bild

ABB. 11. Das entstehende Bild in der z -Ebene.

$\mathfrak{Z}'$ in der z -Ebene ergeben. Dabei sind die Bedingungen (2)–(4) erfüllt, an Stelle von (5) gilt längs endlich langen Linien λ'_1, λ'_2

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = \frac{1}{v_1}. \quad (52)$$

An diese schließen sich mit stetiger Tangente waagrechte Halbgeraden g_1, g_2 an, längs derer $|dz/dw|$ nach dem im Unendlichen vorhandenen Wert 1 geht.

Die Umkehrung der Abbildungsfunktion $z(w)$ ist wieder das komplexe Potential einer Strömung der z -Ebene. Auch bei ihr können die Linien λ'_1, λ'_2 als freie Strahlgrenzen aufgefaßt werden, jedoch herrscht in dem von ihnen begrenzten Totwasser nicht mehr der statische Druck p_∞ , sondern nach (10) ein Druck

$$p_1 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(1 - v_1^2). \quad (53)$$

Die Geraden g_1, g_2 , die sich an die λ_1, λ_2 anschließen, können nicht mehr als

freie Grenzen angesehen werden, man muß sie sich als feste Wände denken, da sich längs derselben der Geschwindigkeitsbetrag ändert.

Über die physikalische Bedeutung der beschriebenen Strömungsform wird in Ziff. 8. und 9. berichtet. Zunächst wird nur im Hinblick auf die physikalischen Anwendungen eine möglichst umfassende Theorie der neuen Strömungsform entwickelt.

Der definierte Bereich Ω' ist wieder die Lösung des unbestimmten Problems. Wegen der nahen Verwandtschaft mit der in der vorhergehenden Ziffer angegebenen Lösung des unbestimmten Problems der Helmholtzströmung gibt sie sehr einfach eine Übersicht über die erfaßbaren Strömungsformen.

Bei dem waagrechten Verschieben des Bereichs Ω bleibt in jedem Punkt $\Im(\zeta)$ erhalten. Insbesondere werden beim Durchlaufen der Ränder ω'_1 und λ'_1 des verschobenen Bereichs Ω' die gleichen Steigungswinkel θ in der gleichen Reihenfolge erreicht wie beim Durchlaufen von ω_1 und λ_1 beim Ausgangsbereich. Damit bleiben alle Folgerungen auch für die verallgemeinerte Helmholtz-Strömung erhalten, die in Ziff. 3. aus dem Verlauf von θ längs ω_1 und λ_1 gezogen wurden. Dies ist die Schlichtheit des Bereichs $\mathcal{G}'$ in dem gleichen Sinn wie bisher, die Wendepunktsätze, die Existenz der komplizierten Strömungen und die Beschränkung auf die Typen I–V von Seiten 611–612 bei Konturen ohne Minimum von θ längs ω_1 .

Darüberhinaus bleiben auch die Aussagen über die Krümmung der freien Stromlinien und der Kontur in der Ablösungsstelle erhalten. Bei ihrer Herleitung wurde von $\zeta(\tau)$ nur die Ableitung $\zeta'(\tau)$ benützt, die sich bei der Parallelverschiebung nicht ändert, und von $w(\tau)$ ging nur die Nullstelle von $dw/d\tau$ bei $\tau = \pm 1$ ein, die in (51) ebenso wie in (13) enthalten ist.

Zu diesen allgemeinen Aussagen hin leiten wir noch einige Einzelheiten ab. Dabei verwenden wir die Darstellung (48) und denken uns die b_n so bestimmt, daß ein zulässiger Bereich Ω entsteht. Dies entspricht dem Levi-Civitaschen Vorgehen beim unbestimmten Problem.

Man kann die gesamte Strömung der z -Ebene durch die Auswertung des Integrals (15) mit (48) und (51) gewinnen, insbesondere auch die zu einer Folge von b_n gehörende Kontur. Darauf gehen wir jedoch nicht ein, da in der nächsten Ziffer die b_n so bestimmt werden, daß eine vorgegebene Kontur entsteht. Wir geben nur einige andere Größen an, die sich aus den b_n leicht ableiten lassen.

Die endliche Länge s der freien Stromlinien läßt sich angeben, weil längs derselben

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = v_1 \quad (54)$$

konstant ist. Die w -Werte am Anfang und am Ende der freien Stromlinien sind nach (48) leicht zu berechnen. Damit wird

$$s = \frac{1}{v_1} [w(0) - w(1)] = \frac{C}{v_1} \frac{(1 - r^2)^2}{r^2(1 + r^2)^2}, \quad (55)$$

worin v_1 aus (50) zu entnehmen ist.

Der Abstand c der beiden Geraden g_1, g_2 ist

$$ic = \int_{\mathfrak{C}_1} e^{\zeta} \frac{dw}{d\tau} d\tau \quad (56)$$

wo der Integrationsweg $\mathfrak{C}_1$ beispielsweise von $\tau_{B_2} = 0$ über $\lambda'_2, \omega'_2, \omega'_1$ und λ'_1 zurück nach $\tau_{B_1} = 0$ führen kann. Dies entspricht in der z -Ebene einem Weg vom Ende der unteren freien Stromlinie um die Kontur herum bis zum Ende der oberen freien Stromlinie. Da der Weg $\mathfrak{C}_1$ in der τ -Ebene geschlossen ist und keine Singularitäten kreuzt, kann man den Residuensatz anwenden. Die einzige Singularität des Integranden im Innern von $\mathfrak{C}_1$ liegt bei $\tau_D = ir$. Dort hat

$$\frac{dw}{d\tau} = -2C(1 - r^2)^2 \frac{(1 - \tau^4)\tau}{(\tau + ir)^2(\tau - ir)^2(r^2\tau^2 + 1)^2} \quad (57)$$

einen Pol zweiter Ordnung und, wie man leicht nachrechnet, kein Glied mit $(\tau - ir)^{-1}$. Also wird das Residuum des Integranden bei $\tau = ir$

$$\text{Res } (\tau = ir) = \left[(\tau - ir)^2 \frac{dw}{d\tau} \right]_{ir} \cdot \frac{d}{d\tau} (e^{\zeta(\tau)})_{ir}. \quad (58)$$

Dabei kann man außer (57) noch benützen, daß $e^{\zeta(ir)} = 1$ ist, also

$$\frac{d}{d\tau} (e^{\zeta(\tau)})_{ir} = \zeta'(ir) \quad (59)$$

wird, womit aus (58)

$$\text{Res } (\tau = ir) = \frac{i}{2} C \frac{1 - r^2}{r(1 + r^2)} \zeta'(ir) \quad (60)$$

folgt. Das ganze Integral (56) liefert dann

$$c = \pi C \frac{1 - r^2}{r(1 + r^2)} i \zeta'(ir) \quad (61)$$

und mit (48)

$$c = -\pi C \frac{1 - r^2}{r(1 + r^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) b_{2n+1} r^{2n}. \quad (62)$$

Mit der "endlichen Totwasserbreite" c kann man leicht auch den Widerstand berechnen, den die Kontur ω' erfährt. Dazu faßt man die gesamte Linie $g_2, \lambda_2, \omega, \lambda_1, g_1$ als einen unendlichen Halbkörper auf. Der bekannte Satz von der Widerstandslosigkeit eines solchen Halbkörpers¹ besagt aber genauer nichts anderes, als daß die resultierende Druckkraft auf die Oberfläche eines Halb-

¹ L. PRANDTL — O. TETJENS, *Hydro- und Aeromechanik*, Band 2. Berlin 1931, S. 135.

körpers in Richtung der Anströmgeschwindigkeit geht und dem Betrag nach

$$W_H = cp_\infty \quad (63)$$

ist. Dazu kommt noch die Kraft, die vom Totwasser her auf die Wand des Halbkörpers ausgeübt wird, nämlich

$$W_T = -cp_1. \quad (64)$$

Die Summe von beiden Kräften ist der Widerstand W der Kontur, da sich die Anteile von W_H und W_T längs der freien Stromlinien wegen der dort vorhandenen Stetigkeit des Druckes aufheben, und die Geraden g_1 , g_2 keinen Beitrag liefern. Es wird also

$$W = c(p_\infty - p_1) \quad (65)$$

und mit (53)

$$W = \frac{1}{2}\rho c(v_1^2 - 1). \quad (66)$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\lim_{r \rightarrow 0} W = \pi C b_1^2 \quad (67)$$

ist, in Übereinstimmung mit dem von Levi-Civita angegebenen Wert.

Geht man also aus von einem Satz b_{2n+1} und einem Wert r , dann kann man dazu v_1 , s , c und W berechnen. Ebenso wie in Ziff. 3 lassen sich aber auch die jetzt berechneten Größen schon auf Grund der Form von Ω' qualitativ beurteilen. Dies gelingt vor allem mit Hilfe der Linie ν der ζ -Ebene. Sie läßt einerseits erkennen, ob mit wachsendem r ein Verschieben des Ausgangsbereichs Ω nach links oder rechts in Frage kommt, ob also $v_1 \gtrless 1$ sein wird. Außerdem ist festzustellen, ob beim Übergang von τ_D nach ζ_D die Drehung in mathematisch negativem oder positivem Sinn erfolgt, ob also $i\zeta'(ir)$ und damit nach (61) c positiv oder negativ ist. Mit v_1 und c ist aber nach (66) auch W bekannt.

Diese Beurteilungsmöglichkeit wird nun noch zu einer genaueren Diskussion der aus den Typen I–V von Seiten 611–612 abzuleitenden Strömungsformen benützt, die leicht auf alle anderen Ausgangsformen ausgedehnt werden kann.

Die Formen I–IV verhalten sich bei der Verallgemeinerung im wesentlichen gleich. Wie aus Abb. 9 hervorgeht, kommt bei ihnen nur ein Verschieben nach links in Frage, es ist für alle $r > 0$ sicher $v_1 > 1$. Ebenso ist $\zeta'(ir)$ immer negativ imaginär, sodaß c nach (61) und W nach (66) positiv sind.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse, wenn man von einer Strömung der Form V ausgeht. Hier wird bei kleinen r -Werten erst D zwischen B_1 und E liegen, also Ω' nach rechts verschoben und $v_1 < 1$ sein. Beim Übergang von $\tau_D = ir$ nach $\zeta_D = 0$ findet Drehung in mathematisch positivem Sinn statt, sodaß $i\zeta'(ir)$ negativ wird, und damit c wegen (61). Dies liegt nahe, da sich hier

auch für $r = 0$ die freien Stromlinien überschneiden, wenn man nicht nur die halbe Strömung betrachtet.

Sodann gibt es sicher einen Wert r , für den D und E zusammenfallen. Im Punkt E ist aber $\zeta'(ir) = 0$, es verschwindet auch c und W . Dabei muß immer noch $v_1 < 1$ sein. Die Geraden g_1, g_2 in der z -Ebene fallen zusammen, sie müssen nicht mehr als starre Wände aufgefaßt werden. Es entstehen die Strömungen mit endlichem Totwasser, die Kolscher² eingehend untersucht hat.

Läßt man r wieder ein wenig wachsen, dann wird $i\zeta'(ir)$ und damit c wieder positiv, während immer noch $v_1 < 1$ bleibt. Nach (66) wird der Widerstand negativ, die Kontur erfährt einen Schub nach vorn.

Als nächste Besonderheit gibt es einen Wert r , für den wieder $v_1 = 1$ wird, der Punkt E liegt bei B_1 , nur auf der gegenüberliegenden Seite des Schlitzes. Hier ist c positiv, während W nach (66) verschwindet. Wäre auch noch $\zeta'(ir) = 0$, wie es bei den Formen I—V zwar nicht, im allgemeinen aber sehr wohl sein kann, dann entstünden Strömungen mit dem statischen Druck p_∞ im Totwasser und endlich langen freien Stromlinien.

Erst für noch größere r -Werte entstehen solche Strömungen, wie sie bei den Typen I—IV allein möglich sind, nämlich mit $v_1 > 1$ und positiven c und W . Das Bild des Punktes E in der z -Ebene ist ein Geschwindigkeitsmaximum auf der Geraden g_1 , ebenso wie bei den beiden vorhergehenden Lagen des Punktes D in der ζ -Ebene.

Der Grenzfall $r \rightarrow 1$ ist bei allen fünf Ausgangsformen, ja sogar allgemein bei $\gamma > 0$, der gleiche. Da das Bild des Punktes $\tau_s = i$ nach $\zeta_s = \infty$ fällt, muß für $r \rightarrow 1$ der Ω' -Bereich immer weiter nach links verschoben werden, so weit, daß schließlich nur noch ein Ω' -Bereich in Erscheinung tritt, der vorher der Umgebung des Staupunktes entsprach. Hier hatten die Linien ω_1, ω_2 waagrechte

ABB. 12. Der Grenzfall $r \rightarrow 1$ in ζ - und z -Ebene.

Asymptoten, die jetzt allein noch maßgeblich sind. Alles andere ist so weit nach links gerückt, daß es bei der Abbildung auf die z -Ebene durch den Faktor e^f im Integranden von (15) beliebig klein wird. Was übrig bleibt, ist gerade der Hodo-graph zu der Strömung um einen eckigen Halbkörper (Abb. 12).

Insgesamt existiert zu jeder Helmholtz-Strömung eine einparametrische Schar

² M. KOLSCHER, *Unstetige Strömungen mit endlichem Totwasser*. Luftfahrt-Forschung **17** (1940), S. 4.

von verallgemeinerten Strömungen, und diese Schar vermittelt (wenn $\gamma > 0$ ist) einen stetigen Übergang von der Helmholtz-Strömung zu einer Strömung um den eckigen Halbkörper von Abb. 12.

Man konnte bei der Parallelverschiebung von Ω bisher vielleicht vermuten, daß mit θ auch die gesamte Kontur erhalten bleibt. Der soeben durchgeführte Grenzübergang zeigt, daß dies nur bei geradlinigen Konturen möglich ist. Wir werden in der nächsten Ziffer noch genauer sehen, daß der Wert r einen Einfluß auf den Betrag der Konturkrümmung hat, also eine gekrümmte Kontur sich bei der Verschiebung ihres Ω -Bereichs verformt. Nur das Vorzeichen der Krümmung bleibt erhalten und damit die "grobe Form" der Kontur sowie die damit zusammenhängenden Eigenschaften und Sätze. Geradlinige Konturen mit überall verschwindender Krümmung bleiben vollständig erhalten, was sich bei der Berechnung von solchen Beispielen verwenden läßt.

5. Die Verallgemeinerung der Helmholtz-Strömung, bestimmtes Problem, symmetrischer Fall. Im Hinblick auf die physikalischen Anwendungen der gegebenen Strömungsform formulieren wir das bestimmte Problem wie folgt. Wie muß die Lösung des unbestimmten Problems beschaffen sein, damit in der z -Ebene die entstehende Linie ω' identisch ist mit einer vorgegebenen Kontur $\mathfrak{C}'$ oder einem Teil derselben, und die Geschwindigkeit v_1 einen vorgegebenen Wert annimmt. Die zweite Bedingung ist notwendig, damit über den Totwasserdruck p_1 verfügt werden kann.

Bei der folgenden Behandlung des so definierten bestimmten Problems geht es weniger um Existenzbeweise. Sie sind genau so anzugreifen wie bei den symmetrischen Kanalströmungen¹. Die nahe Verwandtschaft mit diesen wird in Ziff. 7 gezeigt werden. Wir wollen vielmehr versuchen, Strömungen um konkrete, vorgegebene Konturen bis zum numerischen Ergebnis zu berechnen. Dabei dient als Grundlage die Konturkrümmung $\kappa = d\theta/dl$ in Abhängigkeit vom Steigungswinkel θ , wie bei den meisten solchen Arbeiten. Die Funktion $\kappa(\theta)$ ist am einfachsten zu berechnen, wenn die Kontur $\mathfrak{C}'$ in natürlichen Koordinaten $\theta(l)$ vorgegeben ist. Man bildet dann $d\theta/dl$ und eliminiert l . Andererseits ist auch aus der Funktion $\kappa(\theta)$ mittels

$$l = \int \frac{d\theta}{\kappa(\theta)} \quad (68)$$

wenigstens die Umkehrung von $\theta(l)$ leicht zu gewinnen. Die Bogenlänge l wird so eingeführt, daß wachsendem l in der τ -Ebene wachsendes σ entspricht, wenn längs des τ -Einheitskreises

$$\tau = e^{i\sigma} \quad (69)$$

gesetzt wird. Der Steigungswinkel θ bleibt so orientiert, daß die ihn bestimmende Tangente bei der Abbildung $w(z)$ in Richtung der positiv reellen w -Achse

¹ J. KRAVCHENKO, Fußnote¹⁶ von Seite 598.

zeigt. Er springt also im Staupunkt S um $\gamma\pi$, auch wenn dort mit $\gamma = 1$ stetige Tangente vorhanden ist.

Um die Funktion $\kappa(\theta)$ mit der Kontur ω einer verallgemeinerten Totwasserströmung in Verbindung zu bringen, gehen wir aus von der Verallgemeinerung des Levi-Civitaschen Ansatzes (14), der mit den Symmetrieforderungen $\sigma_0 = \frac{1}{2}\pi$ und $b_{2n} = 0$

$$\zeta(\tau) = \gamma \ln \frac{i + \tau}{i - \tau} + i \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \tau^{2n+1} - \ln v_1 \quad (70)$$

lautet. Seine Koeffizienten a_{2n+1} sind nach (47) mit den bisher verwendeten Größen b_{2n+1} verknüpft. Die a_{2n+1} und γ seien so gewählt, daß durch (70) der τ -Halbkreis $\mathfrak{T}'$ auf einen zulässigen Bereich Ω' abgebildet wird. Dann berechnet sich längs des Kreisbogens mit (69)

$$\theta(\sigma) = \pm \frac{1}{2} \gamma \pi + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos(2n+1)\sigma \quad (71)$$

und

$$e^{-\tau} = |e^{-\zeta}| = \frac{v_1 \cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \exp \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\sigma. \quad (72)$$

Die Konturkrümmung κ folgt aus der zu (20) analogen Gleichung

$$\kappa = \frac{d\theta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\phi} \cdot e^{-\tau}. \quad (73)$$

Darin ist $\phi(\sigma)$ mit (51) und (69) zu berechnen. Mit (71) und (72) wird dann

$$\begin{aligned} \kappa = - \frac{1}{C' f(r, \sigma)} \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\sigma \right] \\ \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} \sin(2n+1)\sigma, \end{aligned} \quad (74)$$

wobei

$$C' = \frac{8C(1 - r^2)^2}{v_1} \quad (75)$$

und

$$f(r, \sigma) = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\sigma}{(1 + 2r^2 \cos 2\sigma + r^4)^2} \left(\frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \right)^\gamma \quad (76)$$

gesetzt wurde. Die Konturkrümmungsfunktion $\kappa(\theta)$ wird durch (71) und (74) mit dem Parameter σ dargestellt. Die Geschwindigkeit v_1 wird analog zu (50)

$$v_1 = \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \exp \left[- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} r^{2n+1} \right] \quad (77)$$

Das formulierte bestimmte Problem besteht nun darin, r und die a_{2n+1} so festzulegen, daß (71) und (74) eine vorgegebene Funktion $\kappa(\theta)$ darstellen und gleichzeitig (77) einen vorgegebenen Wert v_1 liefert.

Dieses Problem ist schon für den Helmholtzschen Fall $r = 0$, $v_1 = 1$ bisher nicht exakt gelöst worden, nicht einmal bei dem einfachen Beispiel des Kreiszylinders, bei dem $\kappa = \text{const}$ ist. Dagegen existieren dort einige Näherungslösungen. Schultze² führte nach Quarleri³ die Gleichung (74) über in eine nichtlineare Integralgleichung, ersetzte sie näherungsweise durch ein Gleichungssystem und konnte damit neun Koeffizienten näherungsweise bestimmen. Schmieden⁴ versuchte erstmals, die Gleichung (74) in endlich vielen Punkten zu erfüllen. Später gab der gleiche Verfasser noch die Möglichkeit einer Iteration von (74) an⁵, mit deren Hilfe er ausgezeichnete Ergebnisse erhielt, allerdings mit ziemlichem Rechenaufwand. Dieses Verfahren wollen wir hier auf den Fall $r > 0$ ausdehnen und gleichzeitig den Aufwand verkleinern.

Wir normieren die vorgegebene Konturkrümmungsfunktion

$$\kappa(\theta) = K\kappa_0(\theta) \quad (78)$$

so, daß die durch $\kappa_0(\theta)$ definierte Kontur $\mathfrak{C}'_0$ die Stirnbreite b_0 hat. Die Stirnbreite der zu $\kappa(\theta)$ gehörenden Kontur $\mathfrak{C}'$ ist dann

$$b = \frac{b_0}{K}, \quad (79)$$

da die Krümmung umgekehrt proportional zum Maßstab der z -Ebene ist. Damit schreiben wir (74) in der Form

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_{2n+1} \sin(2n+1)\sigma &= -\lambda\kappa_0(\theta)f(r, \sigma) \\ &\cdot \exp \left[- \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\sigma \right], \quad (80) \\ \lambda &= C'K, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann auf die folgende Weise iteriert werden:

1) Man wählt eine Ausgangsfolge $a_{2n+1}^{(0)}$, deren nach (80) gebildete Fourier-Reihen gleichmäßig konvergieren. Wenn nicht durch vorhandene Nachbarlösungen Anhaltspunkte für eine zweckmäßige Wahl der $a_{2n+1}^{(0)}$ vorhanden sind, wählt man am einfachsten nur einen Wert $a_1^{(0)}$ und alle anderen $a_{2n+1}^{(0)} = 0$.

2) Man bestimmt dazu nach der in r transzendenten Gleichung (77) einen

² J. F. SCHULTZE, *Über unstetige Flüssigkeitsbewegungen um vorgegebene Profile*. Schriften des Math. Inst. u.d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **4** (1939), S. 196.

³ A. QUARLERI, *Sulla teoria della "scia" nei liquidi perfetti. Risoluzione del problema nel caso del cilindro rotondo*. Rend. Circ. Mat. Palermo **57** (1933), S. 196.

⁴ C. SCHMIEDEN, *Die unstetige Strömung um einen Kreiszylinder*. Ing.-Arch. **1** (1929), S. 104.

⁵ Fußnote¹² von Seite 597.

Wert $r^{(0)}$. Er ist zu dem vorgegebenen Wert v_1 meist eindeutig bestimmt. Ergeben sich mehrere Werte $r^{(0)}$, dann entscheidet man sich für einen der möglichen Werte oder wählt eine andere Ausgangsfolge $a_{2n+1}^{(0)}$.

3) Man summiert die Reihen für $T(\sigma)$ und $\theta(\sigma)$ nach (71) und (72) auf und berechnet mit $r^{(0)}$ die rechte Seite von (80). Dabei ist $\kappa_0(\sigma) = \kappa_0\{\theta(\sigma)\}$ als mittelbare Funktion mit Hilfe der vorgegebenen Funktion $\kappa_0(\theta)$ zu berechnen. Der Wert λ kann noch willkürlich festgelegt werden.

4) Man bestimmt durch harmonische Analyse eine Folge $(2n+1)a_{2n+1}^{(1)}$.

5) Man wiederholt den Prozeß mit den $a_{2n+1}^{(1)}$, wobei jedoch das einmal gewählte λ fest bleibt.

Im Fall $r = 0$ erübrigt sich der Teil 2) des Verfahrens, beim Kreiszylinder ist wegen $\kappa_0 \equiv -1$ die Summierung von $\theta(\sigma)$ überflüssig. Über den in der Wahl von λ begründeten Freiheitsgrad wird noch zu sprechen sein. Man kann ihn auch dazu benützen, von vorn herein r zu wählen. Dann wird bei jedem Iterationsschritt $\lambda^{(\mu)}$ so bestimmt, daß die (zu $\lambda^{(\mu)}$ proportionalen) $a_{2n+1}^{(\mu+1)}$ die Gleichung (77) erfüllen. Dies ist an Stelle der Lösung der transzendenten Gleichung für $r^{(\mu)}$ eine einfache direkte Rechnung. Zudem muß bei dieser Anlage des Verfahrens die Funktion $f(r, \sigma)$ nicht jedesmal neu berechnet werden.

Die ganze Iterationsvorschrift besagt zunächst natürlich wenig. Es fragt sich, ob sie praktisch durchführbar ist und konvergiert. Die zweite Frage kann bis jetzt nur am einzelnen Beispiel durch Ausprobieren beantwortet werden. Ein allgemeiner Konvergenzbeweis ist noch nicht gelungen. Es zeigte sich jedoch bei allen durchgerechneten Beispielen, daß Konvergenz eintrat oder wenigstens durch kleine, noch zu besprechende Abänderungen des Verfahrens zu erreichen war. Wir wollen daher die Konvergenz voraussetzen und untersuchen, welche Möglichkeiten das Verfahren bietet.

Unter der Konvergenz des Verfahrens wird man zunächst verstehen, daß sich nach endlich vielen Schritten die $a_{2n+1}^{(\mu)}$ und $r^{(\mu)}$ gegenüber den Größen $a_{2n+1}^{(\mu-1)}$, $r^{(\mu-1)}$ beliebig wenig ändern, wobei dann natürlich auch die Reihen mit den $a_{2n+1}^{(\mu)}$ konvergieren müssen. Wir wollen darüber hinaus verlangen, daß sich im Fall der Konvergenz auch die mit den $a_{2n+1}^{(\mu)}$ und $r^{(\mu)}$ gebildeten Funktionen beliebig wenig ändern.

Wenn eine solche Konvergenz eintritt, dann ergeben die Grenzwerte a_{2n+1} und r (oder λ) der $a_{2n+1}^{(\mu)}$ und $r^{(\mu)}$ (oder $\lambda^{(\mu)}$) in (71) und (74) eingesetzt eine Parameterdarstellung $\theta(\sigma)$, $\kappa(\sigma)$ eines Teils der vorgegebenen Funktion $\kappa(\theta)$, die beim Iterationsprozeß verwendet wurde. Genau so wurde derselbe ja angelegt. Man kann aber nicht von vorn herein erkennen, welcher Teil von $\kappa(\theta)$, also welcher Teil der Kontur $\mathfrak{C}'$ damit erfaßt wird. Die entstehende Funktion $\kappa(\theta)$ muß keineswegs den gleichen Bereich umfassen wie die vorgegebene Variable θ in $\kappa(\theta)$. Es kann sein, daß bei der Iteration θ -Werte auftreten, für welche gar kein κ mehr vorgegeben ist. Dann ist der Iterationsprozeß nicht möglich. Es kann aber auch sein, daß gar nicht der ganze Definitionsbereich von $\kappa(\theta)$ erfüllt wird. Dann berechnet man eine Strömung, deren Ablösung vor den Endpunkten der Kontur $\mathfrak{C}'$ stattfindet. Dann wird die Frage der Schlichtheit eine Rolle spielen.

Es liegt nahe, den Einfluß der willkürlichen Größe λ auf die Ablösungsstelle zu untersuchen. Man könnte bei oberflächlicher Betrachtung zunächst meinen, daß diese Größe gar keinen wesentlichen Einfluß hat, da sie nach (80) und (75) proportional zur Konstanten C von (51) ist, die nach (15) lediglich den Maßstab der z -Ebene reguliert. Nun ist aber die Krümmung der entstehenden Kontur umgekehrt proportional zu diesem Maßstab, sodaß die Größe CK und damit auch λ unabhängig vom Maßstab der z -Ebene ist. Wenn also bei verschiedenen Werten von λ der Iterationsprozeß konvergiert, dann unterscheiden sich die verschiedenen Lösungen nicht nur im Maßstab. Man wird also versuchen, mit λ die Ablösungsstelle zu variieren, am einfachsten dadurch, daß man den Iterationsprozeß entsprechend abändert. Man iteriert λ wieder mit, indem man an Stelle der Wahl von λ bei jedem Iterationsschritt eine Größe $\lambda^{(\mu)}$ so bestimmt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^{(\mu+1)} = \chi_a \quad (81)$$

einen vorgegebenen Wert annimmt. Dies ist ohne weiteres möglich, da diese Größe proportional zu $\lambda^{(\mu)}$ ist. Wenn dann der Iterationsprozeß konvergiert, dann hat die Summe (81) auch in der Grenze den vorgegebenen Wert. Nach (71) ist aber die Steigung θ_1 in der Ablösungsstelle

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\gamma\pi - \chi_a. \quad (82)$$

Diese Größe kann also an Stelle von λ ebenfalls vorbestimmt werden.

Auch auf die Schlichtheit des Bereichs $\mathcal{Z}$ kann während des Iterationsprozesses schon eine gewisse Rücksicht genommen werden. Natürlich gehen von der Kontur jetzt keine Schwierigkeiten mehr aus, da wir sie sinngemäß ohne Doppelpunkte vorgeben oder die Funktion $\kappa_0(\theta)$ entsprechend wählen. Dagegen ist die Ablösungsstelle auch jetzt noch besonders zu untersuchen. Es hat sich Seite 605 schon gezeigt, daß im Fall $-i\zeta'(\pm 1) < 0$ das Totwasser konvex mit unendlicher Krümmung beginnt, dieser Fall also auszuschließen ist, wenn die Kontur $\mathcal{C}'$ in der Ablösungsstelle nicht selbst unendliche Krümmung oder eine scharfe Kante hat. Damit also nicht von vorn herein die Schlichtheit gestört ist, setzen wir

$$-i \frac{d\zeta}{d\tau} \Big|_{\tau=\pm 1} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_{2n+1} \geq 0 \quad (83)$$

voraus, wenn die Ablösungsstelle keine Kante der Kontur ist. Dabei kann das Gleichheitszeichen die endlich gekrümmte Ablösung enthalten, wenn nämlich die dadurch erfaßte Nullstelle von $\zeta'(\tau)$ mindestens von der ersten Ordnung ist. Dies wird später für gewisse Konturen allgemein erreicht werden, bei denen dann das Gleichheitszeichen in (83) immer die endlich gekrümmte Ablösung zur Folge hat. Bestimmt man dort bei jedem Iterationsschritt $\lambda^{(\mu)}$ so, daß (83) mit dem Gleichheitszeichen gilt, dann erhält man im Fall der Konvergenz eine Strömung mit endlich gekrümmter Ablösung. Achtet man bei irgend einer anderen Wahl oder Festlegung von λ darauf, daß bei jedem Schritt (83) mit dem Größerzeichen

gilt, dann ist bei der entstehenden Strömung in der Nähe der Ablösungsstelle die Schlichtheit sicher nicht gestört. Die Schlichtheit im Großen kann nicht von vorn herein erfaßt werden. Sie muß bei jeder einzelnen Lösung nachträglich nachkontrolliert werden.

Zu diesen Varianten des Iterationsverfahrens werden später noch einige andere kommen. Zuvor muß die praktische Durchführbarkeit der Rechnung geklärt werden. Darüber ist in der Arbeit von Schmieden⁶ nichts gesagt. Nach einer mündlichen Aussprache hat Herr Professor Schmieden dort die Fourier-Analyse durchgeführt, indem er die Integrale für die Euler-Fourier-Koeffizienten numerisch auswerten ließ. Dies hat den Vorteil, daß man nicht an eine gewisse Zahl von Koeffizienten gebunden ist, also die Rechnung so lange weiterführen kann, bis die vernachlässigten Größen klein genug sind. Im Hinblick auf den Rechenaufwand ist es jedoch günstiger, die Analyse mit dem Rungeschen Verfahren⁷ durchzuführen. Bei diesem Verfahren berechnet man die zu analysierende Funktion (in unserem Fall die rechte Seite von (80)) im Intervall $-\pi \leq \sigma \leq \pi$ an N äquidistanten Punkten und erhält dazu ein N -gliedriges trigonometrisches Polynom, das an den N Punkten mit der analysierten Funktion übereinstimmt. Die Koeffizienten dieses Polynoms stimmen näherungsweise überein mit den a_n der Fourierreihe der analysierten Funktion, und zwar um so besser, je kleiner die Koeffizienten a_n mit $n > N$ dieser Reihe sind. Das Rungesche Verfahren ist also zur näherungsweisen Bestimmung der Fourier-Koeffizienten geeignet, wenn dieselben mit großem Index genügend klein werden. Dies kann man weitgehend schon an den nach Runge berechneten Koeffizienten beurteilen, wenn N nicht zu klein ist. Die Größe von N bereitet keine Schwierigkeiten, da der Rechenaufwand noch bei $N = 72$ Punkten durchaus erträglich ist.

Eine andere Methode zur harmonischen Analyse dürfte kaum in Frage kommen, solange nicht große Rechengeräte eingesetzt werden können. Also ist das Verfahren abhängig von der Größenordnung der a_{2n+1} . Diese spielt überhaupt bei der Konvergenz der benützten Reihen eine wichtige Rolle, muß also näher untersucht werden. Zunächst ist festzustellen, daß der Ansatz (70) nicht alle durch einen Bereich Ω' definierten Lösungen so erfassen kann, daß die enthaltene Reihe auf dem ganzen Einheitskreis $|\tau| \leq 1$ konvergiert. Entsprechende Gegenbeispiele lassen sich leicht konstruieren. Es sind also sicher für $\kappa(\theta)$ noch zusätzliche Voraussetzungen notwendig, wenn die Reihen von (71) und (72) konvergieren sollen. Sicher ist erforderlich, daß $\kappa(\theta)$ endlich bleibt. Hätte beispielsweise $\theta(\sigma)$ eine Sprungstelle, dann würde sicher die zweite Reihe von (74) divergieren. Aber auch bei endlicher Krümmung ist die Konvergenz noch nicht gut genug. Hat beispielsweise $\kappa(\theta)$ eine Sprungstelle, dann wären im Fall der Konvergenz die a_{2n+1} von der Ordnung $1/(2n+1)^2$ ⁸, was zwar theoretisch genügt, für die praktische Rechnung jedoch noch unbefriedigend ist. Man kann

⁶ Fußnote¹² von Seite 597.

⁷ Genaueres in K. STUMPF, *Grundlagen und Methoden der Periodenforschung*. Berlin 1937.

⁸ H. v. MANGOLDT — K. KNOPP, *Einführung in die höhere Mathematik*, 3. Band. Leipzig 1944, S. 508.

durch weitere Stetigkeitsforderungen die Größenordnung der a_{2n+1} noch weiter verbessern. Wir wollen jedoch sofort den praktisch wichtigsten Fall der analytischen Kontur behandeln. Wir setzen also voraus, daß die vorgegebene Funktion $\kappa(\theta)$ analytisch ist. Für den Staupunktswinkel ist dann $\gamma = 1$.

In diesem Fall kann die Funktion $w(z)$ über ω weg analytisch fortgesetzt werden, also auch $\zeta(\tau)$ über den Einheitskreisbogen mit $0 < \sigma < \pi$. An den Stellen $\tau = \pm 1$ ist dies nicht möglich, wie Seite 607 schon gezeigt wurde. Also bestimmt das Verhalten der Funktion $\zeta(\tau)$ in diesen Punkten die Größenordnung der a_{2n+1} . Die entscheidende Aussage liefert wieder die Größe

$$\frac{d\kappa}{dl} = \frac{d\kappa}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\phi} \cdot e^{-\tau} \quad (84)$$

die sich aus (74) mit Hilfe von (72) und der schon benützten Beziehung für $d\sigma/d\phi$ zu

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{dl} = & -\exp \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin (2n+1)\sigma \right] \frac{(1 + 2r^2 \cos 2\sigma + r^4)^4}{C'^2 (1 + \sin \sigma)^2 \sin^2 \sigma} \\ & \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} [(2n+1) \cos (2n+1)\sigma - \operatorname{ctg} \sigma \sin (2n+1)\sigma] \right. \\ & + \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} \cos (2n+1)\sigma - \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} - \frac{8r^2 \sin 2\sigma}{(1 + 2r^2 \cos 2\sigma + r^4)} \right] \\ & \cdot \left. \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} \sin (2n+1)\sigma \right\} \quad (85) \end{aligned}$$

berechnet. Diese Größe muß wieder bei $\sigma = 0$ endlich bleiben, wenn $\kappa(\theta)$ analytisch sein soll. Bezeichnet man die geschweifte Klammer von (85) mit $G(\sigma)$, dann muß sicher

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{G(\sigma)}{\sin \sigma} = 0 \quad (86)$$

sein. Hier besagt die Formel

$$\begin{aligned} & (2n+1) \cos (2n+1)\sigma - \operatorname{ctg} \sigma \sin (2n+1)\sigma \\ & = \sum_{\alpha=0}^n \binom{2n+1}{2\alpha+1} 2\alpha \cos^{2n+1-2\alpha} \sigma \sin^{2\alpha} \sigma, \quad (87) \end{aligned}$$

daß jeder einzelne Summand der ersten, zur Abkürzung mit Σ_1 bezeichneten Reihe von $G(\sigma)$ mit $\sin^2 \sigma$ verschwindet. Berücksichtigt man nur endlich viele a_{2n+1} , (oder konvergiert die Reihe Σ_1 samt ihrer zweiten Ableitung gleichmäßig) dann ist sicher

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Sigma_1}{\sin \sigma} = 0, \quad (88)$$

und es muß, wenn (86) gelten soll, auch der Grenzwert der Restfunktion von $G(\sigma)/\sin \sigma$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_{2n+1} - 1 \right] \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_{2n+1} = 0 \quad (89)$$

sein. Dies entspricht der Aussage von (40), denn der erste Faktor Null gesetzt ergibt nach (83) endlich gekrümmte Ablösung (bei endlich vielen a_{2n+1} oder der erforderlichen Konvergenz von Σ_1 kommt nur eine mindestens einfache Nullstelle von $\zeta'(1)$ in Frage), der zweite ist proportional zur Konturkrümmung in der Ablösungsstelle, für die nach (74)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_{2n+1} = \frac{C'}{(1+r^2)^4} \kappa(0) \quad (90)$$

gilt. Soll weder $\kappa(0)$ noch $\zeta'(1)$ verschwinden, dann muß wegen (86)

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Sigma_1}{\sin \sigma} = \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_{2n+1} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_{2n+1} \quad (91)$$

gelten. Es wurde auf Seite 607 schon vorweggenommen, daß diese Forderung nur erfüllt werden kann, wenn $\zeta(\tau)$ bei $\tau = 1$ eine logarithmische Singularität in der dritten Ableitung hat, wenn also

$$a_{2n+1} = O\left(\frac{1}{(2n+1)^4}\right) \quad (92)$$

ist. Diese Singularität läßt sich hier einfach darstellen. Sie bewirkt lediglich, daß die dritte Reihe Σ_3 von $G(\sigma)$ einen Anteil enthält, der mit $\sigma|\sigma|$ gegen Null geht. Man kann ihn etwa in der Form

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_{2n+1} \sin (2n+1)\sigma &= k \sin^2 \sigma + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)b_{2n+1} \\ &\cdot \sin (2n+1)\sigma \quad (0 \leq \sigma \leq \pi) \end{aligned} \quad (93)$$

mit

$$(2n+1)a_{2n+1} = -\frac{8k}{\pi(2n+1)[(2n+1)^2 - 4]} + (2n+1)b_{2n+1} \quad (94)$$

abspalten, wobei die Reihe mit den b_{2n+1} wieder entweder endlich oder samt zweiter Ableitung konvergent sein soll. Damit wird dann

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{d\Sigma_3}{d\sigma} - \operatorname{ctg} \sigma \Sigma_3 = k \sin \sigma \cos \sigma \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)b_{2n+1}[(2n+1) \cos (2n+1)\sigma - \operatorname{ctg} \sigma \sin (2n+1)\sigma] \end{aligned} \quad (95)$$

und

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Sigma_1}{\sin \sigma} = k. \quad (96)$$

Die Gleichung (91) kann also mit

$$k = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) a_{2n+1} \right) \frac{\lambda}{(1 + r^2)^4} \kappa_0(0) \quad (97)$$

befriedigt werden. Dies ergibt mit (94) zusammen die genaue asymptotische Formel für die a_{2n+1} , deren Größenordnung durch (92) schon festgelegt ist. Bei endlich gekrümmter Ablösung oder verschwindender Konturkrümmung in der Ablösungsstelle ist die Größenordnung noch kleiner.

Die Beispielrechnungen der nächsten Ziffer wurden mit $\frac{1}{4}N = 18$ Ordinaten im Intervall $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}\pi$ durchgeführt. Das Rungesche Verfahren liefert dann jeweils 18 Koeffizienten der sin-Reihe. Nach (94) ist die Größe des ersten vernachlässigten Koeffizienten a_{37} ungefähr $0,5 \cdot 10^{-6}k$, was meist nicht mehr stört.

Trotzdem kann man zur Verbesserung des Verfahrens die Abspaltung (93) auch in den Iterationsprozeß eingliedern. Auf diese Art kann man der exakten Lösung sehr nahe kommen. Außerdem wird die Konvergenz beschleunigt. Auch andere Abspaltungen bieten gute Möglichkeiten, wie sich bei einem der Beispiele des nächsten Ziffer zeigen wird. Sie bieten sich oft erst im Verlauf der Rechnung an und können dann ohne Schwierigkeiten in die schon vorhandenen Zwischenergebnisse eingebaut werden. Darauf kann jedoch nicht näher eingegangen werden. Meist sind die Abspaltungen gar nicht erforderlich, und man erhält dann ohne sie Näherungslösungen, deren Konturfunktion $\kappa(\theta)$ in 18 Punkten der Halbkontur mit der vorgegebenen übereinstimmt. In der Ablösungsstelle ist ein — praktisch vollkommen unwesentliches — Unendlichwerden der Krümmungsableitung vorhanden.

Insgesamt ist das beschriebene Iterationsverfahren sehr vielseitig. Bei geschickter Anwendung kann man mit erträglichem Aufwand sehr gute Ergebnisse bekommen. Man darf aber natürlich nicht zu viel von ihm verlangen. Bei komplizierten Konturen mit großer Krümmungsänderung ist die Konvergenz sehr fraglich. Auch bringt hier die Schlichtheit im Großen, die bei jeder Lösung nachzuprüfen ist, Schwierigkeiten mit sich, da die Kontur $\mathcal{C}'$ aus dem Totwasser herausragen kann. Bei Konturen mit vielen Wendepunkten ist auch möglicherweise die Größe r nicht mehr eindeutig festzulegen, wenn nämlich Ω' -Bereiche ähnlich demjenigen von Abb. 8 entstehen.

Die letzte Schwierigkeit kann bei Konturen ohne Minimum von θ längs ω_1 nicht auftreten, wenn $v_1 > 1$ ist. Hier kann die Linie ν im Bereich $T > -\ln v_1$ keine Verschlingungen, also keine Vieldeutigkeiten mehr aufweisen. Anhand dieser praktisch wichtigen Konturengruppe wird noch auf eine Besonderheit hingewiesen.

Bei der Anlage des Iterationsverfahrens zeigte sich, daß zu einer Kontur eine einparametrische Schar von gleichberechtigten Lösungsmöglichkeiten existiert. Nach Ziff. 4 können bei Konturen ohne Minimum von θ längs ω_1 höchstens die Formen I–V auftreten. Überträgt man die dortigen Verhältnisse auf eine feste Kontur und einen festen Wert $v_1 > 1$, dann ergeben sich in ζ - und z -Ebene etwa die Möglichkeiten der Abb. 13. Die Form I kann wegen der unendlichen

ABB. 13. Skizze der um eine feste Kontur bei festem v_1 möglichen Strömungsformen und ihre Ω -Bereiche.

Krümmung der freien Stromlinie in der Ablösungsstelle nur vorkommen, wenn die Kontur dort endet. Für die Formen IV und V ist notwendig, daß die Kontur bis zu negativen θ -Werten geht. Nach den Ausführungen in Ziff. 4 ist die Totwasserbreite überall positiv. Die Form IV ist nicht mehr die letzte, die noch als symmetrische Totwasserströmung gedeutet werden kann.

Die Form IV hatte im Fall $r = 0$ nach (67) auch noch die Eigenschaft minimalen Widerstandes. Es fragt sich, ob diese Eigenschaft auf den Fall $v_1 > 1$ übertragen werden kann. Wegen des konstant bleibenden v_1 würde dies bedeuten, daß die Form IV minimale Totwasserbreite hat.

Wenn die Form IV überhaupt existiert, dann gibt es sicher auch eine Strömung mit minimaler Totwasserbreite. Denn bei der Form IV ist sicher $c < b$, da längs der freien Stromlinien immer $\theta < 0$ ist. Im Grenzfall $r \rightarrow 1$ ist dagegen

$$\lim_{r \rightarrow 1} s = 0, \quad (98)$$

die Geraden g_1, g_2 schließen sich dann mit stetiger Tangente an die breiteste Stelle der Kontur an und es wird $c = b$. Er ist nicht zu verwechseln mit dem Grenzfall $r \rightarrow 1$ von Ziff. 4, bei dem die Form des Ω' -Bereichs erhalten blieb, während jetzt die Kontur $\mathcal{C}'$ und v_1 konstant bleiben.

Die Behauptung (98) läßt sich mit Hilfe der aus (61), (66) (75), (79) und (80)

folgenden Beziehung

$$c_w = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho b} = \frac{c}{b} \cdot (v_1^2 - 1) = \frac{\pi\lambda v_1(v_1^2 - 1)}{8b_0 r(1 - r^4)} i\zeta'(ir) \quad (99)$$

für den Widerstandsbeiwert c_w beweisen. Diese Größe muß bei konstant gehaltenem v_1 endlich bleiben, also muß für $r \rightarrow 1$ die einzige noch verfügbare Größe $\lambda i\zeta'(ir)$ gegen Null gehen. Eine nähere Untersuchung der Funktion $\zeta'(\tau)$ zeigt, daß $\zeta'(ir)$ nicht beliebig klein werden kann. Also muß dies λ und damit die nach (55), (75), (79) und (80) in der Form

$$s = \frac{\lambda b}{8b_0 r^2(1 + r^2)^2} \quad (100)$$

zu λ proportionale Größe s tun.

Es ist natürlich noch ungeklärt, ob damit die minimale Totwasserbreite c gerade bei der Form IV auftritt. Auch für diese Aussage konnte noch kein allgemeiner Beweis geführt werden. Es gelang aber auch nicht, einen Widerspruch dazu zu finden. Die derartigen Versuche bei allen Beispielmöglichkeiten führten auf Indizien für die Aussage, sodaß sehr wahrscheinlich die Form IV im Rahmen fester Kontur und konstanten Totwasserdrucks minimalen Widerstand hat.

Natürlich kann man auf die Form IV und damit auf das vermutliche Widerstandsminimum auch wieder direkt im Iterationsprozeß losgehen. Die entsprechende Bedingung (Vgl. S. 612) $b_1 = 0$ führt mit $\gamma = 1$ und (47) auf $a_1 = 2$. Man muß also nur bei jedem Iterationsschritt $\lambda^{(\mu)}$ so festlegen, daß $a_1^{(\mu+1)} = 2$ ist, um bei Konvergenz des Verfahrens auf eine Strömung der Form IV zu kommen.

Die mit dem Iterationsverfahren zu gewinnende Lösung des bestimmten Problems besteht aus den zu einer vorgegebenen Funktion $\kappa(\theta)$ und einem Wert v_1 gehörenden Größen a_{2n+1} , r und λ . Die gesuchte Strömung der z -Ebene erhält man dazu durch Eingehen mit dem Ansatz (68) in (15). Man kann so wenigstens prinzipiell die durch (51) in der τ -Ebene definierten Stromlinien auf die z -Ebene abbilden. Die Gleichung (15) ist dabei aber meist so kompliziert, daß diese Abbildung sehr mühsam ist. Man beschränkt sich deshalb in der z -Ebene oft auf solche Größen, die einfacher ohne (15) berechnet werden können. Die entstehende Kontur kennt man von vorn herein mit $\kappa(\theta)$. Dazu erhält man den Widerstandsbeiwert und die Totwasserbreite nach (99) und (61), die Länge der freien Stromlinien nach (100). Außerdem kann man mit der aus (10) folgenden Beziehung

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = \frac{2}{\rho} (p - p_\infty) = 1 - \left| \frac{dw}{dz} \right|^2, \quad (101)$$

in der nach (72) $|dw/dz| = e^{-T}$ zu setzen ist, die Druckverteilung in Abhängigkeit von σ gewinnen. Mit (71) ist sie dann auch in Abhängigkeit von θ bekannt.

Alle Ausführungen der Ziff. 5 beruhen auf der Konvergenz des Iterationsverfahrens. Wir sehen in der folgenden Ziffer an einigen Beispielen, daß diese Voraussetzung nicht leer war.

6. Beispielrechnungen. Als erstes Beispiel dient die ebene Platte senkrecht zur Anströmrichtung. Es wird eine Umströmung der Plattenenden zugelassen, obwohl dies praktisch nicht vorkommt (Abb. 14). Im Hinblick auf das Widerstandsminimum der Form IV sind die Ergebnisse jedoch wertvoll.

ABB. 14. Die τ -, ζ - und z -Ebene bei der Strömung um die ebene Platte mit Umströmung der Plattenenden.

Das ganze Beispiel läßt sich geschlossen durchrechnen. Die Abbildungsfunktion $\zeta(\tau)$ kann bis auf das Glied $-\ln v_1$ aus der Behandlung des gleichen Beispiels mit $v_1 = 1$ entnommen werden, da sich die geradlinige Kontur bei der Parallelverschiebung ihres Ω -Bereichs nicht ändert. Es ist nach Schmieden¹

$$\zeta(\tau) = \ln \frac{i + \tau}{i - \tau} + \ln \frac{(\tau - e^{i\alpha})(\tau + e^{-i\alpha})}{(\tau + e^{i\alpha})(\tau - e^{-i\alpha})} - \ln v_1. \quad (102)$$

Die Vieldeutigkeit der Lösung liegt in der Willkür des Punktes E in der ζ -Ebene. Sie äußert sich in (102) durch den Parameter α , der im Intervall $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$ liegen kann. Die Gleichung (49) führt auf

$$v_1 = \frac{(1 + r)(1 - 2r \sin \alpha + r^2)}{(1 - r)(1 + 2r \sin \alpha + r^2)}, \quad (103)$$

woraus zu dem vorgegebenen v_1 für jedes α ein Wert r berechnet werden kann. Das Integral (15) läßt sich mit (102) zusammen geschlossen auswerten und liefert nach einiger Rechnung die für den Widerstandsbeiwert c_w nach (99)

¹ Fußnote¹² von Seite 597.

entscheidende Größe

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{4r(1-r)(1+r^2)}{1+r} \cdot \frac{(1-\sin \alpha)[\cos^2 \alpha (1+2r^2 \cos 2\alpha + r^4) - 4(1-r^2)^2 \sin^2 \alpha \ln \sin \alpha]}{\cos \alpha (1-2r \sin \alpha + r^2)^2 [1+2r^2 \cos 2\alpha + r^4 - 2(1-r^2)^2 \sin \alpha]} \right. \\ \left. - \frac{(1-r)^2(1+2r \sin \alpha + r^2)^2}{(1+r)^2(1-2r \sin \alpha + r^2)^2} \arctg \frac{(1-r^2) \cos \alpha}{(1+r^2) \sin \alpha + 2r} \right. \\ \left. + \arctg \frac{(1+r^2) \sin \alpha - 2r}{(1-r^2) \cos \alpha} \right\}. \quad (104)$$

Je nach Wahl von α erhält man verschiedenartige Strömungen in der z -Ebene. Ist $\alpha = 0$, dann entsteht die Form I, die der bekannten Helmholtz-Strömung² mit Ablösung der freien Stromlinien in den Plattenenden entspricht und für $v_1 \rightarrow 1$ in diese übergeht. In diesem Fall kann man mit (103) noch in (104) eingehen und erhält.

$$c_w = \frac{\frac{1}{2}\pi(v_1^4 - 1)v_1^2}{v_1(v_1^2 - 1) + (v_1^2 + 1)^2 \arctg v_1 - \frac{1}{2}\pi(v_1^2 + 1)}. \quad (105)$$

Die entstehende Strömung ist mit dem physikalisch in Ziff. 8 noch zu begründenden Wert $v_1 = \sqrt{2}$ in Abb. 15 dargestellt. Aus (105) folgt dabei $c_w = 1,79$.

ABB. 15. Die genaue Form der freien Stromlinie bei der ebenen Platte mit Ablösung in den Plattenenden, $v_1 = \sqrt{2}$. Längeneinheit ist die halbe Plattenbreite.

² Diese spezielle Strömung wird auf anderem Weg und mit anderer Zielsetzung ebenfalls gewonnen von R. GERBER und J. S. McNOWN in dem während der Korrektur erschienenen Buch: J. S. McNOWN & CHIA-SHUN YIH, *Free streamline analysis of transition flow and jet deflection*. The State University of Iowa, No. 427 (1953).

Die Fälle $\alpha > 0$ ergeben die Formen III, IV oder V, je nachdem $\sin \alpha$ kleiner, gleich oder größer als $\frac{1}{2}$ ist. Die Form IV liefert ein Minimum von c/b nach (104) unter der Nebenbedingung (103). Genauere Untersuchungen mit weiteren Zwischenrechnungen sind in der Dissertation des Verfassers³ enthalten.

Als zweites Beispiel dient der Kreiszylinder. Er wurde mit dem Iterationsverfahren von Ziff. 5 behandelt. Die Konturbreite wurde mit $b_0 = 2$ festgelegt, was auf $\kappa_0(\theta) \equiv -1$ führt. Außerdem ist $\gamma = 1$. Die freie Nebenbedingung wurde verschieden gewählt. Als Geschwindigkeit v_1 längs der freien Stromlinien wurde zunächst wieder $v_1 = \sqrt{2}$ genommen, in den letzten drei Fällen der einem Experiment entnommene Wert $v_1^2 = 1,4$.

A) Die endlich gekrümmte Ablösung wurde mit der Nebenbedingung (83) erreicht. Das Verfahren konvergierte sehr gut. Nach fünf Iterationsschritten änderten sich die in Tabelle 1 angegebenen Ergebnisse in der 5. Dezimale nicht mehr. Die Größe der a_{2n+1} nimmt rasch ab, wie bei der endlich gekrümmten Ablösung zu erwarten war.

B) Hier wurde auf die Ablösungsstelle der laminaren Grenzschicht hingearbeitet, die nach Pohlhausen⁴ bei einem Öffnungswinkel von $\chi_a = 81,5^\circ$ liegt. (χ ist vom Staupunkt aus gemessen, sodaß $\chi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ ist.) Da es auf den genauen Wert von χ_a nicht ankam, wurde ein interpolierter Wert von r festgehalten und als Nebenbedingung benützt. Nach 7 Iterationen änderten sich die Werte von Tabelle 1 nicht mehr.

C) Zur Prüfung des Iterationsverfahrens wurde hier $\chi_a = 87^\circ$ festgelegt und Gleichung (81) als Nebenbedingung verwendet. Dabei konvergierte das Verfahren nicht mehr gut. Es waren trotz gelegentlicher Extrapolationen 14 Iterationsschritte notwendig, bis sich die Ergebnisse der Tabelle 1 nicht mehr änderten. Dies rührte aber weniger von der Art der Nebenbedingung her, als vom Anwachsen des Wertes r , durch das der Nenner von $f(r, \sigma)$ bei $\sigma = \frac{1}{2}\pi$ mit $(1 - r^2)^4$ klein wird.

D) Schließlich wurde versucht, die Form IV durch die Bedingung $a_1 = 2$ herzustellen. Dies gelang mit dem einfachen Verfahren nicht, weil dabei r zu nahe an den Wert 1 heranging. Daher wurde mit dem Ansatz

$$\zeta(\tau) = \ln \frac{i + \tau}{i - \tau} + 2 \ln \frac{1 + ir\tau}{1 - ir\tau} - 2k_1 \ln \frac{1 + i\epsilon_1 \tau}{1 - i\epsilon_1 \tau} + i \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \tau^{2n+1} - \ln v_1 \quad (106)$$

ein geschlossener Ausdruck abgespaltet und die Größen c_{2n+1} und k_1 nach einem besonderen Verfahren iteriert⁵. Dies ging nur dann mit erträglichem Aufwand, wenn $r = \text{const.}$ als Nebenbedingung benützt wurde, da sonst bei 12 notwendigen Iterationen jeweils zu viele von r abhängige Funktionen hätten neu berechnet werden müssen. So wurde mit $r = 0,915$ die Form IV nur ungefähr erreicht, wie aus der in Tabelle 2 mit aufgeführten Größe a_1 hervorgeht. (Diese Größe

³ Fußnote⁴ von Seite 593.

⁴ K. POHLHAUSEN, *Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht*. Z. angew. Math. Mech. **1** (1921), S. 252.

⁵ Näheres in der Dissertation des Verfassers, Fußnote⁴ von Seite 593, S. 65–68.

entspricht dem Koeffizienten von τ bei der Entwicklung von (106) ohne den ersten Term.)

E) Da es wichtig erschien, ob hier in der Nähe der Form IV ein Widerspruch zu der Vermutung des minimalen Widerstandes auftritt, wurde zu D) noch eine Nachbarlösung berechnet, die noch etwas näher an die Form IV herankommt. Sie lieferte einen kleineren Widerstand, also keinen Widerspruch.

Ein weiteres Herangehen an die Form IV erschien nicht ratsam, weil dabei der Nenner von $f(r, \sigma)$ immer mehr Schwierigkeiten bereitet. Auch sind diese Fälle wegen der schon ziemlich kleinen Größe s praktisch nicht sehr bedeutsam.

F) Die Form IV wurde im Hinblick auf das überkritische Experiment auch noch für $v_1^2 = 1,4$ untersucht. Dabei konnte wieder ohne Abspaltung gearbeitet werden, die Konvergenz war gut.

G) Um zu untersuchen, ob die Form IV wie bei der ebenen Platte ein Widerstandsminimum ergibt, wurde noch zwei Nachbarlösungen zu F) berechnet. Dabei wurden der Einfachheit wegen Nachbarwerte von r gewählt, zuerst $r = 0,66836$.

H) Analog zu G) wurde noch mit $r = 0,675$ gerechnet. Auch hier bestätigt sich die Vermutung sehr schön.

Die Tabellen 1 und 2 enthalten außer den Ergebnissen der Iteration auch schon die daraus berechneten Größen s und c_w . Die nach (101) berechneten Druck-

TABELLE 1

Beisp.	A	B	C	G	F	H
v_1	1,41421	1,41421	1,41421	1,18322	1,18322	1,18322
r	0,36566	0,56120	0,69143	0,66836	0,67168	0,67500
λ	1,24922	1,65581	1,35473	2,12111	2,10002	2,07868
χ_a	62,566°	81,502°	87,000°	99,745°	99,745°	99,745°
c_w	1,16420	1,03583	1,00885	0,39106	0,39033	0,39092
s	1,03013	0,49978	0,23964	0,40206	0,40096	0,39977
a_1	1,14187	1,58014	1,77290	1,99718	2,00000	2,00280
$3a_3$	-0,16375	-0,56835	-0,99212	-0,98272	-0,99545	-1,00826
$5a_5$	0,02447	0,19423	0,51439	0,46889	0,47962	0,49055
$7a_7$	-0,00306	-0,06242	-0,25725	-0,21404	-0,22134	-0,22881
$9a_9$	0,00050	0,02058	0,12703	0,09847	0,10279	0,10728
$11a_{11}$	-0,00004	-0,00631	-0,06195	-0,04410	-0,04654	-0,04910
$13a_{13}$	0,00001	0,00215	0,03016	0,02021	0,02150	0,02289
$15a_{15}$		-0,00059	-0,01456	-0,00890	-0,00958	-0,01033
$17a_{17}$		0,00026	0,00706	0,00414	0,00447	0,00486
$19a_{19}$		-0,00004	-0,00338	-0,00176	-0,00193	-0,00214
$21a_{21}$		0,00004	0,00165	0,00086	0,00093	0,00104
$23a_{23}$		-0,00001	-0,00067	-0,00033	-0,00037	-0,00042
$25a_{25}$		0,00001	0,00039	0,00018	0,00020	0,00023
$27a_{27}$			-0,00018	-0,00005	-0,00006	-0,00008
$29a_{29}$			0,00009	0,00004	0,00005	0,00006
$31a_{31}$			-0,00003		-0,00001	-0,00001
$33a_{33}$			0,00001		0,00001	0,00001
$35a_{35}$			-0,00001			

TABELLE 2

Beisp.	D	E	Beisp.	D	E
v_1	1,41421	1,41421	$9c_9$	-0,04656	-0,04117
r	0,915	0,92	$11c_{11}$	0,02494	0,02136
λ	0,21602	0,19435	$13c_{13}$	-0,0124	-0,0099
χ_a	90,400°	90,417°	$15c_{15}$	0,0053	0,0036
c_{10}	1,00031	1,00007	$17c_{17}$	-0,0015	-0,0003
s	0,01737	0,01554	$19c_{19}$	0,0003	-0,0011
a_1	1,98425	1,98689	$21c_{21}$	0,0010	0,0015
k_1	0,34820	0,36258	$23c_{23}$	-0,0011	-0,0014
ϵ_1	0,89	0,895	$25c_{25}$	0,0009	0,0010
c_1	-0,43615	-0,39504	$27c_{27}$	-0,0006	-0,0005
$3c_3$	0,25018	0,22701	$29c_{29}$	0,0003	-0,0001
$5c_5$	-0,14494	-0,13123	$31c_{31}$	0,0000	0,0003
$7c_7$	0,08318	0,07475	$33c_{33}$	-0,0002	-0,0006
			$35c_{35}$	0,0003	0,0007

verteilungen der wichtigsten Beispiele sind in Ziff. 9 anlässlich des Vergleichs mit dem Experiment dargestellt.

7. Die Beziehung zu den unstetigen Kanalströmungen. Alle Untersuchungen und Methoden von Ziff. 4 und 5 können fast wörtlich auf symmetrische unstetige Kanalströmungen übertragen werden, wenn überall an Stelle von Gleichung (51)

$$w(\tau) = C \ln \frac{(\tau^2 + r^2)(r^2 \tau^2 + 1)}{(1 - r^2)^2 \tau^2} \quad (107)$$

verwendet wird. Durch diese Funktion wird der aufgeschnittene τ -Halbkreis $\mathfrak{T}$ auf einen längs der reellen Achse aufgeschnitten Streifen der z -Ebene abgebildet (Abb. 16). Genau wie in Ziff. 3 kann man anhand von Gleichung

ABB. 16. Das durch (107) erzeugte Bild in der w -Ebene und die entstehende Kanalströmung in der z -Ebene.

(16)–(18) zeigen, daß die zu einem symmetrischen Bereich Ω' gehörende Funktion $\zeta(\tau)$ mit (107) zusammen in (15) eingesetzt eine symmetrische Kanalströmung ergibt, deren Geschwindigkeit bei negativ großen x -Werten den Betrag 1 hat,

längs der freien Stromlinien und bei positiv großen x -Werten den Betrag v_1 (Abb. 16).

Dieser einfache Zusammenhang ermöglicht sofort, alle Ergebnisse von Ziff. 3 auch auf die symmetrischen Kanalströmungen zu übertragen, insbesondere die Existenz der komplizierten Strömungsformen. Das Iterationsverfahren von Ziff. 5 ändert sich nur in der Funktion $f(r, \sigma)$, wenn es anstatt mit (51) mit (107) aufgestellt wird. Es treten aber keine neuen Schwierigkeiten auf, sodaß man mit ihm auch Kanalströmungen um vorgegebene Konturen berechnen kann. Andererseits können die funktional-analytischen Methoden zur Gewinnung von Existenzbeweisen¹ auf die hier gegebene Strömungsform übertragen werden. Die enge Verwandtschaft bietet also für beide Teile günstige Möglichkeiten zur Erweiterung der vorhandenen Theorien.

8. Der Übergang auf schwach zähe Flüssigkeiten. Wieschon in der Einleitung betont wurde, erfolgte die ganze Verallgemeinerung der Helmholtz-Strömung in dem Gedanken, für die Strömungen in wirklichen, immer schwach zähen Flüssigkeiten oder Gasen brauchbare Näherungen zu erhalten, besonders hinsichtlich des Widerstandsproblems. Auch die in solchen Medien auftretenden Strömungen zeigen hinter der Kontur ein Totwasser, in welchem Unterdruck herrscht. Die daran angrenzenden freien Stromlinien lösen sich jedoch nach einer gewissen Laufstrecke in Wirbel auf, deren Entstehung bisher noch nicht theoretisch erfaßt werden konnte. Es gelang lediglich, mit Hilfe der bekannten halbempirischen Ansätze für die Scheinschubspannungen asymptotische Formeln für den Nachlauf weit hinter der Kontur abzuleiten, die gute Übereinstimmung mit dem Experiment zeigten¹.

Bevor wir nun überlegen, wie weit die hier gegebene theoretische Strömungsform eine Idealisierung der wirklichen sein kann, entnehmen wir dieser noch einige Einzelheiten (Abb. 17). Wir bezeichnen die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors mit v_x, v_y und nehmen die Anströmgeschwindigkeit, die bisher $v_\infty = 1$ gesetzt wurde, wieder mit dem Betrag v_∞ in die Formeln mit, da dies in entsprechenden Arbeiten üblich ist. Es entstehen dadurch keinerlei Schwierigkeiten.

Durch die Strömungsablösung und Verwirbelung entsteht hinter der umströmten Kontur eine Zone, innerhalb derer allein der Gesamtdruck

$$g = p + \frac{1}{2}\rho v^2 < g_\infty = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \quad (108)$$

nicht übereinstimmt mit dem Gesamtdruck des übrigen Strömungsbereiches. Die Breite b_n der Wirbelzone, die im Geschwindigkeitsprofil eine "Nachlaufdele" erzeugt, nimmt nach $b_n(x) \sim \sqrt{x}$ für große Werte von x parabolisch zu². Führen wir noch die auf das relativ zur Flüssigkeit im Unendlichen "ruhende System"

¹ J. KRAVTCHEKO, Fußnote¹⁶ von Seite 598.

¹ H. SCHLICHTING, *Über das ebene Windschattenproblem*. Ing.-Arch. 1 (1930), S. 533.

² H. SCHLICHTING, a.a.O.

ABB. 17. Die in schwach zähen Flüssigkeiten auftretende Strömungsform mit verschiedenen typischen Geschwindigkeitsprofilen.

(im Gegensatz zum mit der Kontur "mitbewegten System") bezogene Störgeschwindigkeit

$$\Delta v_x = v_\infty - v_x \quad (109)$$

ein, dann ist die maximale Nachlaufgeschwindigkeit $\Delta v_{\max}(x) \sim 1/\sqrt{x}$ und die Nachlaufmenge

$$Q = \int_{-\frac{1}{2}b_n}^{+\frac{1}{2}b_n} \Delta v_x dy \quad (110)$$

durch eine Gerade des ruhenden Systems unabhängig von x . Hier werden häufig die Integrationsgrenzen ohne Änderung des Integralwerts bis Unendlich ausgedehnt. Dies ist nur bedingt richtig, da das uneigentliche Integral

$$\frac{1}{2}Q_\epsilon = \int_{\frac{1}{2}b_n}^{\infty} \Delta v_x dy \quad (111)$$

einen endlichen Wert haben kann, selbst wenn das entsprechende Integral über Δv_x^2 zu vernachlässigen ist. Wir unterscheiden daher gegenüber (110) noch

$$Q_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta v_x dy. \quad (112)$$

Den Zusammenhang des Widerstandes mit dem Nachlauf erhält man mit Hilfe des Impulssatzes. Die erforderliche (endliche) Kontrollfläche um die Kontur herum wählt man rechteckig. Ihre Seiten $x_1, x_2, \pm y_s$ müssen so weit von

der Kontur weg liegen, daß die Nachlaufdelle nicht bis zur seitlichen Begrenzung reicht und alle Quadrate der Störgeschwindigkeiten Δv_x , v_y gegen ihre ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung und der Kontinuitätsbeziehung können alle Druck- und Impulsanteile auf die Hinterseite der Kontrollfläche übertragen werden, sodaß sich für den Widerstand

$$W = \int_{-\frac{1}{2}b_n}^{+\frac{1}{2}b_n} [p_\infty - p(x_2, y) + \rho v_\infty \Delta v_x(x_2, y)] dy \quad (113)$$

ergibt. Der Druckanteil ist dabei meist noch zu vernachlässigen. Dann wird mit (110)

$$W = \rho v_\infty Q. \quad (114)$$

Es sei besonders festgestellt, daß hier nur über die Nachlaufdelle integriert wird.

Die Geschwindigkeitskomponente v_y geht mit wachsendem y gegen Null, und zwar, da wir hinter der Kontur eine konstante Nachlaufmenge, also eine konstante Verdrängungsdicke haben, etwa mit $v_y \sim 1/y$ wie bei der bekannten Quell-Halbkörperströmung. Nun wenden wir für die eingeführte Kontrollfläche auch noch die Kontinuitätsgleichung an. Sie lautet

$$\int_{-y_s}^{+y_s} v_x(x_1, y) dy = 2 \int_{x_1}^{x_2} v_y(x, y_s) dx + \int_{-y_s}^{+y_s} v_x(x_2, y) dy. \quad (115)$$

Das zweite Integral geht wegen des klein werdenden v_y mit wachsendem y_s gegen Null. Daraus folgt, wenn man vor dem Grenzübergang in (115) beiderseits $2y_s v_\infty$ abzieht

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta v_x(x_1) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta v_x(x_2) dy. \quad (116)$$

Die Größe $Q_\infty(x)$ ist also von x unabhängig. Dies gilt für alle x , nicht nur für diejenigen des Nachlaufes. Mit (114) und (112) wird

$$W = \rho v_\infty (Q_\infty - Q_\epsilon). \quad (117)$$

Die Größe Q_ϵ ist nach (111) diejenige Menge, die weit hinter der Kontur außerhalb der Nachlaufdelle durch eine Gerade des ruhenden Systems fließt. Dort herrscht infolge der Nachlauf-Verdrängung, wie etwa wieder bei der Quell-Halbkörperströmung, höchstens eine Übergeschwindigkeit $v_x > v_\infty$, $\Delta v_x < 0$, sodaß Q_ϵ eine kleine negative Größe ist. Sie geht aber nicht mit wachsender Entfernung von der Kontur gegen Null, sondern ist mit Q und Q_∞ unabhängig von x . Vernachlässigen wir sie wie üblich, dann erhalten wir in

$$W = \rho v_\infty Q_\infty \quad (118)$$

einen etwas zu kleinen Widerstand. Trotzdem ist diese Beziehung entscheidend. Die Durchlaufmenge Q_∞ durch eine ruhende Gerade gibt nach ihr immer im

wesentlichen den Widerstand, auch wenn die Kontrollgerade direkt hinter der Kontur oder vor ihr gewählt wurde.

Diese Tatsache gibt uns wichtige Hinweise, wenn wir die verallgemeinerte Helmholtz-Strömung als Idealisierung der wirklichen Strömung auffassen wollen. Bei der theoretischen Strömung sind doch noch zwei Parameter frei, die im Rahmen der Potentialtheorie nicht festgelegt werden können.

Der erste variiert die Ablösungsstelle. Sie macht jedoch wenig Schwierigkeiten, da sie in der Grenzschichttheorie eingehend untersucht wird. Bei der laminaren Grenzschicht wird sie eindeutig festgelegt, bei der turbulenten existieren einige halbempirische Berechnungsmöglichkeiten, die allerdings nicht restlos befriedigen³. Wie sich später zeigt, liegt die Ablösungsstelle der turbulenten Grenzschicht etwa dort, wo sie bei unserer theoretischen Strömung im Fall minimalen Widerstandes liegt. Vielleicht erlangt diese Festlegungsmöglichkeit in der Theorie der turbulenten Grenzschicht eine gewisse Bedeutung.

Der zweite Parameter ist der Totwasserdruck. Diesen letzten im Rahmen der Theorie noch freien Parameter untersuchen wir nun im Anschluß an Gleichung (118) noch etwas näher.

Wir treffen zunächst eine naheliegende Annahme:

Tritt bei einer Kontur an Stelle der berechneten Strömungsform eine andere Totwasserströmung, oder in schwach zähen Medien eine totwasserähnliche Strömung mit dem gleichen Totwasserdruck und der gleichen Ablösungsstelle, dann ändert sich der Widerstand nicht.

Diese Annahme ist berechtigt, da beim Übergang von der einen zur anderen Strömung die Druckverteilung um die Kontur im wesentlichen erhalten bleibt. Die Verschiedenheiten der in Betracht kommenden Strömungen liegen erst in einem Abstand von der Kontur. Wir können dies an einem theoretischen Beispiel nachprüfen. Für die ebene Platte senkrecht zur Anströmrichtung hat Riabouchinsky⁴ die in Abb. 18 skizzierte Strömungsform berechnet. Sie stellt ebenfalls eine Verallgemeinerung der Helmholtz-Strömung dar mit dem Ziel, den Widerstandsbeiwert zu verbessern. Die freien Stromlinien begrenzen auch hier ein Totwasser mit Unterdruck p_1 , sie münden jedoch hinten in eine zweite Platte ein. Wegen der vorhandenen Symmetrie wirkt auf die hintere Platte die gleiche Vortriebskraft, die die vordere als Widerstand erfährt. Der Totwasserdruck kann frei variiert werden. Der Widerstandsbeiwert auf die vordere Platte in Abhängigkeit vom Totwasserdruck stimmt bis auf 1–2% überein mit dem nach (105) berechneten.

Die gleiche Annahme wurde auch schon in anderen Arbeiten getroffen und dazu verwendet, durch Modulation der Helmholtz-Strömung mit Hilfe zusätzlicher Parameter den Totwasserdruck (oder nur den Druck an der Ablösungsstelle der dann willkürlich auf das Totwasser ausgedehnt wurde) zunächst freizulassen und an das jeweilige Experiment anzugleichen. Die damit berechneten Widerstände sind recht gut, und man hat mit der vorliegenden Strömungsform eine

³ Vgl. auch H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, Karlsruhe 1951.

⁴ D. RIABOUCHINSKY, Fußnote³ von Seite 592.

weitere entsprechende Möglichkeit. Sie ist sogar weit umfassender als alle vorhergehenden. Es besteht erstmals bei ihr eine Methode zur Berechnung von modifizierten Totwasserströmungen um vorgegebene gekrümmte Konturen.

Die getroffene Annahme enthält aber für unsere Strömungsform noch mehr. Sie besagt doch, daß der von den beiden Geraden g_1, g_2 begrenzte Unterdruckraum auf die Kontur die gleiche Wirkung ausübt wie die turbulente Vermischung bei der Auflösung des Totwassers. Dies kann aber nicht nur allein hinsichtlich des Widerstandes der Fall sein, sondern man wird folgerichtig auch verlangen, daß die mit dem Widerstand nach (118) zusammenhängende Durchlaufmenge Q_∞ gleich sein muß. Diese ist bei der theoretischen Strömung leicht anzugeben. Sie stimmt im Großen mit einer Quell-Halbkörperströmung überein, deren Quellstärke q den Wert

$$q = cv_\infty \quad (119)$$

haben muß, wenn sie die gleiche Halbkörperbreite c haben soll. Bei dieser Quellströmung ist aber die Durchlaufmenge Q'_∞ durch eine ruhende Gerade vor der Quelle gleich der halben Quellstärke, also

$$Q'_\infty = \frac{1}{2}cv_\infty. \quad (120)$$

Wenn die verallgemeinerte Helmholtz-Strömung im Großen mit der Quellströmung übereinstimmt, dann hat sie durch eine Gerade weit vor der Kontur die gleiche Durchlaufmenge Q'_∞ . Da bei ihr die Kontinuitätsbetrachtung (116) ganz analog gilt, ist nach (118)

$$W = \frac{1}{2}\rho cv_\infty^2. \quad (121)$$

Vergleicht man dies mit (66) und berücksichtigt, daß dort $v_\infty = 1$ gesetzt ist, dann folgt

$$v_1^2 = 2v_\infty^2. \quad (122)$$

Nur bei diesem Wert von v_1 und dem entsprechenden normierten Totwasserdruck

$$p'_1 = \frac{p_1 - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = -1 \quad (123)$$

ist also der Ersatz der wirklichen Strömung durch die theoretische voll gerechtfertigt.

Es gibt bisher nur noch eine einzige Totwasserströmung, die die Bedingung (118) analog erfüllt, die von Schmieden⁵ zuerst berechnete Strömung mit konvergierendem Totwasser (Vgl. auch (46)), die keinen Widerstand und $Q_\infty = 0$ hat, wobei der Totwasserdruck $p_1 = p_\infty$ ist. Nur sie ist in dem beschriebenen Sinn für eine Idealisierung der wirklichen Strömung auch noch voll brauchbar. Die

⁵ Fußnote¹² von Seite 597.

ABB. 18

ABB. 18. Skizze der von RIABOUCHINSKI berechneten Strömungsform bei der ebenen Platte.

ABB. 19

ABB. 19. Skizze einer Strömung mit Einschnürung des Totwassers.

Strömung von Abb. 18 ist dagegen unbrauchbar, da bei ihr wie bei jeder stetigen Potentialströmung um einen endlichen Körper $Q_\infty = 0$ ist.

Dieses Ergebnis ist überraschend. Man wird sich danach vor allem die in der Natur auftretenden Totwasserdrücke ansehen. Tatsächlich trifft man auf p'_1 -Werte dicht unter -1 auffallend häufig, bei allen relativ breiten Konturen. Die späteren Beispiele der ebenen Platte und des Kreiszylinders bei kleinen Reynolds-Zahlen zeigen dies. Daß der Wert (123) etwas zu groß ist, kann durch die Vernachlässigung von Q_e erklärt werden, wie man leicht mit (117) anstatt (118) nachrechnet. Die p'_1 -Werte zwischen -1 und $-0,4$ sind dagegen seltener. Erst die kleineren Unterdrücke mit p'_1 zwischen $-0,4$ und 0 treten wieder häufiger auf. Bei vielen stetig veränderlichen Vorgängen tritt ein plötzlicher Sprung im Totwasserdruck auf, beispielsweise beim Kreiszylinder bei der kritischen Re-Zahl oder beim Abreißen einer Tragflügelströmung.

Man kann also vermuten, daß die beiden im Sinn der vorliegenden Betrachtungen "möglichen" Totwasserdrücke und ihre Nachbarwerte auch in Wirklichkeit eine gewisse Rolle spielen. Begründet ist dies aber erst dann, wenn nicht für andere Totwasserdrücke andere Potentialströmungen gefunden werden können, die dort gleich viel leisten wie hier die speziell berechnete Form.

Denken wir uns zum Beispiel eine Strömung berechnet, die etwa ein Mittelding zwischen der hier gegebenen und derjenigen von Riabouchinsky ist (Abb. 19). Im Fall der ebenen Platte läßt sie sich explizit berechnen. An Stelle der Geraden g_1, g_2 treten zwei geknickte Linien, die auch als feste Wände aufzufassen sind und sich bis auf den Abstand c^* nähern. Auch hier ist der Widerstand entsprechend der Annahme von Seite 638

$$W = c(p_\infty - p_1) \quad (124)$$

geblieben. Wir übernehmen dabei auch die alte Totwasserbreite c , was sich mit den beiden Extremfällen rechtfertigen läßt. Die Durchlaufmenge Q_∞^* wird jedoch analog zu (120)

$$Q_\infty^* = \frac{1}{2} v_\infty c^*, \quad (125)$$

sodaß die Übereinstimmung von (124) mit (118) auf

$$p'_1 = -c^*/c \quad (126)$$

führt. Es ist also sehr wohl für einen kleineren Unterdruck $-p'_1$ als (123) die vollständige Vergleichsmöglichkeit gegeben, wenn sich das Totwasser bei der Auflösung einschnürt. Der Totwasserdruck p'_1 hängt dabei nach (126) von einem Einschnürungsfaktor c^*/c ab.

Allerdings hat die Strömung mit der Einschnürung einen Nachteil gegenüber den anderen beiden zugrundegelegten Strömungen. Der trompetenartige Körper, der bei ihr die turbulente Vermischung ersetzt, erfährt (ähnlich wie die hintere Platte bei Riabouchinsky) eine Kraft nach vorn von der Größe

$$P = (c - c^*)(p_\infty - p_1), \quad (127)$$

da der Widerstand der Gesamtkontur analog zu (65)

$$W^* = (p_\infty - p_1)c^* \quad (128)$$

ist, der sich nur aus W und P zusammensetzen kann. Die Durchlaufmenge Q^* hängt von der äußeren Kraft P ab, denn sie geht in alle Impulsgleichungen der Strömung ein. Es ist also fraglich, ob die entsprechende turbulente Vermischung, die an Stelle der Trompete tritt, die gleiche Durchlaufmenge erzeugen kann, denn sie erzeugt sicher keine äußere Kraft.

Dies bestärkt zwar die Vermutung, daß die beiden Vorzugswerte $p'_1 = -1$ und $p'_1 = 0$ eine gewisse Rolle spielen. Eine Entscheidung über die Brauchbarkeit der vorliegenden Ergebnisse kann aber nur das Experiment liefern. Leider sind die vorhandenen Experimente sehr dünn gesät, sodaß der im nächsten Abschnitt versuchte Vergleich keine große Überzeugungskraft besitzt. Immerhin zeigen sich einige auffallende Merkmale, die es für ratsam erscheinen lassen, der Totwasserauflösung noch mit weiteren Experimenten nachzugehen.

9. Vergleich von Theorie und Experiment. Der Vergleich mit den Experimenten erfolgt vor allem im Hinblick auf den Totwasserdruck. Es kommt darauf an, wie weit der Wert $p'_1 = -1$ brauchbar ist und wie sich solche Strömungen einordnen lassen, die einen p'_1 -Wert zwischen -1 und 0 aufweisen. In zweiter Linie wird untersucht, welche Bedeutung dem Minimum des Widerstandes zukommt, über das in Ziff. 5 und 6 berichtet wurde.

Die einfachste Vergleichsmöglichkeit bietet die ebene Platte. Die für sie mit $p'_1 = -1$ oder $v_1 = \sqrt{2}v_\infty$ berechnete und in Abb. 15 dargestellte Strömung ist in Abb. 20 in ein Experiment von A. Walther¹ eingezeichnet. Die Übereinstimmung ist sehr gut. Auch trifft der nach (105) berechnete Widerstandsbeiwert $c_w = 1,79$ die experimentellen Werte gut, die zwischen $a_w = 1,8$ und $c_w = 2,0$ angegeben werden. Zum Vergleich ist in Abb. 20 noch die freie Stromlinie der einzigen bisher auf rein theoretischem Weg berechenbaren Helmholtzströmung mit eingezeichnet. Ihr Widerstandsbeiwert ist bekanntlich $c_w = 0,88$.

¹ F. WALTHER, *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Strömungsformen hinter scharfkantigen Widerstandskörpern, sowie Beziehungen zum Widerstandsproblem*. Ber. d. Math.-phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig **XCII** (1940), S. 139.

ABB. 20. Vergleich des theoretischen Stromlinienbildes mit dem experimentellen bei der ebenen Platte.

Alle übrigen Vergleiche finden an der Kontur des Kreiszylinders statt, da fast nur um ihn zuverlässige Druckverteilungsmessungen vorhanden sind.² Die theoretischen Druckverteilungen konnten mit den Ergebnissen von Ziff. 6 nach (101) und (71) leicht berechnet werden.

Mit $p' = -1$ und der Ablösungsstelle der laminaren Grenzschicht (Rechnung B von Ziff. 6) ergibt sich eine Druckverteilung, die mit derjenigen des unterkritischen Experiments gut übereinstimmt (Abb. 21). Auch hier ist der "theoretische" Totwasserdruck $p'_1 = -1$ gut brauchbar. Die gemessenen Widerstandsbeiwerte sind mit $c_w = 1,1-1,2$ etwas höher als der theoretische $c_w = 1,04$, was auf den früher schon erklärten kleinen Unterschied im Totwasserdruck zurückzuführen ist.

Der Totwasserdruck $p'_1 = -0,4$ der überkritischen Strömung mit $Re > 2,3 \cdot 10^5$ paßt anscheinend nicht zu einem der beiden Vorzugswerte. In Abb. 21 sind zu der Druckverteilung dieses Experiments zwei theoretische Linien eingezeichnet, diejenige der Rechnung F von Ziff. 6, die den experimentellen Totwasserdruck und die Forderung minimalen Widerstandes verwendet, und diejenige von Schmieden, die $p'_1 = 0$ und konvergierendes Totwasser hat. Beide Linien zeigen

² F. FISNER, *Druckmessungen an umströmten Zylindern*. Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 486.

ABB. 21. Vergleich der theoretischen Druckverteilungen mit den experimentellen beim Kreiszyylinder. χ = Umfangswinkel vom Staupunkt aus, B = Rechnung mit Totwasserdruck $p'_1 = -1$ und Ablösungsstelle der laminaren Grenzschicht, F = Rechnung mit experimentellem Totwasserdruck und minimalem Widerstand, S = SCHMIEDENSCHES Strömung mit konvergierendem Totwasser. Die experimentellen Linien (gestrichelt) sind nur so weit gezeichnet, wie sie nicht mit den Linien B oder S übereinstimmen.

das Wesen der experimentellen Druckverteilung richtig, wesentlich besser als beispielsweise die Oseen-Zeilon'sche Theorie, die von den zähen Flüssigkeiten ausgeht³. Die erste Linie stimmt naturgemäß im Bereich des Totwassers gut überein; auch die Ablösungsstelle ist gut getroffen. In der Nähe des Druckminimums gibt jedoch die Schmiedensche Strömung die bessere, ja auffallend gute Übereinstimmung.

Man kann dies so deuten, daß zu $p'_1 = -0,4$ nach (126) eine Einschnürung des Totwassers gehört, die die Übergeschwindigkeit an den Flanken hervorruft. Wie diese Einschnürung vor sich geht, ohne daß die äußere Kraft P nach (127) wirkt, ist nicht geklärt. Daß die Einschnürung stattfindet, wenn man die Strömung mit $p'_1 = -0,4$ zugrundelegt, ist durch die Übergeschwindigkeit an den Flanken eindeutig belegt. Man kann aber auch vermuten, daß die wirkliche Strömung im wesentlichen auf der Schmiedenschen beruht und nur durch Reibungseinflüsse abgeändert ist. Man müßte dann den Wert $p'_1 = -0,4$ noch als Nachbarwert des Vorzugswertes $p'_1 = 0$ auffassen, was zu den Betrachtungen von Ziff. 8 über die möglichen Totwasserdrücke passen würde. Welche von den beiden Lesarten den Vorzug verdient, kann noch nicht entschieden werden.

Die gute Übereinstimmung in der Ablösungsstelle wurde erzielt durch die Festlegung des in ihr begründeten Freiheitsgrades mit der Forderung minimalen Widerstandes. Möglicherweise löst sich also die turbulente Grenzschicht gar

³ Vgl. auch F. EISNER, Fußnote² von Seite 642.

nicht so ab, daß ein Grenzschichtparameter einen gewissen Wert annimmt, sondern so, daß der Gesamtwiderstand im Rahmen eines festen — durch die Totwasserauflösung festgelegten — Totwasserdruckes ein Minimum wird.

Bei rauhen Kreiszylindern⁴ geht der Widerstandsbeiwert mit zunehmender **Re**-Zahl rasch gegen einen bei $c_w = 1$ liegenden Grenzwert. Der Anstieg ist wesentlich steiler als es der zunehmenden Reibung entspricht. Es ist möglich, daß diese Strömungen durch die Rechnung E von Ziff. 6 ungefähr erfaßt werden, die den Totwasserdruck $p'_1 = -1$ und ungefähr minimalen Widerstand hat. Ihr Widerstand ist nach Tabelle 2 auch $c_w = 1,0$. Leider liegen hierzu keine Druckverteilungsmessungen vor, sodaß der Vergleich nur in den c_w erfolgen kann.

Es wäre natürlich wünschenswert, noch weitere und genauere Vergleiche durchzuführen und die angeschnittenen Vermutungen zu klären. Dazu sind aber spezielle Experimente nötig, die Druckverteilungen und vor allem Strömungsbilder im Bereich der Totwasserauflösung aufnehmen. Sie werden zweckmäßig für ganze Konturscharen durchgeführt, bei welchen sich der Totwasserdruck stetig ändern kann. Damit wird der Bereich zwischen den beiden Vorzugswerten erfaßt, und es kann sich zeigen, ob die Zwischenwerte, die wohl auch vorkommen werden, die vorangehenden Überlegungen widerlegen, oder ob sie sich irgendwie einordnen lassen.

Selbst wenn die Zwischenwerte sich als gleichberechtigt erweisen, ist doch der Einschnürungsfaktor c^*/c , der sich nur auf die Totwasserauflösung bezieht, wahrscheinlich allgemeinen Gesetzen wesentlich leichter zugänglich als der Totwasserdruck. Damit ist für weitere experimentelle und theoretische Arbeiten ein Ansatzpunkt gegeben, von dem aus das Widerstandsproblem für Strömungen mit Grenzschichtablösung einige Lösungsaussicht hat.

⁴ Wien-Harms, *Handbuch der Experimentalphysik*, Band 4, Teil 2. L. SCHILLER, *Hydro- und Aerodynamik*. Leipzig, S. 319.