Compatibilité des Équations de la Théorie Unitaire du Champ d'Einstein

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Collège de France, Paris

INTRODUCTION

Je me propose dans ce travail d'expliciter les démonstrations de résultats annoncés dans une publication antérieure¹ et relatifs à la structure mathématique et à l'intégration des équations du champ. J'adopte ici le même point de vue que celui que j'ai adopté en relativité générale², c'est-à-dire celui du problème de Cauchy et des théories de propagation.

Ce travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier chapitre qui est un chapitre introductif, j'expose brièvement les hypothèses, la formation des équations du champ et précise la forme des identités de conservation qui nous seront indispensables dans la suite. Le second chapitre est consacré au problème de Cauchy; j'y utilise d'une manière essentielle les résultats relatifs à la détermination de la connexion à partir du tenseur fondamental, résultats qui ont reçu leur forme la plus achevée dans les travaux de Hlavatý et dans le mémoire de Hlavatý et Sáenz³. Alors qu'en relativité générale, les calculs explicites peuvent être entrepris, ici deux théorèmes (§16 et §17) basés l'un sur les identités de conservation, l'autre sur l'existence de changements remarquables de coordonnées locales, fournissent sans calculs explicites des renseignements précieux sur la manière dont les premiers membres des équations font intervenir les inconnues. Grâce à ces théorèmes et aux relations du §19, le problème de Cauchy peut être entièrement analysé.

¹ Compatibilité des équations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger, C. R. Acad. Sc. **237**, 1953, p. 1383-1386.

² Cf. LICHNEROWICZ, Cours du Collège de France 1952-53 (multigraphié).

³ V. HLAVATÝ et A. W. SÁENZ, J. Rat. Mech. **2**, 1953, p. 528.

De son étude, il résulte que les surfaces d'onde du champ unitaire sont les solutions de l'équation⁴

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f \equiv l^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 \quad (l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)})$$

Il en résulte que les bicaractéristiques — ou rayons — sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique riemannienne de type hyperbolique normal

$$ds^2 = l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

où $l_{\alpha\beta}$ est le tenseur covariant associé à $l^{\alpha\beta}$. Je suis ainsi conduit à penser que c'est $l_{\alpha\beta}$ ou un tenseur proportionnel qui doit jouer le rôle de tenseur gravitationnel, et non pas le tenseur $h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$ comme on serait tenté de le penser.

Le sommaire de ce travail est le suivant:

⁴ Dans tout ce travail

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.— Les équations du champ de la théorie d'Einstein

I.— *Etude du tenseur $g_{\alpha\beta}$*

- 1.— Les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$
- 2.— Les tenseurs déduits par symétrisation et antisymétrisation.

II.— *Formation des équation du champ*

- 3.— La variété fondamentale V_4
- 4.— Quelques formules de dérivation
- 5.— Le principe variationnel
- 6.— Première forme des équations du champ
- 7.— Introduction d'une nouvelle connexion
- 8.— Nouvelle forme des équations du champ
- 9.— Tenseur contracté antisymétrique de courbure et tenseur d'Einstein de L
- 10.— Un théorème de symétrie
- 11.— Forme tensorielle des équations du champ

III.— *Les identités de conservation*

- 12.— Première forme des identités de conservation
- 13.— Seconde forme des identités de conservation

CHAPITRE II.— Le problème de Cauchy pour les équations du champ

- 14.— Les équations reliant le tenseur fondamental et la connexion
- 15.— Le problème de Cauchy
- 16.— Un théorème déduit des identités de conservation
- 17.— Un théorème sur les changements de coordonnées à la traversée de S
- 18.— Décomposition du problème de l'intégration des équations du champ
- 19.— Remarques sur la recherche des données de Cauchy
- 20.— Relations entre les dérivées d'indice 2 du tenseur fondamental et les dérivées des coefficients de la connexion
- 21.— L'intégration des équations du champ

CHAPITRE I. Les équations du champ de la théorie d'Einstein

I.- ÉTUDE DU TENSEUR $g_{\alpha\beta}$

1. Les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$. A partir d'un espace vectoriel T^4 à 4 dimensions, donnons-nous un tenseur réel covariant d'ordre 2 *ne présentant aucune propriété de symétrie* et satisfaisant à des hypothèses que nous allons préciser. Nous nous proposons en premier lieu de donner un certain nombre de résultats élémentaires concernant des tenseurs qu'on peut en déduire par symétrisation, antisymétrisation, et passage à un tenseur associé.

Sur le tenseur $g_{\alpha\beta}$ nous supposons

a) que $g = \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$

b) que la forme quadratique $\Phi(X) = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ est une forme non dégénérée de type hyperbolique normal à 1 carré positif et 3 carrés négatifs.

Comme $g \neq 0$ la matrice $(g_{\alpha\beta})$ est toujours inversible et admet une matrice inverse, notée $(g^{\alpha\beta})$, qui est telle que

$$(1-1) \quad g_{\alpha\rho} g^{\beta\rho} = g_{\rho\alpha} g^{\rho\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

$$(\delta_\alpha^\beta = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta, = 1 \text{ pour } \beta = \alpha)$$

Les $g^{\alpha\beta}$ sont manifestement les composantes d'un tenseur contravariant d'ordre 2.

2. Les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ sont dits des tenseurs *associés*. On a évidemment:

$$\det(g^{\alpha\beta}) = 1/g \neq 0$$

Dans la suite, nous désignerons par la même lettre d'appui – ici g – deux tenseurs associés l'un covariant, l'autre contravariant.

Nous introduirons dans la suite la densité tensorielle

$$(1-2) \quad g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}$$

On notera que:

$$|\det(g^{\alpha\beta})| = |g|^2 \frac{1}{|g|} = |g|$$

Il en résulte qu'à la donnée du tenseur $g_{\alpha\beta}$ ou du tenseur associé $g^{\alpha\beta}$, on peut substituer la donnée de la densité tensorielle $g^{\alpha\beta}$; on a par exemple:

$$g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{|\det(g^{\alpha\beta})|}}$$

2. Les tenseurs déduits par symétrisation et antisymétrisation. Nous poserons désormais

$$(2-1) \quad g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}; \quad g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}$$

où

$$(2-2) \quad h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}, \quad k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]}; \quad l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)} \quad m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}$$

sont des tenseurs soit symétriques, soit antisymétriques

Nous nous proposons d'étudier les relations existant entre les différents tenseurs ainsi introduits.

Observons d'abord que, d'après (2-1), la forme quadratique $\Phi(X)$ peut s'écrire

$$\Phi(X) = h_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$$

D'après l'hypothèse b), on a donc

$$h = \det (h_{\alpha\beta}) < 0$$

et en particulier différent de zéro. Nous introduirons dans la suite le tenseur associé $h^{\alpha\beta}$.

D'après (1-1), on a la relation évidente

$$(2-3) \quad g^{\alpha\beta} = g_{\lambda\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}$$

En la symétrisant, il vient:

$$l^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} + g_{\lambda\mu} g^{\lambda\beta} g^{\mu\alpha}) = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu} + g_{\mu\lambda})g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}$$

On a ainsi

$$(2-4) \quad l^{\alpha\beta} = h_{\lambda\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}$$

et on établirait de même que

$$(2-5) \quad l^{\alpha\beta} = h_{\lambda\mu} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu}$$

En antisymétrisant (2-3), il vient:

$$(2-6) \quad m^{\alpha\beta} = k_{\lambda\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} = k_{\lambda\mu} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu}$$

Posons d'autre part:

$$Y_\alpha = g_{\lambda\alpha} X^\lambda \quad X^\lambda = g^{\lambda\alpha} Y_\alpha$$

Pour X^λ et Y_α liés par ces relations, on voit que:

$$\Psi(Y) \equiv l^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta = h_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu \equiv \Phi(X)$$

Il en résulte que la forme quadratique

$$(2-7) \quad \Psi(Y) = g^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta = l^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta$$

est aussi non dégénérée, de type hyperbolique normal. En particulier $\det(l^{\alpha\beta}) < 0$.

On établirait de même que

$$(2-8) \quad \begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= l^{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} = l^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} \\ k_{\alpha\beta} &= m^{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} = m^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} \end{aligned}$$

II. — FORMATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP

3. La variété fondamentale V_4 . L'élément primitif de notre théorie est constitué par une variété espace-temps V_4 à 4 dimensions douée de la même structure de variété différentiable que la variété qui intervient en relativité générale: V_4 est supposé d'abord de classe C^2 ; on désignera par (x^α) (α , tout indice grec = 0, 1, 2, 3) un système de coordonnées admissible; dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles, on suppose de plus que les dérivées secondes du changement de coordonnées sont des fonctions de classe C^2 par morceaux. C'est ce que nous traduirons en disant que la variété V_4 est une variété différentiable de classe $(C^2, C^4 \text{ par morceaux})$.

Sur cette variété V_4 nous supposons définis deux éléments géométriques:

1° Un *champ de tenseurs* $g_{\alpha\beta}$ de classe $(C^1, C^3 \text{ par morceaux})$, c'est-à-dire dont les composantes sont continûment différentiables, les dérivées $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ étant des fonctions de classe C^2 par morceaux. En chaque point x de V_4 , le tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfait aux hypothèses du §1. En particulier le déterminant g est différent de zéro. Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est dit le *tenseur fondamental*.

2° Une *connexion affine* arbitraire dont les coefficients $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ sont continus et de classe C^2 par morceaux.

Ce sont ces éléments que nous allons astreindre aux "équations du champ" que nous allons déduire, par analogie avec la relativité générale ou avec la théorie de Jordan-Thiry, d'un principe variationnel.

4. Quelques formules de dérivation. Avant d'expliciter ce principe variationnel, nous nous proposons d'indiquer quelques formules élémentaires de dérivation relatives au tenseur $g_{\alpha\beta}$, au tenseur associé $g^{\alpha\beta}$ et au déterminant g .

Supposons que les $g_{\alpha\beta}$ soient des fonctions différentiables d'une variable u . De la relation

$$g^{\lambda\sigma} g_{\rho\sigma} = \delta_\rho^\lambda$$

on déduit par dérivation

$$(4-1) \quad \frac{dg^{\lambda\sigma}}{du} g_{\rho\sigma} + g^{\lambda\sigma} \frac{dg_{\rho\sigma}}{du} = 0$$

En multipliant les deux membres de la relation précédente par $g^{\rho\mu}$, il vient:

$$(4-2) \quad \frac{dg^{\lambda\mu}}{du} = -g^{\lambda\sigma} g^{\rho\mu} \frac{dg_{\rho\sigma}}{du}$$

De même de (4-1), on tire:

$$(4-3) \quad \frac{dg_{\rho\sigma}}{du} = -g_{\lambda\sigma} g_{\rho\mu} \frac{dg^{\lambda\mu}}{du}$$

Evaluons la dérivée logarithmique de $|g|$. D'après une formule bien connue sur la dérivée d'un déterminant, il vient:

$$(4-4) \quad \frac{d \log |g|}{du} = g^{\alpha\beta} \frac{dg_{\alpha\beta}}{du}$$

En remplaçant $dg_{\alpha\beta}/du$ par sa valeur tirée de (4-3), on a:

$$\frac{d \log |g|}{du} = -g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta} \frac{dg^{\lambda\mu}}{du}$$

soit

$$(4-5) \quad \frac{d \log |g|}{du} = -g_{\lambda\mu} \frac{dg^{\lambda\mu}}{du}$$

Nous utiliserons ces formules dans la suite. En particulier appliquons (4-4) et (4-5) au cas où $u = x^0$. Nous poserons

$$(4-6) \quad \gamma_\rho = \frac{\partial \rho \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} \partial_\rho \log |g|$$

Il vient ainsi

$$(4-7) \quad \gamma_\rho = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta}$$

5. Le principe variationnel. Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de la variété et varions arbitrairement le tenseur fondamental et la connexion de façon que les variations soient nulles au bord ∂C de la chaîne envisagée. Considérons la variation correspondante de l'intégrale à valeur scalaire:

$$(5-1) \quad I = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

où $R_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de Ricci de la connexion affine $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$.

Les équations du champ de la théorie sont celles qui définissent l'extremum de l'intégrale I , vis-à-vis de toutes variations du tenseur fondamental et de la connexion astreintes seulement à s'annuler au bord de C .

Evaluons la variation de I en distinguant la contribution due à la variation

de la connexion et celle due à la variation du tenseur fondamental. Il vient :

$$(5-2) \quad \delta I = \int_C g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 \\ + \int_C R_{\alpha\beta} \delta[g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}] dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3.$$

Nous poserons

$$(5-3) \quad \delta_1 I = \int_C g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

et

$$(5-4) \quad \delta_2 I = \int_C R_{\alpha\beta} \delta[g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}] dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Nous nous préoccupons d'abord d'évaluer $\delta_1 I$ en y faisant apparaître explicitement la variation $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ de la connexion affine.

6. Première forme des équations du champ. D'après une évaluation classique de la variation du tenseur de Ricci, on a¹

$$\delta R_{\alpha\beta} = D_\rho \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - D_\beta \delta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho - 2S_{\rho\beta}^\sigma \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho$$

On en déduit :

$$(6-1) \quad g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = D_\rho (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho) - D_\beta (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho) - D_\rho g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \\ + D_\beta g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho - 2S_{\rho\beta}^\sigma \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho g^{\alpha\beta}$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire le vecteur

$$(6-2) \quad A^\rho = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - g^{\alpha\rho} \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma$$

et nous noterons que la variation de la connexion étant nulle au bord de C , on a sur ce bord $A^\rho = 0$. La formule (6-1) devient alors

$$(6-3) \quad g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = D_\rho A^\rho - D_\rho g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho + D_\beta g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho - 2g^{\alpha\beta} S_{\rho\beta}^\sigma \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho.$$

Proposons-nous donc d'évaluer l'intégrale

$$J(\delta) = \int_C D_\rho A^\rho \cdot \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

On a :

$$\underline{D_\rho A^\rho \cdot \sqrt{|g|}} = (\partial_\rho A^\rho + \Gamma_{\rho\rho}^\rho A^\rho) \sqrt{|g|} = \partial_\rho (A^\rho \sqrt{|g|}) + (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) A^\rho \sqrt{|g|}$$

¹ D_ρ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion Γ ; $S_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{[\beta\gamma]}^\alpha$ et $S_\beta^\rho = S_{\beta\rho}^\rho$ (vecteur de torsion).

où γ_ρ est défini par (4-6). Il vient dans ces conditions:

$$J(\delta) = \int_C \partial_\rho (A^\rho \sqrt{|g|}) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 + \int_C (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) A^\rho \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Par application de la formule de Stokes, la première intégrale du second membre se transforme en une intégrale étendue au bord de C et qui est nulle puisque A^ρ est nul sur ce bord. On en déduit d'après (5-3) et (6-3)

$$(6-4) \quad \delta_1 I = - \int_C M \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

avec

$$(6-5) \quad M = D_\rho g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - D_\beta g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) A^\rho + 2g^{\alpha\beta} S_{\rho\beta}^\sigma \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho$$

où A^ρ est donné par (6-2). Proposons-nous de mettre en évidence le coefficient de $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ dans les différents termes du scalaire M . On a:

$$(6-6) \quad M = [D_\rho g^{\alpha\beta} - \delta_\rho^\beta D_\lambda g^{\alpha\lambda} - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} + \delta_\rho^\beta (\Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \gamma_\lambda) g^{\alpha\lambda} + 2g^{\alpha\sigma} S_{\rho\sigma}^\beta] \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho.$$

Etant donné un scalaire θ que nous allons choisir dans un instant, considérons les quantités:

$$G_\rho^{\alpha\beta}(\theta) = D_\rho g^{\alpha\beta} - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha\sigma} S_{\rho\sigma}^\beta + 2\theta \delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} S_\sigma$$

Par contraction il vient:

$$G_\lambda^{\alpha\lambda}(\theta) = D_\lambda g^{\alpha\lambda} - (\Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \gamma_\lambda) g^{\alpha\lambda} + 2g^{\alpha\sigma} S_\sigma (4\theta - 1)$$

On en déduit:

$$[G_\rho^{\alpha\beta}(\theta) - \delta_\rho^\beta G_\lambda^{\alpha\lambda}(\theta)] \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho = M + 2(\theta - 4\theta + 1) \delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} S_\sigma \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho$$

Nous prendrons donc $\theta = \frac{1}{3}$ et poserons

$$(6-7) \quad G_\rho^{\alpha\beta} = D_\rho g^{\alpha\beta} - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha\sigma} S_{\rho\sigma}^\beta + \frac{2}{3} \delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} S_\sigma$$

Grâce à l'introduction de ces quantités, on a la forme simple:

$$M = [G_\rho^{\alpha\beta} - \delta_\rho^\beta G_\lambda^{\alpha\lambda}] \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho$$

Ainsi, pour toute variation de la connexion affine qui s'annule sur ∂C , on a

$$(6-8) \quad \delta_1 I = - \int_C [G_\rho^{\alpha\beta} - \delta_\rho^\beta G_\lambda^{\alpha\lambda}] \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

D'autre part, d'après les considérations du §1, il revient au même d'imposer des variations arbitraires à $g_{\alpha\beta}$ ou $g^{\alpha\beta}$ et à $g^{\alpha\beta}$. Ainsi, pour une variation arbitraire de la densité tensorielle $g^{\alpha\beta}$, on a

$$(6-9) \quad \delta_2 I = \int_C R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Supposons que, sans varier le tenseur fondamental ou la densité tensorielle $g^{\alpha\beta}$, nous varions les coefficients de la connexion affine. Conformément au principe variationnel, on doit avoir $\delta I = \delta_1 I = 0$ pour toute variation de la connexion affine nulle au bord de C . D'après (6-8), on en déduit, par un raisonnement classique, que l'on doit avoir

$$(6-10) \quad G_\rho^{\alpha\beta} - \delta_\rho^\beta G_\lambda^{\alpha\lambda} = 0$$

Par contraction, il vient:

$$G_\lambda^{\alpha\lambda} - 4G_\lambda^{\alpha\lambda} = -3G_\lambda^{\alpha\lambda} = 0$$

Il en résulte que le système (6-10) obtenu est équivalent au système

$$(6-11) \quad G_\rho^{\alpha\beta} = 0$$

où les $G_\rho^{\alpha\beta}$ sont fournis par les équations (6-7).

Au contraire, si nous varions les $g^{\alpha\beta}$ sans varier la connexion affine, on doit avoir $\delta I = \delta_2 I = 0$ pour toute variation des $g^{\alpha\beta}$ nulle au bord de C . Il en résulte, d'après le même raisonnement classique, le système d'équations:

$$(6-12) \quad R_{\alpha\beta} = 0$$

L'ensemble des deux systèmes (6-11) et (6-12) constitue le "système des équation du champ." Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons transformer ces systèmes, principalement (6-11), de façon à obtenir un système d'équations du champ infiniment plus maniable.

7. Introduction d'une nouvelle connexion. Pour simplifier la forme des équations (6-11), nous allons substituer à la connexion initiale $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ une nouvelle connexion affine, de coefficients $L_{\beta\gamma}^\alpha$, définie par le lemme suivant:

Lemme.— *Etant donnée une connexion affine arbitraire $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, il existe une connexion affine et une seule $L_{\beta\gamma}^\alpha$ définissant le même parallélisme et dont le vecteur covariant de torsion est nul.*

En effet, soit

$$L_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + 2\delta_\beta^\alpha p_\gamma$$

une connexion affine définissant le même parallélisme que la connexion Γ . Son tenseur de torsion est:

$$\Sigma_{\beta\gamma}^\alpha = S_{\beta\gamma}^\alpha + \delta_\beta^\alpha p_\gamma - \delta_\gamma^\alpha p_\beta$$

et par suite son vecteur covariant de torsion est:

$$\Sigma_\beta = S_\beta + p_\beta - 4p_\beta = S_\beta - 3p_\beta$$

Pour que Σ_β soit nul, il faut et il suffit que:

$$p_\beta = \frac{1}{3}S_\beta$$

On en déduit que la seule connexion affine répondant à la question est:

$$(7-1) \quad L_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{2}{3}\delta_\beta^\alpha S_\gamma$$

et cette connexion est telle que:

$$(7-2) \quad 2\Sigma_\beta = L_{\beta\rho}^\rho - L_{\rho\beta}^\rho = 0$$

Ceci posé, explicitons les $G_\rho^{\alpha\beta}$ à l'aide de la nouvelle connexion $L_{\beta\gamma}^\alpha$. On a d'abord en explicitant les dérivées covariantes:

$$G_\rho^{\alpha\beta} = \partial_\rho g^{\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta g^{\alpha\sigma} + 2g^{\alpha\sigma} S_{\rho\sigma}^\beta - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho)g^{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} S_\sigma$$

En tenant compte de:

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\beta + 2S_{\rho\sigma}^\beta = \Gamma_{\rho\sigma}^\beta$$

il vient:

$$G_\rho^{\alpha\beta} = \partial_\rho g^{\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + \Gamma_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho)g^{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} S_\sigma$$

On en déduit en introduisant les L au lieu des Γ :

$$\begin{aligned} G_\rho^{\alpha\beta} = & \partial_\rho g^{\alpha\beta} + (L_{\sigma\rho}^\alpha - \frac{2}{3}\delta_\sigma^\alpha S_\rho)g^{\sigma\beta} + (L_{\rho\sigma}^\beta - \frac{2}{3}\delta_\rho^\beta S_\sigma)g^{\alpha\sigma} - (L_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho)g^{\alpha\beta} \\ & + \frac{2}{3}g^{\alpha\beta} S_\rho + \frac{2}{3}\delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma} S_\sigma. \end{aligned}$$

Après simplification, il vient:

$$(7-3) \quad G_\rho^{\alpha\beta} = \partial_\rho g^{\alpha\beta} + L_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + L_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} - (L_{\sigma\rho}^\sigma - \gamma_\rho)g^{\alpha\beta}.$$

Des équations de champ (6-11) soit $G_\rho^{\alpha\beta} = 0$, où les $G_\rho^{\alpha\beta}$ peuvent être fournies par les formules (7-3), on déduit immédiatement une expression de γ_ρ à l'aide des L . On a en effet comme conséquence de (6-11), en multipliant les deux membres de (7-3) par $g_{\alpha\beta}$

$$-2\gamma_\rho + L_{\sigma\rho}^\sigma + L_{\rho\sigma}^\sigma - 4(L_{\sigma\rho}^\sigma - \gamma_\rho) = 0,$$

Soit

$$\gamma_\rho = L_{\sigma\rho}^\sigma$$

d'après (7-2). Il en résulte que les équations (6-11) entraînent les équations:

$$(7-4) \quad \partial_\rho g^{\alpha\beta} + L_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + L_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} = 0$$

Inversement, donnons-nous une connexion affine $L_{\beta\gamma}^\alpha$ à vecteur de torsion nul et un vecteur covariant S_γ . Si les équations (7-4) sont satisfaites, on a, en multipliant les deux membres de (7-4) par $g_{\alpha\beta}$

$$(7-5) \quad 2\gamma_\rho = L_{\sigma\rho}^\sigma + L_{\rho\sigma}^\sigma$$

Si maintenant, l'on tient compte du fait que le vecteur de torsion de la connexion L est nul, il vient:

$$(7-6) \quad \gamma_\rho = L_{\sigma\rho}^\sigma$$

et pour

$$(7-7) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = L_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{2}{3}\delta_\beta^\alpha S_\gamma$$

on voit d'après (7-3), que les équations (6-11) sont satisfaites.

Ainsi le premier système des équations de champ (6-11) est équivalent à (7-4), où la connexion L est astreinte à admettre un vecteur de torsion nul.

8. Nouvelle forme des équations du champ. Nous allons nous efforcer désormais de substituer à la connexion $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ la connexion $L_{\beta\gamma}^\alpha$ qui satisfait aux équations (7-4) et admet un vecteur de torsion nul.

a) Compte-tenu de (7-4), on peut substituer aux quatre conditions (7-2), $\Sigma_\beta = 0$ quatre conditions intéressantes portant sur le tenseur fondamental. Considérons une connexion affine $L_{\beta\gamma}^\alpha$ satisfaisant à (7-4), mais sur le vecteur de torsion de laquelle nous ne faisons pas d'hypothèse. On a alors (7-5). De (7-4) on déduit par contraction

$$(8-1) \quad \partial_\rho g^{\rho\beta} + L_{\sigma\rho}^\rho g^{\sigma\beta} + L_{\rho\sigma}^\beta g^{\rho\sigma} = 0$$

L'autre contraction possible donne au contraire:

$$(8-2) \quad \partial_\rho g^{\beta\rho} + L_{\sigma\rho}^\beta g^{\sigma\rho} + L_{\rho\sigma}^\rho g^{\beta\sigma} = 0$$

En retranchant membre à membre il vient:

$$2\partial_\rho g^{[\rho\beta]} + L_{\rho\sigma}^\sigma g^{\rho\beta} - L_{\sigma\rho}^\sigma g^{\beta\rho} = 0$$

Or

$$L_{\rho\sigma}^\sigma = L_{\sigma\rho}^\sigma + \Sigma_\rho$$

On en déduit

$$\begin{aligned} L_{\rho\sigma}^\sigma g^{\rho\beta} - L_{\sigma\rho}^\sigma g^{\beta\rho} &= (L_{\sigma\rho}^\sigma + \Sigma_\rho)(l^{\rho\beta} + m^{\rho\beta}) - L_{\sigma\rho}^\sigma(l^{\rho\beta} - m^{\rho\beta}) \\ &= \Sigma_\rho l^{\rho\beta} + (2L_{\sigma\rho}^\sigma + \Sigma_\rho)m^{\rho\beta} \end{aligned}$$

soit d'après (7-5)

$$L_{\rho\sigma}^{\sigma} g^{\rho\beta} - L_{\sigma\rho}^{\sigma} g^{\beta\rho} = \Sigma_{\rho} l^{\rho\beta} + 2\gamma_{\rho} m^{\rho\beta}$$

On obtient ainsi

$$(8-3) \quad \partial_{\rho} g^{[\rho\beta]} + \gamma_{\rho} g^{[\rho\beta]} = -\frac{1}{2}\Sigma_{\rho} l^{\rho\beta}$$

Comme $\det(l^{\rho\beta}) \neq 0$ (voir §2), il en résulte que pour que le vecteur de torsion Σ_{ρ} de la connexion envisagée soit nul, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(8-4) \quad \partial_{\rho} g^{[\rho\beta]} + \gamma_{\rho} g^{[\rho\beta]} = 0$$

soit

$$\partial_{\rho} g^{[\rho\beta]} = 0$$

Ainsi la recherche d'une connexion $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ satisfaisant au premier système des équations de champ est équivalent au problème suivant: trouver une connexion $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$ satisfaisant aux équations

$$(8-5) \quad \partial_{\rho} g^{\alpha\beta} + L_{\sigma\rho}^{\alpha} g^{\sigma\rho} + L_{\rho\sigma}^{\beta} g^{\alpha\sigma} = 0$$

les dérivées du tenseur fondamental étant supposées satisfaire aux 4 relations:

$$(8-6) \quad \partial_{\rho} g^{[\rho\beta]} = 0$$

La formule

$$(8-7) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = L_{\alpha\beta}^{\rho} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha}^{\rho} S_{\beta},$$

où S_{β} est un vecteur covariant arbitraire, fournit alors la connexion cherchée.

Aux formules (8-5), on peut substituer les formules équivalentes obtenues en multipliant les deux membres de (8-5) par $g_{\lambda\beta} g_{\alpha\mu}$. D'après (4-3), il vient ainsi:

$$(8-8) \quad \partial_{\rho} g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\rho}^{\sigma} g_{\sigma\mu} - L_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\lambda\sigma} = 0$$

b) Désignons par $P_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la connexion L . Il est aisé d'évaluer le tenseur $R_{\alpha\beta}$ à partir de $P_{\alpha\beta}$. On a en effet:

$$P_{\alpha\beta} = \partial_{\rho} L_{\alpha\beta}^{\rho} - \partial_{\beta} L_{\alpha\rho}^{\rho} + L_{\rho\sigma}^{\sigma} L_{\alpha\beta}^{\rho} - L_{\rho\beta}^{\sigma} L_{\alpha\sigma}^{\rho}$$

D'autre part, d'après (8-7) il vient:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \partial_{\rho}(L_{\alpha\beta}^{\rho} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha}^{\rho} S_{\beta}) - \partial_{\beta}(L_{\alpha\rho}^{\rho} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha}^{\rho} S_{\rho}) \\ &\quad + (L_{\rho\sigma}^{\sigma} - \frac{2}{3}\delta_{\rho}^{\sigma} S_{\sigma})(L_{\alpha\beta}^{\rho} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha}^{\rho} S_{\beta}) - (L_{\rho\beta}^{\sigma} - \frac{2}{3}\delta_{\rho}^{\sigma} S_{\beta})(L_{\alpha\sigma}^{\rho} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha}^{\rho} S_{\sigma}) \end{aligned}$$

On en déduit:

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha) \\ - \frac{2}{3}(L_{\alpha\beta}^\rho S_\rho + L_{\alpha\sigma}^\sigma S_\beta - L_{\alpha\beta}^\sigma S_\sigma - L_{\alpha\sigma}^\sigma S_\beta + \frac{2}{3}S_\alpha S_\beta - \frac{2}{3}S_\alpha S_\beta)$$

Soit

$$(8-9) \quad R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$$

Il en résulte qu'on peut substituer aux équations (6-12) portant sur la connexion Γ les équations

$$(8-10) \quad P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha) = 0$$

c) Nous sommes ainsi conduits à adopter comme nouvelles grandeurs déterminant le champ unitaire, outre le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, la connexion affine a priori arbitraire $L_{\beta\gamma}^\alpha$ et le vecteur covariant S_α . Les équations du champ sont alors fournies par les équations (8-6), (8-8) et (8-10).

Les grandeurs du champ comprennent 16 $g_{\alpha\beta}$, 64 $L_{\alpha\beta}^\rho$ et 4 S_α et nous disposons effectivement de 4 équations (8-6), de 64 équations (8-8) et de 16 équations (8-10). Nous établirons ultérieurement que ces équations ne sont pas indépendantes, mais qu'il existe 4 "identités de conservation" qui assurent, exactement comme en relativité générale, le jeu des changements de coordonnées admissibles.

On peut remarquer que le système des équations (8-10) est équivalent à l'ensemble des deux systèmes

$$(8-11) \quad P_{(\alpha\beta)} = 0$$

et

$$(8-12) \quad P_{[\alpha\beta]} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$$

Si P désigne la forme différentielle extérieure quadratique de coefficients $P_{[\alpha\beta]}$, il vient manifestement comme conséquence de (8-12)

$$(8-13) \quad dP = 0$$

soit sous forme explicite

$$\partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} + \partial_\beta P_{[\gamma\alpha]} + \partial_\gamma P_{[\alpha\beta]} = 0$$

Inversement l'équation (8-13) n'entraîne que l'existence locale d'un potentiel-vecteur. C'est pourquoi, il convient de conserver les équations (8-12) de préférence à (8-13).

9. Tenseur contracté antisymétrique de courbure et tenseur d'Einstein de L . Considérons une solution $g_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}^\rho$ des équations (8-6) et (8-8). De ces équations

résulte, comme nous l'avons vu au §8, que le vecteur de torsion Σ_ρ de la connexion L est nul et par suite, d'après (7-5), que l'on a

$$(9-1) \quad \gamma_\rho = \frac{\partial \rho \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = L_{\sigma\rho}^\sigma = L_{\rho\sigma}^\sigma$$

Si la variété V_4 est orientable, il existe ainsi sur V_4 une 4-forme différentielle extérieure

$$(9-2) \quad \eta = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

qui est à dérivée covariante nulle dans la connexion $L_{\alpha\beta}^\rho$ et aussi dans la connexion symétrique associée $L_{(\alpha\beta)}^\rho$. Dans tous les cas, d'après (9-1), les tenseurs contractés antisymétriques de courbure $V_{\lambda\mu}$ et $W_{\lambda\mu}$ relatifs aux connexions $L_{\alpha\beta}^\rho$ et $L_{(\alpha\beta)}^\rho$ sont identiquement nuls:

$$(9-3) \quad V_{\lambda\mu} = 0 \quad W_{\lambda\mu} = 0$$

Nous désignerons dans la suite par d_μ la dérivation covariante relative à la connexion $L_{\lambda\mu}^\rho$. Si $E_{\lambda\mu}$ est le tenseur d'Einstein de cette connexion, la formule

$$E_{\lambda\mu} = P_{\lambda\mu} + d_\mu \Sigma_\lambda - W_{\lambda\mu}$$

se réduit, sous les conditions (8-6) et (8-8) à:

$$(9-4) \quad E_{\lambda\mu} = P_{\lambda\mu}$$

D'autre part, sous les mêmes conditions (voir plus bas),

$$E_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(P_{\lambda\mu} + \bar{P}_{\mu\lambda}) - \frac{1}{2}(\partial_\lambda \Sigma_\mu - \partial_\mu \Sigma_\lambda) = \frac{1}{2}(P_{\lambda\mu} + \bar{P}_{\mu\lambda})$$

On en déduit qu'on a aussi

$$(9-5) \quad \bar{P}_{\mu\lambda} = P_{\lambda\mu}$$

On voit en particulier, d'après (9-4), qu'on peut substituer aux équations (8-10) les équations:

$$(9-6) \quad E_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha) = 0$$

10. Un théorème de symétrie. Au tenseur $g_{\alpha\beta}$, faisons correspondre le tenseur:

$$(10-1) \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = h_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta}$$

Le tenseur $\bar{g}_{\alpha\beta}$ satisfait manifestement aux mêmes hypothèses que le tenseur $g_{\alpha\beta}$; en particulier $\bar{g} = \det(\bar{g}_{\alpha\beta}) = g \neq 0$. Le tenseur associé est:

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} = l^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$$

A toute connexion affine $L_{\alpha\beta}^\rho$, nous pouvons attacher la connexion affine de coefficients:

$$(10-2) \quad \bar{L}_{\alpha\beta}^\rho = L_{\beta\alpha}^\rho$$

Si $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho$ désigne la connexion affine qui correspond ainsi à $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$, son tenseur de torsion est :

$$\bar{S}_{\alpha\beta}^\rho = -S_{\alpha\beta}^\rho$$

et par suite son vecteur de torsion est :

$$(10-3) \quad \bar{S}_\alpha = -S_\alpha$$

Cela posé, nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

Théorème.— Si $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\rho, S_\alpha)$ définissent une solution des équations du champ (8-6) (8-8) (8-10), il en est de même de $(\bar{g}_{\alpha\beta}, \bar{L}_{\alpha\beta}^\rho, \bar{S}_\alpha)$

Les équations du champ sont, comme nous l'avons vu, définies par l'ensemble des trois systèmes :

$$(10-4) \quad \partial_\rho g^{[\rho\beta]} = 0$$

$$(10-5) \quad \partial_\rho g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - L_{\rho\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma} = 0$$

$$(10-6) \quad P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha) = 0$$

Si $(\bar{g}_{\alpha\beta}, \bar{L}_{\alpha\beta}^\rho, \bar{S}_\alpha)$ est l'ensemble des grandeurs déduites de la solution $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\rho, S_\alpha)$ par les opérations que nous venons d'introduire, on a d'abord, d'après (10-4), puisque $\bar{g} = g$

$$(10-7) \quad \partial_\rho \bar{g}^{[\rho\beta]} = \partial_\rho g^{[\rho\beta]} = 0$$

D'autre part :

$$\partial_\rho \bar{g}_{\lambda\mu} - \bar{L}_{\lambda\rho}^\sigma \bar{g}_{\sigma\mu} - \bar{L}_{\rho\mu}^\sigma \bar{g}_{\lambda\sigma} = \partial_\rho g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - L_{\rho\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma}.$$

Or le second membre ne diffère du premier membre de (10-5) que par l'échange des lettres λ et μ . On en déduit :

$$(10-8) \quad \partial_\rho \bar{g}_{\lambda\mu} - \bar{L}_{\lambda\rho}^\sigma \bar{g}_{\sigma\mu} - \bar{L}_{\rho\mu}^\sigma \bar{g}_{\lambda\sigma} = 0$$

Enfin, comme d'après (9-5)

$$\bar{P}_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$$

il vient

$$(10-9) \quad \bar{P}_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \bar{S}_\beta - \partial_\beta \bar{S}_\alpha) = P_{\beta\alpha} - \frac{2}{3}(\partial_\beta S_\alpha - \partial_\alpha S_\beta) = 0$$

d'après (10-6). Notre théorème est donc démontré. C'est à la propriété traduite par ce théorème qu'Einstein attache le nom de "pseudo-hermiticité".

11. Forme tensorielle des équations du champ. Il est aisé de mettre sous

forme tensorielle le premier groupe (10-4) et (10-5) des équations du champ. A cet effet, nous sommes conduits à introduire le tenseur :

$$(11-1) \quad F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} g^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \sqrt{|g|} m^{\alpha\beta}$$

où $\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}$ est l'indicateur classique de permutation. Nous désignerons par F la forme quadratique extérieure définie par $F_{\lambda\mu}$. Pour évaluer commodément sa différentielle extérieure dF , calculons :

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\nu F_{\lambda\mu} = \frac{1}{4} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \partial_\nu g^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta}^{\nu\rho} \partial_\nu g^{[\alpha\beta]}$$

soit :

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\nu F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \partial_\alpha g^{[\alpha\rho]}$$

On en déduit que le système (10-4) est équivalent à :

$$(11-2) \quad dF = 0$$

D'autre part évaluons la dérivée covariante $d_\rho g_{\lambda\mu}$ du tenseur fondamental dans la connexion L . Il vient :

$$d_\rho g_{\lambda\mu} = \partial_\rho g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - L_{\mu\rho}^\sigma g_{\lambda\sigma}$$

On en déduit que les équations (10-5) peuvent se mettre sous la forme :

$$d_\rho g_{\lambda\mu} + (L_{\mu\rho}^\sigma - L_{\rho\mu}^\sigma) g_{\lambda\sigma} = 0$$

soit :

$$(11-3) \quad d_\rho g_{\lambda\mu} = 2S_{\rho\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$$

III.- LES IDENTITÉS DE CONSERVATION

12. Première forme des identités de conservation. Le fait d'employer, pour former les équations du champ, un procédé variationnel portant sur l'intégrale d'une densité scalaire offre deux avantages. Ce procédé conduit à des équations invariantes par les changements de coordonnées admissibles et les premiers membres satisfont automatiquement à 4 identités de conservation que nous allons former par une méthode dont le principe remonte à Hermann Weyl.

Reprenons l'intégrale

$$I = \int_c R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 = \int_c R \eta$$

où l'on a posé :

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \quad \eta = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Considérons sur la chaîne C un champ de vecteurs arbitraires ξ^ρ nuls au bord de C . Ce champ définit une transformation infinitésimale; $X(R\eta)$ désignant la dérivée de Lie de la forme $R\eta$, nous poserons:

$$XI = \int_C X(R\eta)$$

Pour la dérivée de Lie du tenseur $g^{\alpha\beta}$, on a

$$(12-1) \quad Xg^{\alpha\beta} = \xi^\rho \partial_\rho g^{\alpha\beta} - g^{\lambda\beta} \partial_\lambda \xi^\alpha - g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda \xi^\beta$$

On en déduit d'après la formule de dérivation logarithmique de g :

$$\frac{X\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta} Xg^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\xi^\rho g_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta} - 2\partial_\lambda \xi^\lambda]$$

soit:

$$(12-2) \quad \frac{X\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \xi^\rho \gamma_\rho + \partial_\rho \xi^\rho = \frac{\partial_\rho (\xi^\rho \sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} X(R\eta) &= (\sqrt{|g|} XR + RX\sqrt{|g|}) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 \\ &= [\xi^\rho \sqrt{|g|} \cdot \partial_\rho R + R\partial_\rho (\xi^\rho \sqrt{|g|})] dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3. \end{aligned}$$

soit:

$$X(R\eta) = \partial_\rho (\xi^\rho R\sqrt{|g|}) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

On a ainsi

$$XI = \int_C \partial_\rho (\xi^\rho R\sqrt{|g|}) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Par application de la formule de Stokes à l'intégrale du second membre, on transforme cette intégrale en une intégrale étendue au bord de C qui est nulle puisque, sur ∂C , $\xi^\rho = 0$. On a donc $XI = 0$ pour tout champ satisfaisant à l'hypothèse faite:

Soit $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\rho)$ une solution des équations (10-4) et (10-5). S_α désignant un vecteur covariant arbitraire, nous avons vu qu'on en déduit une connexion affine

$$(12-3) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\rho = L_{\alpha\beta}^\rho - \frac{2}{3}\delta_\alpha^\rho S_\beta$$

satisfaisant aux équations

$$(12-4) \quad G_\rho^{\alpha\beta} = 0$$

Supposons que le champ ξ s'annule au bord de C ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. On a sur ∂C

$$X\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = 0$$

D'après (6-8), on a sous ces hypothèses

$$\int_C XR_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 = 0$$

et XI se réduit par suite à:

$$XI = \int_C R_{\alpha\beta} Xg^{\alpha\beta} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Or en vertu de (12-1) et (12-2), il vient:

$$Xg^{\alpha\beta} = \xi^{\rho} \partial_{\rho} g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \partial_{\rho} \xi^{\rho} - g^{\lambda\beta} \partial_{\lambda} \xi^{\alpha} - g^{\alpha\lambda} \partial_{\lambda} \xi^{\beta}$$

et par suite:

$$(12-5) \quad R_{\alpha\beta} Xg^{\alpha\beta} = \xi^{\rho} R_{\alpha\beta} \partial_{\rho} g^{\alpha\beta} + \partial_{\rho} \xi^{\rho} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - (R_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma\rho} g^{\sigma\lambda}) \partial_{\lambda} \xi^{\rho}.$$

Nous poserons dans la suite:

$$(12-6) \quad 2L_{\rho}^{\lambda} = R_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma\rho} g^{\sigma\lambda} \quad 2\mathfrak{L}_{\rho}^{\lambda} = R_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma\rho} g^{\sigma\lambda}$$

On en déduit par contraction:

$$(12-7) \quad L_{\tau}^{\tau} = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \quad \mathfrak{L}_{\tau}^{\tau} = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

On obtient ainsi:

$$\partial_{\rho} \xi^{\rho} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \partial_{\rho} (\xi^{\rho} \mathfrak{L}_{\tau}^{\tau}) - \xi^{\rho} \partial_{\rho} \mathfrak{L}_{\tau}^{\tau}$$

La relation (12-5) peut alors être mise sous la forme:

$$R_{\alpha\beta} Xg^{\alpha\beta} = \partial_{\lambda} (\xi^{\lambda} \mathfrak{L}_{\tau}^{\tau} - 2\xi^{\rho} \mathfrak{L}_{\rho}^{\lambda}) + 2\xi^{\rho} \partial_{\lambda} (\mathfrak{L}_{\rho}^{\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\rho}^{\lambda} \mathfrak{L}_{\tau}^{\tau}) + \xi^{\rho} R_{\alpha\beta} \partial_{\rho} g^{\alpha\beta}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire le tenseur et la densité tensorielle:

$$(12-8) \quad M_{\rho}^{\lambda} = L_{\rho}^{\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\rho}^{\lambda} L_{\tau}^{\tau} \quad \mathfrak{M}_{\rho}^{\lambda} = \mathfrak{L}_{\rho}^{\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\rho}^{\lambda} \mathfrak{M}_{\tau}^{\tau}$$

Il vient:

$$R_{\alpha\beta} Xg^{\alpha\beta} = -2\partial_{\lambda} (\xi^{\rho} \mathfrak{M}_{\rho}^{\lambda}) + 2\xi^{\rho} \partial_{\lambda} \mathfrak{M}_{\rho}^{\lambda} + \xi^{\rho} R_{\alpha\beta} \partial_{\rho} g^{\alpha\beta}$$

Or par application de la formule de Stokes:

$$\int_C \partial_{\lambda} (\xi^{\rho} \mathfrak{M}_{\rho}^{\lambda}) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 = 0$$

Il en résulte:

$$XI = 2 \int_c \xi^\rho [\partial_\lambda \mathfrak{M}_\rho^\lambda + \tfrac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta}] dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

Comme $XI = 0$ quels que soient les ξ^ρ satisfaisant aux hypothèses faites, il résulte d'un raisonnement classique que l'on a nécessairement:

$$(12-9) \quad \partial_\lambda \mathfrak{M}_\rho^\lambda + \tfrac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta} = 0$$

Nous avons ainsi établi que *les identités (12-9) sont satisfaites pour tout ensemble $(g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^\rho)$ déduit par (12-3) d'une solution $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\rho)$ des équations (10-4) (10-5); M_ρ^λ est formé à partir de $g^{\alpha\beta}$ et du tenseur de Ricci par (12-6) et (12-8).*

13. Seconde forme des identités de conservation. $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\rho)$ désignant toujours une solution du système (10.4), (10.5), partons maintenant de l'intégrale

$$J = \int_c P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$$

La connexion L admettant un vecteur de torsion nul, on a encore

$$\int_c X P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 = 0$$

On en déduit:

$$XJ = \int_c P_{\alpha\beta} X g^{\alpha\beta} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 = 0$$

et un raisonnement identique au précédent conduit à une nouvelle forme des identités de conservation (12-9). Nous poserons:

$$(13-1) \quad 2H_\rho^\lambda = P_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} + P_{\sigma\rho} g^{\sigma\lambda} \quad 2\mathfrak{H}_\rho^\lambda = P_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} + P_{\sigma\rho} g^{\sigma\lambda}$$

et

$$(13-2) \quad K_\rho^\lambda = H_\rho^\lambda - \tfrac{1}{2} \delta_\rho^\lambda H_\tau^\tau \quad \mathfrak{K}_\rho^\lambda = \mathfrak{H}_\rho^\lambda - \tfrac{1}{2} \delta_\rho^\lambda \mathfrak{H}_\tau^\tau$$

Pour toute solution $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\rho)$ des équations (10-4) et (10-5), on obtient ainsi les 4 identités

$$(13-3) \quad \partial_\lambda \mathfrak{K}_\rho^\lambda + \tfrac{1}{2} P_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta} = 0$$

On peut exprimer H_ρ^λ plus commodément en écrivant

$$2H_\rho^\lambda = [P_{(\rho\sigma)} + P_{[\rho\sigma}][g^{(\lambda\sigma)} + g^{[\lambda\sigma]}] + [P_{(\rho\sigma)} - P_{[\rho\sigma}][g^{(\lambda\sigma)} - g^{[\lambda\sigma]}]$$

Après réduction, il vient:

$$(13-4) \quad H_\rho^\lambda = P_{(\rho\sigma)} g^{(\lambda\sigma)} + P_{[\rho\sigma]} g^{[\lambda\sigma]}$$

On notera que comme

$$P_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$$

on a

$$H_\rho^\lambda = L_\rho^\lambda + \frac{2}{3}(\partial_\rho S_\sigma - \partial_\sigma S_\rho)g^{[\lambda\sigma]}$$

On en déduit

$$K_\rho^\lambda = M_\rho^\lambda + S_\rho^\lambda$$

avec

$$S_\rho^\lambda = \frac{2}{3}[(\partial_\rho S_\sigma - \partial_\sigma S_\rho)g^{[\lambda\sigma]} - \frac{1}{2}\delta_\rho^\lambda(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)g^{[\alpha\beta]}].$$

On voit aisément d'une manière directe que, pour tout vecteur S_α , on a l'identité:

$$\partial_\lambda(S_\rho^\lambda \sqrt{|g|}) + \frac{1}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha) \partial_\rho g^{[\alpha\beta]} = 0$$

Si $g_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique et $L_{\alpha\beta}^\rho$ la connexion riemannienne associée, on vérifie immédiatement que les identités (13-3) se réduisent aux identités classiques de conservation de la relativité générale.

CHAPITRE II. Le problème de Cauchy pour les équations du champ

14. Les équations reliant le tenseur fondamental et la connexion. Parmi les équations du champ explicitées en (10-4), (10-5) et (10-6), préoccupons-nous d'abord des équations (10-5) soit

$$(14-1) \quad \partial_\rho g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - L_{\rho\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma} = 0$$

qui relie le tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$ et ses dérivées du premier ordre avec la connexion affine $L_{\alpha\beta}^\rho$. Il est clair que ces équations constituent une extension au cas d'un tenseur $g_{\lambda\mu}$ non symétrique et d'une connexion non symétrique des relations classiques qui déterminent, à partir de la métrique, les coefficients d'une connexion riemannienne.

Etant donné, sur une variété V_n , un champ de tenseurs $g_{\lambda\mu}$, considérons le système des équations (14-1) comme un système d'équations où les coefficients de la connexion sont les inconnues. Par des calculs assez longs dans le détail desquels je n'entrerai pas ici, on a pu établir que ce système admet, sauf dans des cas exceptionnels une solution unique¹. Dans le cas de notre variété V_4 et pour un tenseur $g_{\lambda\mu}$ satisfaisant aux hypothèses faites au §1, Hlavatý et Sáenz² ont montré que le seul cas exceptionnel est celui où l'on a simultanément

$$(14-2) \quad k = \det (k_{\lambda\mu}) = 0 \quad g = 2h$$

Si nous écartons ce cas dans la suite, nous pouvons affirmer que le système (14-1) relatif à nos hypothèses admet une solution et une seule. Nous sommes ainsi amenés à introduire comme grandeurs définissant le champ le tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$ et le vecteur covariant S_α , ces grandeurs satisfaisant aux équations:

$$(14-3) \quad \partial_\rho g^{\{\rho\beta\}} = 0$$

$$(14-4) \quad P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha) = 0$$

où les $L_{\beta\gamma}^\alpha$ sont considérés comme les fonctions des $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées premières définies par la solution unique du système (14-1).

15. Le problème de Cauchy pour les équations (14-3) (14-4). Nous sommes ainsi amenés à étudier le problème suivant purement local qui généralise le problème de Cauchy de la relativité générale³

¹ Voir HLAVATÝ, Journ. of Rat. Mech. and Anal. **2**, p. 2-52 (1953); voir aussi M.-A. TONNELAT, Journ. de Phys. **12**, p. 81-88 (1951).

² HLAVATÝ et SÁENZ, Journ. of Rat. Mech. and Anal. **2**, p. 523-536 (1953).

³ Cf. LICHNEROWICZ, Cours du Collège de France 1952-53 (multigraphié) §14.

Problème de Cauchy.— Étant données, sur une hypersurface S , les composantes du tenseur fondamental et leurs dérivées premières, ainsi que les composantes du vecteur covariant S_α , déterminer au voisinage de S le tenseur fondamental et le vecteur S_α supposés satisfaire aux équations (14-3) et (14-4).

Nous supposons que l'hypersurface S est localement représentée par l'équation $x^0 = 0$ et qu'elle satisfait à la relation

$$(15-1) \quad g^{00} \neq 0$$

Il est aisé d'interpréter géométriquement cette hypothèse. Si S est représentée localement par l'équation $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$, cette hypothèse exprime que

$$(15-2) \quad \Delta_1 f = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = l^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f$$

est différent de zéro. Si $l_{\alpha\beta}$ représente le tenseur associé du tenseur $l^{\alpha\beta}$, cette relation exprime donc que l'hypersurface S n'est pas tangente au cône C_x d'équation

$$(C_x) \quad l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$$

$\Delta_1 f$ n'est d'ailleurs autre que le paramètre différentiel du premier ordre de la fonction f dans la métrique de type hyperbolique normal

$$(15-3) \quad ds^2 = l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Nous ferons dans la suite la convention suivante

$$i, j, \text{ tout indice latin} = 1, 2, 3$$

Cela posé, nous établirons le théorème suivant:

Théorème.— Au voisinage d'une hypersurface S représentée localement par $x^0 = 0$ et telle que l'on ait $g^{00} \neq 0$, la connaissance du système des quantités g_{ij} , $g^{[0i]}$, $g^{(0\lambda)}$ est équivalente à celle du tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$.

Considérons le système de coordonnées locales pour lequel S est localement représenté par $x^0 = 0$. Dans un certain voisinage dans lequel nous nous placerons on a $g^{00} \neq 0$. Observons d'abord que la donnée des quantités g_{ij} , $g^{[0i]}$, $g^{(0\lambda)}$ entraîne celle des quantités g_{ij} , g^{0j} , g^{j0} , $g^{00} \neq 0$. Il nous faut donc montrer que la donnée de ces quantités entraîne celle des composantes g_{0j} , g_{j0} , g_{00} . Des relations:

$$g^{00} g_{0j} + g^{i0} g_{ij} = 0, \quad g^{00} g_{j0} + g^{0i} g_{ji} = 0, \quad g^{00} g_{00} + g^{0i} g_{0i} = 1$$

on déduit par multiplication par $\sqrt{|g|}$

$$(15-4) \quad g^{00} g_{0j} + g^{i0} g_{ij} = 0 \quad g^{00} g_{j0} + g^{0i} g_{ji} = 0$$

et

$$(15-5) \quad g^{00} g_{00} + g^{0i} g_{0i} = \sqrt{|g|}$$

Les relations (15-4) où $g^{00} \neq 0$ nous fournissent les valeurs des g_{0j} et g_{j0} . D'autre

part on peut observer que $\sqrt{|g|}$ est donné par la relation :

$$\sqrt{|g|} = \left| \frac{\det(g_{ij})}{g^{00}} \right|$$

On peut alors déduire de (15-5) la valeur de g_{00} . Notre théorème est donc établi.

Nous sommes ainsi amenés à prendre pour données de Cauchy sur l'hyper-surface S les valeurs sur S des grandeurs suivantes

$$(15-6) \quad g_{ij}, g^{[0i]}, g^{(0\lambda)}, \partial_0 g_{ij}, \partial_0 g^{(0\lambda)}, S_i, S_0.$$

Comme nous le verrons, la valeur sur S des quantités $\partial_{00} S_0, \partial_{000} S_0$, etc. . . . ne résulte pas des équations du champ. C'est pourquoi, il semble indiqué d'astreindre le vecteur S_α à une condition auxiliaire invariante, par exemple :

$$(15-7) \quad \partial_\alpha (g^{(\alpha\beta)} S_\beta \sqrt{|g|}) = 0$$

C'est ce que nous ferons dans la suite.

16. Un théorème déduit des identités de conservation. Des identités de conservation (13-3), nous allons déduire le théorème suivant.

Théorème.— Pour toute solution du système (14-3), les quatre quantités K_ρ^0 s'expriment uniquement en fonction des quantités $g_{ij}, g^{[0i]}, g^{(0\lambda)}, \partial_0 g_{ij}, \partial_0 g^{(0\lambda)}$ et de leurs dérivées par rapport aux variables (x^k) .

En effet tout d'abord les quantités $\partial_0 g^{[0i]}$ peuvent, à l'aide des équations (14-3), s'exprimer au moyen de $\partial_k g^{[k i]}$. D'autre part, les coefficients de la connexion étant des fonctions des composantes du tenseur fondamental et de leurs dérivées premières, ou des quantités $g_{ij}, g^{[0i]}, g^{(0\lambda)}$ et de leurs dérivées premières, les composantes $\mathfrak{R}_\rho^\lambda$ (comme les composantes $P_{\alpha\beta}$) sont a priori des fonctions des quantités suivantes :

$$(16-1) \quad \mathfrak{R}_\rho^\lambda = \Phi_\rho^\lambda [g_{ij}, g^{[0i]}, g^{(0\lambda)}, \partial_k g_{ij}, \partial_k g^{[0i]}, \partial_k g^{(0\lambda)}, \partial_{kl} g_{ij}, \partial_{kl} g^{[0i]}, \\ \partial_{kl} g^{(0\lambda)}, \partial_0 g_{ij}, \partial_0 g^{(0\lambda)}, \partial_{0k} g_{ij}, \partial_{0k} g^{(0\lambda)}, \partial_{00} g_{ij}, \partial_{00} g^{(0\lambda)}]$$

Considérons les quatre quantités $\mathfrak{R}_\rho^0$. Les identités de conservation (13-3) peuvent se mettre sous la forme :

$$\partial_0 \mathfrak{R}_\rho^0 = -\partial_k \mathfrak{R}_\rho^k + \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta}$$

Il en résulte que les quatre quantités $\partial_0 \mathfrak{R}_\rho^0$ ne dépendent que des arguments des fonctions Φ_ρ^λ et des dérivées premières de ces arguments par rapport aux x^k . Ces quantités sont ainsi indépendantes des arguments $\partial_{000} g_{ij}$ et $\partial_{000} g^{(0\lambda)}$ dont les valeurs numériques sur S sont arbitraires. On en déduit les identités :

$$\frac{\partial \Phi_\rho^0}{\partial (\partial_{00} g_{ij})} \equiv 0 \quad \frac{\partial \Phi_\rho^0}{\partial (\partial_{00} g^{(0\lambda)})} \equiv 0$$

Les $\mathfrak{R}_\rho^0$ et par suite les K_ρ^0 ne dépendent que des arguments indiqués dans notre énoncé. Ainsi pour toute solution de (14-3), on a

$$(16-2) \quad K_\rho^0 = \Psi_\rho^0 [g_{ij}, \mathfrak{g}^{[0i]}, \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \partial_k g_{ij}, \partial_k \mathfrak{g}^{[0i]}, \partial_k \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \partial_{kl} g_{ij}, \partial_{kl} \mathfrak{g}^{[0i]}, \\ \partial_{kl} \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \partial_0 g_{ij}, \partial_0 \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \partial_{0k} g_{ij}, \partial_{0k} \mathfrak{g}^{(0\lambda)}]$$

17. Un théorème sur les changements de coordonnées à la traversée de S . Notre étude purement locale est effectuée dans le domaine d'un certain système de coordonnées. Mais la donnée sur S , dans le domaine envisagé, des données de Cauchy laisse subsister la possibilité de changements de coordonnées conservant les valeurs numériques des coordonnées de tout point de S ainsi que les données de Cauchy. Nous sommes ainsi conduits à considérer, comme en relativité générale, le changement de coordonnées défini par la formule:

$$(17-1) \quad x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^3}{6} [\varphi^{(\lambda)}(x') + \epsilon^\lambda] \quad (\lambda' = \lambda \text{ numériquement})$$

où ϵ^λ tend vers 0 quand x^0 tend vers 0.

Sur S les dérivées partielles des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes sont telles que:

$$(17-2) \quad (A_\mu^{\lambda'})_s = \delta_\mu^\lambda \quad (\partial_0 A_\mu^{\lambda'})_s = (\partial_\mu A_0^{\lambda'})_s = 0$$

$$(17-3) \quad (\partial_{00} A_i^{\lambda'})_s = (\partial_{i0} A_0^{\lambda'})_s = 0$$

de telle sorte que, pour les dérivées secondes des A , seules les dérivées $\partial_{00} A_0^{\lambda'}$ sont non nulles sur S .

$$(17-4) \quad (\partial_{00} A_0^{\lambda'})_s = \varphi^{(\lambda)}$$

Dans un changement de coordonnées, on a manifestement:

$$(17-5) \quad S_\mu = A_\mu^{\lambda'} S_{\lambda'}; \quad g_{\lambda\mu} = A_\lambda^{\alpha'} A_\mu^{\beta'} g_{\alpha'\beta'}; \quad g^{\alpha'\beta'} = A_{\lambda'}^{\alpha'} A_{\mu'}^{\beta'} g^{\lambda\mu}$$

et par dérivation:

$$(17-6) \quad \partial_0 g_{\lambda\mu} = A_{\lambda'}^{\alpha'} A_\mu^{\beta'} A_0^{\rho'} \partial_{\rho'} g_{\alpha'\beta'} + \partial_0 A_{\lambda'}^{\alpha'} \cdot A_\mu^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} + \partial_0 A_\mu^{\beta'} A_{\lambda'}^{\alpha'} g_{\alpha'\beta'}$$

$$(17-7) \quad \partial_0 g^{\alpha'\beta'} = A_{\lambda'}^{\alpha'} A_\mu^{\beta'} A_0^{\rho'} \partial_{\rho'} g^{\lambda\mu} + A_0^{\rho'} \partial_{\rho'} A_{\lambda'}^{\alpha'} A_\mu^{\beta'} g^{\lambda\mu} + A_0^{\rho'} \partial_{\rho'} A_\mu^{\beta'} A_{\lambda'}^{\alpha'} g^{\lambda\mu}$$

Cela posé, nous allons établir le théorème suivant:

Théorème.— *Le changement de coordonnées (17-1)*

a) *conserve les valeurs numériques des coordonnées de tout point de S et les données de Cauchy*

b) *conserve les valeurs numériques sur S des $\partial_{00} g_{ij}$ et $\partial_{00} \mathfrak{g}^{[0i]}$*

c) *permet de donner aux $\partial_{00} \mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ des valeurs arbitraires sur S .*

La propriété a) résulte d'une manière évidente des équations (17-2) (17-5) et

(17-6). Pour établir les propriétés b) et c) commençons par dériver (17-6) et (17-7).

Il vient ainsi:

$$(17-8) \quad \partial_{00} g_{\lambda\mu} = A_{\lambda}^{\alpha'} A_{\mu}^{\beta'} A_0^{\rho'} A_0^{\sigma'} \partial_{\rho'\sigma'} g_{\alpha'\beta'} + \partial_{00} A_{\lambda}^{\alpha'} \cdot A_{\mu}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} + \partial_{00} A_{\mu}^{\beta'} A_{\lambda}^{\alpha'} g_{\alpha'\beta'} + O$$

$$(17-9) \quad \partial_{0'0'} g^{\alpha'\beta'} = A_{\lambda}^{\alpha'} A_{\mu}^{\beta'} A_0^{\rho'} A_0^{\sigma'} \partial_{\rho\sigma} g^{\lambda\mu} + A_0^{\rho'} A_0^{\sigma'} \partial_{\rho\sigma} A_{\lambda}^{\alpha'} A_{\mu}^{\beta'} g^{\lambda\mu} + A_0^{\rho'} A_0^{\sigma'} \partial_{\rho\sigma} A_{\mu}^{\beta'} A_{\lambda}^{\alpha'} g^{\lambda\mu} + O$$

où O désigne des termes contenant des dérivées premières des A et qui s'annulent par suite sur S . De (17-8) on déduit d'abord immédiatement:

$$(17-10) \quad \partial_{00} g_{ij} = \partial_{0'0'} g_{i'j'}$$

D'autre part on a:

$$(17-11) \quad \partial_{00} g_{0i} = \partial_{0'0'} g_{0'i'} + \varphi^{(\rho)} g_{\rho i} \quad \partial_{00} g_{i0} = \partial_{0'0'} g_{i'0'} + \varphi^{(\rho)} g_{i\rho}$$

et

$$(17-12) \quad \partial_{00} g_{00} = \partial_{0'0'} g_{0'0'} + \varphi^{(\rho)} g_{\rho 0} + \varphi^{(\rho)} g_{0\rho}$$

Etudions comment se trouve modifié $\partial_{00} \sqrt{|g|}$. On a:

$$\frac{\partial_0 \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_0 g_{\alpha\beta}$$

On en déduit:

$$(17-13) \quad \frac{\partial_{00} \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} - \left[\frac{\partial_0 \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} \right]^2 = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{00} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_0 g^{\alpha\beta} \partial_0 g_{\alpha\beta}$$

En écrivant la relation (17-13) pour les dérivées par rapport à $x^{0'}$ de $\sqrt{|g'|}$ et en retranchant membre à membre il vient

$$D \equiv \frac{\partial_{00} \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} - \frac{\partial_{0'0'} \sqrt{|g'|}}{\sqrt{|g'|}} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \partial_{00} g_{\alpha\beta} - g^{\alpha'\beta'} \partial_{0'0'} g_{\alpha'\beta'})$$

soit d'après (17-10):

$$D \equiv \frac{1}{2} (g^{0i} \partial_{00} g_{0i} - g^{0'i'} \partial_{0'0'} g_{0'i'} + g^{i0} \partial_{00} g_{i0} - g^{i'0'} \partial_{0'0'} g_{i'0'} + g^{00} \partial_{00} g_{00} - g^{0'0'} \partial_{0'0'} g_{0'0'})$$

En vertu de (17-11) et (17-12), on a

$$D = \frac{1}{2} (g^{0i} g_{\rho i} \varphi^{(\rho)} + g^{i0} g_{i\rho} \varphi^{(\rho)} + g^{00} g_{\rho 0} \varphi^{(\rho)} + g^{00} g_{0\rho} \varphi^{(\rho)})$$

soit:

$$D = \frac{1}{2}(g^{0\lambda} g_{\rho\lambda} \varphi^{(\rho)} + g^{\lambda 0} g_{\lambda\rho} \varphi^{(\rho)}) = \varphi^{(0)}$$

Comme $\sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}$, on en déduit:

$$(17-14) \quad \partial_{00} \sqrt{|g|} - \partial_{0'0'} \sqrt{|g'|} = \varphi^{(0)} \sqrt{|g|}$$

Considérons maintenant les formules (17-9) pour le changement de coordonnées (17-1). Il vient:

$$\partial_{0'0'} g^{0'i'} = \partial_{00} g^{0i} + \varphi^{(0)} g^{0i} + \varphi^{(i)} g^{00}$$

$$\partial_{0'0'} g^{i'0'} = \partial_{00} g^{i0} + \varphi^{(0)} g^{i0} + \varphi^{(i)} g^{00}$$

$$\partial_{0'0'} g^{0'0'} = \partial_{00} g^{00} + 2\varphi^{(0)} g^{00}$$

On en déduit:

$$\partial_{00} g^{[0i]} = \partial_{0'0'} g^{[0'i']} - \varphi^{(0)} g^{[0i]}$$

$$\partial_{00} g^{(0\lambda)} = \partial_{0'0'} g^{(0'\lambda')} - \varphi^{(0)} g^{(0\lambda)} - \varphi^{(\lambda)} g^{00}$$

et d'après (17-14):

$$(17-15) \quad \partial_{00} g^{[0i]} - \partial_{0'0'} g^{[0'i']} = -\varphi^{(0)} g^{[0i]} + g^{[0i]} \varphi^{(0)} = 0$$

$$(17-16) \quad \partial_{00} g^{(0\lambda)} - \partial_{0'0'} g^{(0'\lambda')} = -\varphi^{(0)} g^{(0\lambda)} - \varphi^{(\lambda)} g^{00} + \varphi^{(0)} g^{(0\lambda)} = -\varphi^{(\lambda)} g^{00}$$

(17-15) achève d'établir la propriété b). De (17-16), il résulte que, g^{00} étant $\neq 0$, on peut attribuer aux $\partial_{0'0'} g^{(0'\lambda')}$ des valeurs arbitraires sur S par le choix des fonctions $\varphi^{(\lambda)}$. Notre théorème est donc établi.

Appelons encore indice d'une dérivée par rapport aux coordonnées locales (x^α) auxquelles S se trouve rapportée, le nombre de fois que l'indice 0 y figure. Pour toute connexion affine solution des équations (14-1), il est clair que le tenseur de Ricci $P_{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction des g_{ij} , $g^{[0i]}$, $g^{(0\lambda)}$ et de leurs dérivées jusqu'au second ordre. D'autre part dans le changement de coordonnées (17-1), on a sur S

$$P_{\alpha'\beta} = P_{\alpha\beta}$$

et le changement de coordonnées permet de modifier arbitrairement les valeurs sur S des $\partial_{00} g^{(0\lambda)}$. Du théorème précédent on déduit donc:

Corollaire.— Pour toute connexion affine $L_{\beta\gamma}^\alpha$ solution de (14-1), les composantes du tenseur de Ricci $P_{\alpha\beta}$ ne font intervenir comme dérivées d'indice 2 que les dérivées $\partial_{00} g_{ij}$ et $\partial_{00} g^{[0i]}$ à l'exclusion des $\partial_{00} g^{(0\lambda)}$.

18. Décomposition du problème de l'intégration des équations du champ.

Nous nous proposons d'abord de montrer que le système (14-4) est équivalent

à un système dont une partie fait intervenir les quantités K_ρ^λ qui figurent dans les identités de conservation.

Théorème.— *Au voisinage de S , le système (14-4) est équivalent au système constitué par les équations suivantes:*

$$(18-1)_a \quad P_{(ij)} = 0$$

$$(18-1)_b \quad P_{[ij]} - \frac{2}{3}(\partial_i S_j - \partial_j S_i) = 0$$

$$(18-1)_c \quad P_{[i0]} - \frac{2}{3}(\partial_i S_0 - \partial_0 S_i) = 0$$

et

$$(18-2) \quad M_\rho^0 \equiv K_\rho^0 - \frac{2}{3}[(\partial_\rho S_\sigma - \partial_\sigma S_\rho)g^{[0\sigma]} - \frac{1}{2}\delta_\rho^0(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)g^{[\alpha\beta]}] = 0$$

En effet posons

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$$

Le système (14-4) est équivalent au système:

$$R_{(\alpha\beta)} = 0 \quad R_{[\alpha\beta]} = 0$$

et les équations (18-1) s'écrivent:

$$(18-3) \quad R_{(ij)} = 0 \quad R_{[\alpha\beta]} = 0$$

et il suffit de montrer que pour toute solution de (18-3), les équations:

$$M_\rho^0 \equiv R_{(\rho\sigma)} g^{(0\sigma)} + R_{[\rho\sigma]} g^{[0\sigma]} - \frac{1}{2}\delta_\rho^0[R_{(\rho\sigma)} g^{(\rho\sigma)} + R_{[\rho\sigma]} g^{[\rho\sigma]}] = 0$$

entraînent les équations

$$R_{(\rho\sigma)} = 0$$

Pour $\rho = i$, on a d'abord

$$M_i^0 \equiv R_{(i\sigma)} g^{(0\sigma)} + R_{[i\sigma]} g^{[0\sigma]}$$

Pour une solution de (18-3)

$$M_i^0 = R_{(i0)} g^{00}$$

et comme $g^{00} \neq 0$, les équations $M_i^0 = 0$ entraînent $R_{(i0)} = 0$. Pour $\rho = 0$, on a

$$M_0^0 \equiv R_{(0\sigma)} g^{(0\sigma)} + R_{[0\sigma]} g^{[0\sigma]} - \frac{1}{2}[R_{(\rho\sigma)} g^{(\rho\sigma)} + R_{[\rho\sigma]} g^{[\rho\sigma]}]$$

et pour une solution de (18-3), il vient d'après l'étude précédente,

$$M_0^0 = R_{00} g^{00} - \frac{1}{2}R_{00} g^{00} = \frac{1}{2}R_{00} g^{00}$$

et $M_0^0 = 0$ entraîne $R_{00} = 0$, ce qui démontre notre théorème.

On observera que les équations (18-2) peuvent s'écrire explicitement:

$$(18-4) \quad M_i^0 \equiv K_i^0 - \frac{2}{3}(\partial_i S_k - \partial_k S_i)g^{[0k]} = 0$$

et

$$M_0^0 \equiv K_0^0 - \frac{2}{3}[(\partial_0 S_k - \partial_k S_0)g^{[0k]} - (\partial_0 S_k - \partial_k S_0)g^{[0k]} - \frac{1}{2}(\partial_i S_j - \partial_j S_i)g^{[ij]}] = 0$$

soit

$$(18-5) \quad M_0^0 \equiv K_0^0 + \frac{1}{3}(\partial_i S_j - \partial_j S_i)g^{[ij]} = 0$$

En vertu du théorème du §16, nous voyons que les premiers membres des équations (18-2) prennent sur S des valeurs qui ne dépendent que des données de Cauchy et de leurs dérivées par rapport aux x^k et par suite que ces équations fournissent des conditions qui doivent être satisfaites par les données de Cauchy sur S .

De même le système (14-3) peut être partagé en les équations:

$$(18-6) \quad \partial_\rho g^{[\rho i]} \equiv \partial_0 g^{[0i]} + \partial_k g^{[ki]} = 0$$

et

$$(18-7) \quad \partial_\rho g^{[\rho 0]} \equiv \partial_k g^{[k0]} = 0$$

Les équations (18-6) fournissent les valeurs des $\partial_0 g^{[0i]}$ en fonction des dérivées du tenseur fondamental par rapport aux x^k . La dernière équation fournit une condition qui doit être satisfaite sur S par les $g^{[k0]}$. Nous sommes aussi conduits à décomposer le système (14-3) (14-4) des équations du champ en les deux systèmes d'équations définis de la manière suivante: le premier système est constitué par les équations (18-1) et (18-6), le second par les équations (18-2) et l'équation (18-7).

Au sujet de cette décomposition, nous nous proposons d'établir le théorème suivant:

Théorème.— *Étant donnée, au voisinage de S , une solution $(g_{\lambda\mu}, S_\alpha)$ du système (18-1) (18-6) qui satisfait sur S aux équations (18-2) (18-7), l'ensemble $(g_{\lambda\mu}, S_\alpha)$ satisfait à (18-2) et (18-7) en dehors de S .*

En effet, tout d'abord les premiers membres $\partial_\rho g^{[\rho\sigma]}$ des équations (14-3) satisfont identiquement à la relation

$$\partial_\sigma[\partial_\rho g^{[\rho\sigma]}] = 0$$

Pour une solution de (18-6), il résulte de cette identité que l'on a:

$$\partial_0[\partial_\rho g^{[\rho\sigma]}] = 0$$

et $\partial_\rho g^{[\rho\sigma]}$ étant nul sur S est aussi nul en dehors de S . Le système (14-3) est ainsi

satisfait. Il en résulte que de l'ensemble $(g_{\lambda\mu}, S_\alpha)$ envisagé, on déduit un ensemble $(g_{\lambda\mu}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha)$ qui satisfait aux identités de conservation (12-9) soit

$$(18-8) \quad \partial_\lambda \mathfrak{M}_\rho^\lambda + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta} = 0$$

ou

$$\partial_0 \mathfrak{M}_\rho^0 + \partial_i \mathfrak{M}_\rho^i + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta} = 0$$

Or

$$M_\rho^i = R_{(\rho\sigma)} g^{(i\sigma)} + R_{[\rho\sigma]} g^{[i\sigma]} - \frac{1}{2} \delta_\rho^i [R_{(\alpha\beta)} g^{(\alpha\beta)} + R_{[\alpha\beta]} g^{[\alpha\beta]}]$$

Pour une solution de (18-1):

$$M_j^i = R_{(j0)} g^{(i0)} - \frac{1}{2} \delta_j^i R_{(\lambda 0)} g^{(\lambda 0)} \quad M_0^i = R_{(0\lambda)} g^{(i\lambda)}$$

Des calculs du théorème précédent, il résulte que les identités de conservation (18-8) entraînent, pour une solution de (18-1) des relations de la forme:

$$(18-9) \quad \partial_0 M_\rho^0 = A_\rho^{i\lambda} \partial_i M_\lambda^0 + B_\rho^\lambda M_\lambda^0$$

où les A et B sont des fonctions régulières. Le système (18-9) n'admet, pour des données $(M_\rho^0)_S$ nulles sur S , d'autre solution que la solution nulle. Il en résulte que $M_\rho^0 = 0$ en dehors de S .

Le problème de l'intégration locale des équations du champ se trouve donc ramené:

a) à la recherche de données de Cauchy satisfaisant sur S aux équations (18-2) et (18-7).

b) à l'étude du système (18-1) et (18-6) pour de telles données de Cauchy.

Cette situation est tout-à-fait analogue à celle que nous avons rencontrée à différentes reprises en relativité générale.

19. Remarques sur la recherche des données de Cauchy. Sur la recherche des données de Cauchy, il est possible de faire quelques remarques suggérant des conditions de possibilité et l'ordre de difficulté du problème. Supposons que nous choissions des données de Cauchy relatives au tenseur fondamental et telles que

$$\partial_k g^{[k0]} = 0$$

Nous écartons le cas où les $g^{[0i]}$ seraient tous nuls. Les quantités K_ρ^0 sont connues sur S et l'on a, pour déterminer les composantes de S , les relations

$$(19-1) \quad g^{[0k]} S_{ik} = \frac{3}{2} K_i^0$$

$$(19-2) \quad g^{[ij]} S_{ij} = -3 K_0^0$$

où l'on a posé

$$S_{ij} = \partial_i S_j - \partial_j S_i$$

Pour les équations (19-1), il existe manifestement la condition de possibilité:

$$(19-3) \quad K_i^0 g^{[0i]} = 0$$

Si cette condition est satisfaite, les équations (19-1) fournissent pour les S_{ik} une solution dépendant d'un paramètre scalaire λ . Si u_i désigne un vecteur covariant tel que $u_i g^{[0i]} = 1$, on a la solution explicite:

$$S_{ik} = \frac{3}{2}(K_i^0 u_k - K_k^0 u_i) + \lambda \epsilon_{ikl} g^{[0l]}$$

où ϵ_{ikl} est l'indicateur de permutation. L'équation (19-2) fixe d'une manière unique la valeur de λ dans le cas où

$$g^{[23]} g^{[01]} + g^{[31]} g^{[02]} + g^{[12]} g^{[03]} \neq 0$$

c'est-à-dire où:

$$m = \det (m^{ab}) \neq 0$$

S'il n'en est pas ainsi, le problème de la détermination des S_{ik} par (19-1) et (19-2) peut être impossible ou indéterminé. Dans tous les cas, il conviendra d'imposer aux S_{ik} obtenus de définir une forme quadratique extérieure à différentielle extérieure nulle. S'il en est ainsi, les S_i se trouvent définis localement à un gradient près, S_0 restant naturellement arbitraire.

20. Relations entre les dérivées d'indice 2 du tenseur fondamental et les dérivées des coefficients de la connexion. Pour pouvoir procéder à l'étude du système des équations (18-1) (18-6), nous allons d'abord analyser certaines relations existant entre les dérivées d'indice 2 du tenseur fondamental et les dérivées $\partial_0 L_{\beta\gamma}^\alpha$ des coefficients de la connexion.

Nous supposons, dans le présent paragraphe, que le tenseur fondamental et la connexion L satisfont:

1°) aux relations de liaison (14-1)

2°) aux équations (18-6) et, sur S , à l'équation (18-7).

Du raisonnement du §18, il résulte que le système (14-3) est alors satisfait; par suite la connexion $L_{\beta\gamma}^\alpha$ admet un vecteur de torsion nul. Les équations (18-6) fournissent les valeurs des $\partial_0 g^{[0i]}$ et, par dérivation, celles des $\partial_{00} g^{[0i]}$ en fonction des données de Cauchy et de leurs dérivées par rapport aux (x^k) . Nous supposons toujours dans la suite qu'on substitue aux quantités $\partial_0 g^{[0i]}$ et $\partial_{00} g^{[0i]}$ leurs expressions ainsi fournies par (12-6).

Par résolution des relations de liaison (14-1), on voit que les $L_{\beta\gamma}^\alpha$ s'expriment par des fonctions linéaires des dérivées premières des composantes du tenseur fondamental, les coefficients étant fonctions de ces composantes.

Pour simplifier les écritures, nous utiliserons une notation de congruence ($\sim$), cette congruence étant entendue modulo des fonctions des données de Cauchy relatives au tenseur fondamental et de leurs dérivées premières par rapport aux (x^k) . De l'expression des composantes du tenseur de Ricci on déduit:

$$(20-1) \quad P_{ij} \sim \partial_0 L_{ij}^0$$

D'après le théorème du §17, les P_{ij} ne font intervenir comme dérivées d'indice 2, compte-tenu des équations (18-6) que les $\partial_{00} g_{kl}$. Il en est donc de même des $\partial_0 L_{ij}^0$ qui dépendent par suite linéairement des $\partial_{00} g_{kl}$. On a

$$(20-2) \quad \partial_0 L_{ij}^0 \sim A_{ij}^{kl} \partial_{00} g_{kl}$$

Nous nous proposons d'établir que *les équations (20-2) sont en général résolubles par rapport aux $\partial_{00} g_{kl}$* autrement dit que la matrice A qui figure dans (20-2) est en général inversible.

A cet effet nous utiliserons les relations suivantes qui se déduisent par dérivation par rapport à x^0 des relations (14-1) ou des relations (7-4) équivalentes

$$(20-3) \quad \partial_{0k} g_{ij} \sim \partial_0 L_{ik}^h g_{hj} + \partial_0 L_{kj}^h g_{ih} + \partial_0 L_{ik}^0 g_{0j} + \partial_0 L_{kj}^0 g_{i0}$$

$$(20-4) \quad \partial_{0k} g^{00} \sim -\partial_0 L_{hk}^0 g^{h0} - \partial_0 L_{kh}^0 g^{0h} - \partial_0 L_{0k}^0 g^{00} - \partial_0 L_{k0}^0 g^{00}$$

$$(20-5) \quad \partial_{0k} g^{0i} \sim -\partial_0 L_{hk}^0 g^{hi} - \partial_0 L_{kh}^i g^{0h} - \partial_0 L_{0k}^0 g^{0i} - \partial_0 L_{k0}^i g^{00}$$

$$(20-6) \quad \partial_{0k} g^{i0} \sim -\partial_0 L_{kh}^0 g^{ih} - \partial_0 L_{hk}^i g^{h0} - \partial_0 L_{k0}^0 g^{i0} - \partial_0 L_{0k}^i g^{00}$$

D'autre part, par le même procédé, on a:

$$\partial_{00} g^{0i} \sim -\partial_0 L_{h0}^0 g^{hi} - \partial_0 L_{0h}^i g^{0h} - \partial_0 L_{00}^0 g^{0i} - \partial_0 L_{00}^i g^{00}$$

$$\partial_{00} g^{i0} \sim -\partial_0 L_{0h}^0 g^{ih} - \partial_0 L_{h0}^i g^{h0} - \partial_0 L_{00}^0 g^{i0} - \partial_0 L_{00}^i g^{00}$$

En retranchant membre à membre, il vient:

$$(20-7) \quad 2\partial_{00} g^{[0i]} \sim -\partial_0 L_{h0}^0 g^{hi} + \partial_0 L_{0h}^0 g^{ih} - \partial_0 L_{0h}^i g^{0h} + \partial_0 L_{h0}^i g^{h0} - 2\partial_0 L_{00}^0 g^{[0i]}$$

D'autre part, d'après (7-6)

$$\gamma_0 = \frac{\partial_0 \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = L_{0\rho}^\rho$$

On en déduit:

$$\partial_{00} g^{[0i]} \sim \partial_{00} g^{[0i]} \sqrt{|g|} + \partial_0 L_{0\rho}^\rho g^{[0i]}$$

De (20-7), il vient alors:

$$(20-8) \quad 2\partial_{00} g^{[0i]} \sim -\partial_0 L_{h0}^0 g^{hi} + \partial_0 L_{0h}^0 g^{ih} - \partial_0 L_{0h}^i g^{0h} + \partial_0 L_{h0}^i g^{h0} + 2\partial_0 L_{0j}^j g^{[0i]}$$

Enfin l'on a, toujours d'après (14-1)

$$(20-9) \quad \partial_{00} g_{ij} \sim \partial_0 L_{i0}^h g_{hj} + \partial_0 L_{0j}^h g_{ih} + \partial_0 L_{i0}^0 g_{0j} + \partial_0 L_{0j}^0 g_{i0}$$

Cela posé, on notera que les équations (20-3), considérées comme équations aux inconnues $\partial_0 L_{ik}^h$ ont une forme identique aux relations de liaison (14-1), les coefficients des inconnues étant g_{ij} pour lesquels

$$\det (g_{ij}) = g \, g^{00} \neq 0$$

Des résultats de Hlavatý cités, on déduit que, *sauf dans un cas exceptionnel que nous écarterons*, ce système est inversible. On obtient ainsi

$$(20-10) \quad \partial_0 L_{ik}^h \sim T_{ik}^h$$

la lettre T désignant désormais des termes dépendant linéairement des $\partial_0 L_{rs}^0$.

Comme $g^{00} \neq 0$, on a ensuite d'après (20-4):

$$(20-11) \quad \partial_0 L_{0k}^0 + \partial_0 L_{k0}^0 \sim T_k$$

Prenons maintenant les équations (20-5) et (20-6). Elles peuvent s'écrire:

$$(20-12) \quad \partial_0 L_{k0}^i \sim -\partial_0 L_{0k}^0 \frac{g^{0i}}{g^{00}} + T_k^i$$

$$(20-13) \quad \partial_0 L_{0k}^i \sim -\partial_0 L_{k0}^0 \frac{g^{i0}}{g^{00}} + T_k'^i$$

On en déduit par contraction:

$$\partial_0 L_{j0}^j = \partial_0 L_{0j}^j \sim -\partial_0 L_{0j}^0 \frac{g^{0j}}{g^{00}} + T \sim -\partial_0 L_{j0}^0 \frac{g^{j0}}{g^{00}} + T'$$

En remplaçant $\partial_0 L_{j0}^0$ par sa valeur tirée de (20-11), il vient:

$$(20-14) \quad \partial_0 L_{j0}^j = \partial_0 L_{0j}^j \sim -\partial_0 L_{0j}^0 \frac{g^{[0j]}}{g^{00}} + T''$$

En reportant dans (20-8) les valeurs de $\partial_0 L_{h0}^i$, $\partial_0 L_{0h}^i$, $\partial_0 L_{0j}^j$ tirées de (20-12) (20-13) (20-14), on obtient un système aux inconnues $\partial_0 L_{0h}^0$ de la forme:

$$\partial_0 L_{0h}^0 \left(g^{ih} + g^{hi} - \frac{g^{0i} g^{h0}}{g^{00}} - \frac{g^{i0} g^{0h}}{g^{00}} \right) - 2\partial_0 L_{0h}^0 \frac{g^{[0h]} g^{[0i]}}{g^{00}} \sim 2T^i$$

ce qui par un calcul simple peut se mettre sous la forme:

$$(20-15) \quad \partial_0 L_{0h}^0 \left[g^{(ih)} - \frac{g^{(0h)} g^{(0i)}}{g^{00}} \right] \sim T^i$$

soit:

$$\partial_0 L_{0h}^0 l^{*ih} \sim T^i$$

où l'on a posé:

$$l^{*ih} = l^{ih} - \frac{l^{0h} l^{0i}}{l^{00}}$$

On a manifestement

$$\det (l^{*ih}) \neq 0$$

puisque la forme quadratique $l^{*ih} Y_i Y_h$ se déduit de la forme $l^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta$ par suppression du carré associé à la variable directrice Y_0 . On en déduit qu'on peut résoudre les équations (20-15) et obtenir des relations de la forme:

$$(20-16) \quad \partial_0 L_{0h}^0 \sim T_h \quad \partial_0 L_{h0}^0 \sim T'_h$$

En reportant dans (20-9) les valeurs de $\partial_0 L_{0h}^0$, $\partial_0 L_{h0}^0$ et celles de $\partial_0 L_{i0}^h$ et $\partial_0 L_{0i}^h$ qui s'en déduisent par (20-12) (20-13), il vient les relations:

$$(20-17) \quad \partial_{00} g_{ij} \sim B_{ij}^{kl} \partial_0 L_{kl}^0$$

qui réalisent l'inversion des relations (20-2).

Ainsi, pourvu que les équations (20-3) aux inconnues $\partial_0 L_{ik}^h$ soient inversibles, on peut exprimer les $\partial_{00} g_{ij}$ comme combinaison linéaire des $\partial_0 L_{kl}^0$ à des fonctions additives près des données de Cauchy et de leurs dérivées par rapport aux (x^k) .

21. L'intégration des équations du champ. Considérons maintenant une solution des équations (18-1) (18-6) correspondant à des données de Cauchy sur S satisfaisant à (18-2) et (18-7). Proposons nous d'évaluer les valeurs sur S des dérivées successives du tenseur fondamental et du vecteur covariant S_α .

Tout d'abord, comme nous l'avons déjà observé, les équations (18-6) fournissent les valeurs sur S des dérivées $\partial_0 g^{[0i]}$ et $\partial_{00} g^{[0i]}$. Puis les équations (18-1)_a et (18-1)_b fournissent les valeurs sur S des P_{ij} et par suite celles des $\partial_0 L_{ij}^0$. On en déduit d'après l'étude précédente et (20-17) les valeurs des $\partial_{00} g_{ij}$. Inversement d'ailleurs, il résulte de notre étude que pour ces valeurs des $\partial_{00} g_{ij}$ les premiers membres de (18-1)_a et (18-1)_b ont les valeurs imposées.

Les équations (18-1)_c fournissent alors les valeurs des $\partial_0 S_i$. Quant à $\partial_0 S_0$, il est fourni par la condition auxiliaire (15-7).

Aucune équation ne contient, conformément au théorème du §17, les $\partial_{00} g^{(0\lambda)}$, ce qui correspond précisément à la possibilité des changements de coordonnées étudiés. Les $\partial_{00} g^{(0\lambda)}$ peuvent admettre des discontinuités à la traversée de S , mais, d'après la structure différentiable de V_4 , ces discontinuités sont dépourvues de signification intrinsèque et peuvent être annulées par un changement de coordonnées admissibles.

Ainsi à la traversée d'une hypersurface $S(x^0 = 0)$ pour laquelle $g^{00} \neq 0$, les dérivées secondes $\partial_{00} g_{ij}$ et $\partial_{00} g^{[0i]}$ sont continues et il en est de même des dérivées $\partial_0 S_i$, $\partial_0 S_0$. Ces résultats peuvent être étendus aux dérivées d'ordre supérieur par dérivation par rapport à x^0 des équations (18-1) (18-6) et de la condition auxiliaire.

On voit que, sauf dans un cas singulier que nous avons signalé, le problème de Cauchy relatif aux équations du champ (14-3) (14-4) et à des données de Cauchy $(g_{ij}, g^{[0i]}, g^{(0\lambda)}, \partial_0 g_{ij}, \partial_0 g^{(0\lambda)}, S_i, S_0)$ portées par l'hypersurface $S(x^0 = 0, g^{00} \neq 0)$ et satisfaisant sur S aux équations (18-2) et (18-7) admet (tout au moins dans le cas analytique) une solution unique à un changement de coordonnées admissibles près. Il semble d'ailleurs que les méthodes de Madame Fourès pourraient encore être étendues au cas non analytique.

Les résultats sont totalement différents si S est tangente au cône C_x défini au §15. Les hypersurfaces tangentes à ce cône apparaissent comme les surfaces d'ondes du champ unitaire envisagé. Les rayons associés sont les caractéristiques de l'équation:

$$(21-1) \quad \Delta_1 f \equiv l^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$$

c'est-à-dire sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique riemannienne de type hyperbolique normal

$$(21-2) \quad ds^2 = l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Nous sommes ainsi conduits à considérer que, dans la présente théorie, c'est le tenseur $l_{\alpha\beta}$ (ou un tenseur proportionnel) qui définit la partie gravitationnelle du champ unitaire et que c'est son comportement qui doit être comparé à celui du tenseur gravitationnel $g_{\alpha\beta}$ de la relativité générale.