Équations du Type Parabolique Dépourvues de Solutions

J. HADAMARD

Institut de France, Paris

Il semblait certain, jusqu'en 1950, que toute équation aux dérivées partielles à coefficients continus devait admettre des solutions, la seule question étant d'indiquer des conditions définies propres à déterminer l'une d'entre elles.

M. Aurel Wintner (*Amer. Journ.*, t. 72) a démontré qu'il en est autrement pour toute une catégorie d'équations du type

$$(I) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Il s'est appuyé sur un important résultat de H. Petrini, donnant une condition *nécessaire et suffisante* pour que le potentiel logarithmique

$$V = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{D}} \log \frac{1}{r} f(X, Y) \, dX \, dY \quad (r = \sqrt{X^2 + Y^2})$$

d'une aire plane $\mathfrak{D}$ admette, au point O , origine des coordonnées, des dérivées secondes satisfaisant à l'équation précédente.

Il me paraît intéressant de résoudre la même question pour des équations du type parabolique

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

1. Je commencerai toutefois par reprendre, pour la simplifier sur quelques points de détail, l'analyse des auteurs que je viens de nommer.

La condition obtenue par Petrini concerne l'intégrale

$$\iint \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial x^2} f(X, Y) dX dY = \iint \frac{\cos 2\theta}{r^2} f(X, Y) dX dY$$

—celle qui représenterait la dérivée seconde $\partial^2 V / \partial x^2$ cherchée si la différentiation sous le signe intégral était légitime—, laquelle, cette fois, sera à étendre seulement à la partie de $\mathfrak{D}$ extérieure au cercle $\mathfrak{C}_h$ de rayon h ayant son centre en O . Nous allons d'abord montrer, avec Petrini, que la dérivée en question existe ou n'existe pas suivant que la quantité ainsi formée

$$(II) \quad \iint_{\mathfrak{D}-\mathfrak{C}_h} \frac{\cos 2\theta}{r^2} f(X, Y) dX dY$$

tend ou non vers une limite pour $h \rightarrow 0$.

Partons, comme il le fait, de la définition même de la dérivée dont il s'agit. La dérivée première du potentiel logarithmique V , laquelle se calcule simplement par différentiation sous le signe intégral, est, au point O , origine des coordonnées rectilignes X, Y ou polaires r, θ

$$(III) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \iint f(X, Y) \frac{X}{r^2} dX dY = \iint f(X, Y) \frac{\cos \theta}{r} dX dY.$$

Au point $O_1(h, 0)$, la dérivée analogue $\partial V_1 / \partial x$ est

$$(III') \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \iint f(X, Y) \frac{X - h}{R^2} dX dY, \quad R^2 = r^2 - 2rh \cos \theta + h^2$$

et la dérivée cherchée est définie comme la limite

$$(IV) \quad \lim Q = \lim \frac{1}{h} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

pour $h \rightarrow 0$.

Commençons par étendre les deux intégrations (III), (III') à l'intérieur du cercle $\mathfrak{C}_h$ (lequel passe par O_1). Les intégrales correspondantes sont, on le sait, de l'ordre de h . Si l'on réduit f à la valeur f_0 que cette fonction prend en O , l'intégrale (III) sera indistinctement nulle quel que soit h et (III') aura la valeur $-\pi f_0$.

En fait, f ne sera pas égal à f_0 , mais à $f_0 + \epsilon$ où (f étant supposé continu) ϵ est infiniment petit avec h et ne donnera, par conséquent, qu'un résultat négligeable même vis à vis de h , puisque le quotient par h de l'intégrale

$$\iint_{\mathfrak{C}_h} \frac{|\cos \theta|}{r} dX dY$$

—intégrale (III) où tous les éléments sont pris en valeur absolue—est fini (l'intégrale analogue où r est remplacé par R et θ par un argument Θ est à éléments tous du même signe).

Dés lors, dans la limite (IV), la contribution de l'aire $\mathcal{C}_h$ sera $-\pi f_0$.

2. Considérons maintenant la partie de $\mathcal{D}$ extérieure au cercle $\mathcal{C}_h$ et son potentiel logarithmique V' ou V'_1 . Comme

$$\log \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{re^{i\theta} - h} + \log \frac{1}{re^{-i\theta} - h} \right),$$

la dérivée

$$\frac{\partial V'_1}{\partial x} = \frac{\partial V'_1}{\partial h} = -\frac{1}{2} \iint \left(\frac{1}{h - re^{i\theta}} + \frac{1}{h - re^{-i\theta}} \right) f(X, Y) dX dY$$

pourra, puisque $r > h$, se développer suivant les puissances de h/r , savoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'_1}{\partial x} &= \frac{1}{2} \iint f(X, Y) \left[\frac{1}{re^{i\theta}} \left(1 + \frac{h}{re^{i\theta}} + \frac{h^2}{r^2 e^{2i\theta}} \frac{1}{1 - \frac{h}{re^{i\theta}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{re^{-i\theta}} \left(1 + \frac{h}{re^{-i\theta}} + \frac{h^2}{r^2 e^{-2i\theta}} \frac{1}{1 - \frac{h}{re^{-i\theta}}} \right) \right] dX dY \\ &= \iint f(X, Y) \left[\frac{\cos \theta}{r} + h \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{h^2}{r^2} \left(\frac{e^{-2i\theta}}{re^{i\theta} - h} + \frac{e^{2i\theta}}{re^{-i\theta} - h} \right) \right] dX dY. \end{aligned}$$

Le premier terme, en $\cos \theta/r$, est celui qui correspond à $h = 0$, c'est à dire à la valeur de $\partial V/\partial x$ en 0 (du moins si l'on néglige, comme nous venons de voir que cela est légitime, la partie relative à l'intérieur du cercle). Le défalquant et divisant par h , le second terme donnera précisément l'expression (II). Reste le quotient

$$\frac{1}{2h} \iint_{\mathcal{D}-\mathcal{C}_h} f(X, Y) \frac{h^2}{r^2} \left(\frac{e^{-2i\theta}}{re^{i\theta} - h} + \frac{e^{2i\theta}}{re^{-i\theta} - h} \right) dX dY.$$

Nous allons voir que ce quotient tend vers zéro avec h . Posant $r = ht$, il s'écrit

$$(V) \quad \iint_{t \geq 1} \frac{f(ht \cos \theta, ht \sin \theta)}{t^2} \frac{t \cos 3\theta - \cos 2\theta}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} t dt d\theta.$$

La quantité sous le signe $\iint$ n'est infinie que lorsqu'on a à la fois $\theta = 0, \pi$ et $t = 1$, et cela d'ordre un, ce qui n'empêche pas l'intégrale d'avoir un sens. La limite supérieure d'intégration en t est infinie avec $1/h$; mais, en remplaçant,

dans le coefficient de f sous $\iint$, l'élément d'intégration par sa valeur absolue, on a une intégrale en t

$$(V') \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \frac{|t \cos 3\theta - \cos 2\theta|}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} d\theta$$

qui reste finie à l'infini; et, dès lors, on peut trouver une valeur t_1 de t telle que l'intégrale précédente, prise entre les limites t_1 et ∞ , soit inférieure à un nombre positif arbitrairement petit ϵ_1 , donc la partie correspondante de (V) à F_{ϵ_1} , en appelant F un maximum de $|f|$.

Ayant ainsi fixé t_1 , considérons les valeurs de t comprises entre 1 et t_1 . Pour l'une quelconque d'entre elles, r tend encore vers zéro avec h , de sorte que f peut encore être remplacé par f_0 , toujours en vertu du fait que (V') est finie. Or l'intégrale en θ , soit

$$\int_0^{2\pi} \frac{t \cos 2\theta - \cos \theta}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} \left(\frac{z^3}{t - z} + \frac{1}{tz - 1} \right)$$

est nulle. Ainsi

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - \left[\iint_{\mathfrak{D} - \mathfrak{C}_h} f \frac{\cos 2\theta}{r^2} dX dY \right] \right\} = -\pi f_0$$

et chacune des deux limites entre crochets existe ou est inexistante en même temps que l'autre. C.Q.F.D.

3. Existe-t-il des fonctions $f(x, y)$ continues telles que l'intégrale (II) ne tende vers aucune limite finie pour $h \rightarrow 0$?

La réponse est affirmative¹.

Nous aurons une intégrale indéfiniment croissante dans ces conditions si nous prenons²

$$f(X, Y) = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\log(A/r)}}$$

en désignant par A une longueur supérieure à la plus grande dimension de $\mathfrak{D}$.

4. On peut aller plus loin. Pour cela, commençons par considérer l'expression analogue à la précédente, mais formée à l'aide d'un point O' différent de O , soit

$$f'(X, Y) = \frac{\cos 2\theta'}{\sqrt{\log(A/r')}}$$

¹ H. LEBESGUE, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, T. i, 1910, particulièrement pp. 62-63. L'expression introduite dans le texte est différente de celles qu'a formées LEBESGUE.

² Le dénominateur $\sqrt{\log(A/r)}$ est introduit pour rendre f continu en O , sans que l'intégrale correspondante cesse d'être infinie avec $1/h$.

où r' , θ' sont les coordonnées polaires du point courant (X, Y) rapportées au pôle O' (l'axe polaire restant parallèle à l'axe des x). En désignant toujours par $\mathcal{C}_h$ le cercle de centre O et de rayon h , l'intégrale

$$\iint_{\mathfrak{D}-\mathcal{C}_h} f'(X, Y) \frac{\cos 2\theta}{r^2} dX dY$$

restera finie et continue quel que soit h .

Dès lors, l'intégrale en question, lorsqu'on donne successivement à h toutes les valeurs positives correspondant à des points de $\mathfrak{D}$, reste au plus égale en valeur absolue à un certain maximum.

Ceci dit, soit

$$(VI) \quad O_0, O_1, O_2, \dots, O_k, \dots$$

une suite finie ou dénombrable de points (tous distincts entre eux) de $\mathfrak{D}$, laquelle, dans le second cas, pourra être supposée partout dense. En désignant par r_k , θ_k les coordonnées polaires de pôle O_k et posant

$$f_k(X, Y) = \frac{\cos 2\theta_k}{\sqrt{\log(A/r_k)}},$$

on aura, pour chaque indice i inférieur à k , un maximum M_k^i de l'intégrale

$$\left| \iint_{\mathfrak{D}-\mathcal{C}_h^{(i)}} f_k(X, Y) \frac{\cos 2\theta_i}{r_i^2} dX dY \right|$$

étendue à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_h^{(i)}$ de rayon arbitraire h qui a pour centre O_i . Ayant pris une fois pour toutes, une série positive convergente $\Sigma \alpha_k$, déterminons, pour chaque valeur de k , le nombre β_k de manière à vérifier les k inégalités

$$\beta_k M_k^i \leq \alpha_k \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Dans ces conditions, si l'on prend

$$(VII) \quad f(X, Y) = \Sigma \beta_k f_k,$$

chacune des intégrales

$$\iint_{\mathfrak{D}-\mathcal{C}_h^{(i)}} f(X, Y) \frac{\cos 2\theta_i}{r_i^2} dX dY$$

étendue à l'extérieur d'un cercle de centre O_i et de rayon h , comprendra un terme, correspondant à $k = i$, qui augmentera indéfiniment avec $1/h$, la somme des autres termes restant finie, de sorte que le potentiel logarithmique de densité f n'aura de dérivées secondes en aucun point de la suite (VI).

Comme toute solution d'une équation telle que (I) se représente nécessairement, dans une aire $\mathfrak{D}$ intérieure à son domaine de régularité, par un potentiel V

augmenté de potentiels de couches simples et doubles portées par le contour de $\mathfrak{D}$ lesquels annulent le premier membre de (I), on voit que cette solution ne peut pas exister lorsque f a la forme (VII).

5. Proposons nous de transporter la marche ainsi suivie à l'étude de l'équation de la chaleur avec second membre³

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

La rôle dévolu jusqu'ici au potentiel logarithmique sera maintenant joué par l'intégrale double

$$\begin{aligned} (2) \quad W &= \iint_{\mathfrak{D}_y} f(X, Y) \frac{1}{\sqrt{y - Y}} e^{-\frac{(X-x)^2}{4(Y-y)}} dX dY \\ &= \iint_{\mathfrak{D}_y} f(X, Y) w(X, Y; x, y) dX dY \end{aligned}$$

étendue à la partie d'une aire donnée $\mathfrak{D}$ située au dessous de la droite $Y = y$, la notation $w(X, Y; x, y)$ représentant l'expression (solution élémentaire)

$$w(X, Y; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - Y}} e^{-\frac{(X-x)^2}{4(Y-y)}}.$$

La dérivée première de cette intégrale par rapport à x s'obtient par différentiation sous $\iint$, soit

$$(3) \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{2} \iint \frac{f(X, Y)}{\sqrt{y - Y}} e^{-\frac{(X-x)^2}{4(Y-y)}} \frac{x - X}{y - Y} dX dY.$$

Par contre, la dérivée seconde de la solution élémentaire w étant

$$(4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{y - Y} - \frac{1}{2} \left(\frac{x - X}{y - Y} \right)^2 \right] w,$$

on sait que son intégration dans l'aire $\mathfrak{D}_y$ n'est plus légitime. Nous considérerons l'expression

$$(4') \quad \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} = \iint_{\mathfrak{D}_{y-h^2}} f(X, Y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dX dY$$

obtenue en limitant l'intégration à la droite $Y = y - h^2$. D'autre part, en changeant, dans (3), x en $x + h$, on aura pour $\partial W/\partial x$ une nouvelle valeur

³ Nous nous bornerons ici à la condition d'existence de la dérivée seconde $\partial^2 W/\partial x^2$ sans exécuter la recherche analogue relative à $\partial W/\partial y$. La conclusion que nous obtiendrons correspondra donc seulement à la condition *nécessaire* au point de vue de PETRINI: c'est celle qui importe à l'objet que nous avons en vue actuellement.

$$(3') \quad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \iint_{\mathfrak{D}_y} w_1 \frac{x + h - X}{y - Y} f(X, Y) dX dY, \quad w_1 = w(X, Y; x + h, y)$$

et nous avons à rechercher si le quotient

$$(5) \quad \frac{1}{h} \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

a une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Les deux intégrales (3), (3') sont relatives à l'aire primitive $\mathfrak{D}_y$, de sorte que, pour les comparer à (4'), nous devons d'abord mettre à part, dans chacune d'elles, la partie relative à la bande $\mathfrak{B}$ d'épaisseur h^2 qui a son bord supérieur sur la caractéristique $Y = y$.

Dans cette bande, nous évaluerons séparément chacun des termes de la différence précédente, en remplaçant tout d'abord la quantité variable $f(X, Y)$ par la constante $f_0 = f(x, y)$. Comme la quantité à intégrer se réduit alors, au facteur f_0 près, à $\partial w / \partial x = -\partial w / \partial X$, l'intégration par rapport à X donnera, pour chaque valeur de Y ,

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial X} dX = 0,$$

donc aussi un résultat nul en multipliant par $dY / \sqrt{y - Y}$ et intégrant par rapport à Y .

La même intégration par rapport à X donnera une valeur finie—au plus égale à 2—lorsqu'on en prendra tous les éléments en valeur absolue. L'erreur $f_1 = f - f_0$ commise en remplaçant f par la constante f_0 donnera donc lieu à une erreur inférieure, pour chaque valeur de Y , à $2F_1$ (où $F_1 = \max |f_1|$) et, au total, une erreur inférieure à $4hF_1$. Or si, pour commencer, nous bornons l'intégration à un petit intervalle d'amplitude $2h^{1-\alpha}$ ayant son milieu au point $X = x$, la quantité f_1 sera inférieure en valeur absolue à un nombre arbitrairement petit. D'autre part, si l'on prend l'intégrale (3) ou (3') entre les limites $-\infty$ et $-h^{1-\alpha}$ ou entre $h^{1-\alpha}$ et $+\infty$, on a un résultat qui est $o(h)$.

Il en est donc de même, au total, pour la contribution de la bande $\mathfrak{B}$ à $\partial W / \partial x$ et à $\partial W_1 / \partial x$.

6. Nous pouvons donc nous borner aux intégrales W' , W'_1 étendues à l'aire $\mathfrak{D}_{y-h^2}$ et raisonner sur la différence entre

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial W'_1}{\partial x} - \frac{\partial W'}{\partial x} \right) = \\ - \frac{1}{2h} \iint_{\mathfrak{D}_{y-h^2}} \left\{ \frac{wh}{y - Y} + (w_1 - w) \frac{x + h - X}{y - Y} \right\} f(X, Y) dX dY \end{aligned}$$

avec $w_1 = w(X, Y; x + h, y)$, et

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \iint w \left[\frac{1}{y - Y} - \frac{1}{2} \left(\frac{x - X}{y - Y} \right)^2 \right] f(X, Y) dX dY.$$

Le terme en $1/(y - Y)$ s'élimine et il reste

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\frac{\partial W'_1}{\partial x} - \frac{\partial W'}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} \\ (6) \quad &= -\frac{1}{2h} \iint_{\mathbb{D}_{y-h^2}} f(X, Y) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dX dY \\ &= -\frac{1}{2h} \iint_{\mathbb{D}_{y-h^2}} f(X, Y) \left[(w_1 - w) \frac{x + h - X}{y - Y} + \frac{1}{2} h w \left(\frac{x - X}{y - Y} \right)^2 \right] dX dY \end{aligned}$$

et, par le changement de variables

$$X - x = h\xi\eta, \quad y - Y = h^2\eta^2,$$

d'où

$$dX dY = 2h^3 \eta^2 d\xi d\eta,$$

$$(X - x)^2/(Y - y) = \frac{1}{4}\xi^2, \quad (X - h - x)^2/(Y - y) = \frac{1}{4}\xi_1^2 \quad \left(\xi_1 = \xi - \frac{1}{\eta} \right),$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\frac{\partial W'_1}{\partial x} - \frac{\partial W'}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} = - \iint f(x + h\xi\eta, y - h^2\eta^2) j \eta^2 d\xi d\eta, \\ & j = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[(e^{-i\xi_1^2} - e^{-i\xi^2}) \frac{1 - \xi\eta}{\eta^2} + \frac{1}{2} e^{-i\xi^2} \frac{\xi^2}{\eta^2} \right]. \end{aligned}$$

7. Commençons encore par réduire f à la constante f_0 . Pour f identiquement égal à 1, l'intégrale est nulle (comme il résulte de sa valeur (6)) si elle existe, c'est à dire si l'intégrale double

$$(7) \quad J = \int_1^\infty \eta^2 d\eta \int_\infty^{+\infty} |j| d\xi$$

est convergente. Pour décider ce dernier point, nous diviserons le champ d'intégration en deux parties suivant le signe de $1 - 2\xi\eta$. Pour $1 - 2\xi\eta > 0$, c'est à dire $\xi_1^2 > \xi^2$, nous écrirons

$$(8) \quad e^{-i\xi_1^2} - e^{-i\xi^2} = e^{-i\xi^2} (e^{-Z} - 1), \quad Z = \frac{\xi_1^2 - \xi^2}{4} = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{1}{\eta} - 2\xi \right).$$

Z étant actuellement supposé positif, on a

$$e^{-Z} - 1 = -Z + \frac{1}{2}\theta Z^2, \quad 0 < \theta < 1;$$

dans l'expression qui en résulte pour j , savoir

$$(9) \quad j = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left\{ -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{1}{\eta} - 2\xi \right) \left(\frac{1 - \xi\eta}{\eta^2} \right) + \frac{\theta}{32} \left[\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{\eta} - 2\xi \right) \right]^2 \frac{1 - \xi\eta}{\eta^2} + \frac{\xi^2}{2\eta^2} \right\},$$

les termes en ξ^2/η^2 se détruisent; ceci, grâce à l'apparition d'un nouveau dénominateur η , donne une intégrale convergente.

Dans la région $1 - 2\xi\eta < 0$, l'expression (8) sera remplacée par

$$e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2} - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2}(1 - e^Z)$$

(où $Z < 0$) d'où, pour la portion correspondante de l'intégrale J , une expression analogue à (9), donnant également lieu à convergence.

En vertu de cette convergence, les parties de l'intégrale (7) qui correspondent à des valeurs de ξ , η satisfaisant à l'une ou à l'autre des deux inégalités

$$|\xi| > \xi_0, \quad \eta > \eta_0$$

donneront un résultat inférieur en valeur absolue (quel que soit h) à un nombre arbitrairement petit pour ξ_0 , η_0 suffisamment grand. Dans la partie restante, f pourra être sans erreur sensible remplacée par f_0 .

Donc la différence (6) et, par conséquent, aussi

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2}$$

tendront vers zéro avec h .

C.Q.F.D.

8. Nous avons donc à nous demander s'il existe des formes de la fonction f telles que l'intégrale (4') diverge. Nous allons choisir f de manière que la divergence ait lieu en un point arbitrairement donné $O(x_0, y_0)$ du plan, l'intégrale tendant vers ∞ lorsque l'aire d'intégration s'étend jusqu'à la droite $Y = y_0$.

Dans l'intégrale en question, le coefficient de f , sous $\iint$, change de signe avec la quantité $(X - x_0)^2 - 2(y_0 - Y)$. Si donc nous prenons

$$f(X, Y) = \frac{(X - x_0)^2 - 2(y_0 - Y)}{\sqrt{(X - x_0)^4 + 4(y_0 - Y)^2}},$$

cette intégrale sera à éléments tous positifs et dès lors d'après le criterium d'E. Levi, augmentera indéfiniment dans les conditions indiquées.

Au point O , la quantité précédente est bornée, mais non pas continue. On la rend continue, à savoir nulle en O et même en tout point de la droite $Y = y_0$, si on la multiplie par le facteur

$$\sqrt{\log \frac{1}{y_0 - Y}}$$

en la prenant par définition indénitivement nulle pour $Y > y_0$: ce qui, d'autre part, n'empêchera pas (toujours d'après le changement de variables d'E. E. Levi) la divergence d'avoir lieu.

D'autre part cette même intégrale restera finie et continue en tout point O' distinct de O . Rien n'empêchera dès lors d'opérer comme au n° 4 et d'obtenir des "potentiels paraboliques" dont les dérivées secondes au moins par rapport à x cessent d'exister en chaque point d'une suite finie ou dénombrable de points du plan.

La fonction f étant formée de cette façon, l'équation (1) n'aura aucune solution.

9. Le fait constaté tout d'abord pour l'équation (I) a été étendu par M. Aurel Wintner aux équations de la forme

$$\Delta u + uf(x, y) = 0$$

et même à l'équation⁴

$$\Delta u + [\lambda + f(x, y)]u = 0.$$

Les problèmes classiques qui se posent relativement à cette dernière sont dépourvus de sens pour les formes considérées ci-dessus (n° 4) de $f(x, y)$. On peut dire de $uf(x, y)$ et de $[\lambda + f(x, y)]u$ ce qu'on a constaté en ce qui concerne $f(x, y)$ lui-même.

Cette extension s'applique, pour les mêmes raisons, aux équations du type parabolique sans second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + uf(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + [\lambda + f(x, y)]u = 0.$$

De telles équations, f étant l'une des fonctions que nous venons de former, ne peuvent admettre d'autre solution que celle qui est indénitivement nulle.

La même circonstance se produirait de même pour des équations de forme analogue, mais non linéaires.

⁴ Plus généralement, même conclusion en remplaçant $f(x, y)$ par $\lambda g(x, y) + f(x, y)$, où g est solution de l'équation sans second membre.