*Versuch einer 4-dimensionalen einheitlichen Feldtheorie
der Gravitation und des Elektromagnetismus*

EDITH SCHAFFHAUSER-GRAF

Physikalisches Institut der Universität Fribourg

Communicated by A. LICHNEROWICZ

INHALT

Einleitung.....	744
I. Prinzipielle Erwägungen einer einheitlichen Feldtheorie in einem 4-dimensionalen Kontinuum.....	745
II. Mathematische Hilfsmittel	
§1. Definition eines Finsler-Raumes.....	747
§2. Die Cartan'sche Theorie der Finsler'schen Räume.....	747
§3. Reduktion der Cartan'schen Forderungen.....	749
§4. Differentialgleichung der geodätischen Linien.....	752
§5. Einige Beziehungen zwischen den ko- und kontravarianten Maßsensoren und ihren Ableitungen nach den Größen x'	752
§6. Die Torsion.....	753
§7. Die Krümmung.....	754
§8. Die kovariante Ableitung.....	756
§9. Die kovariante Ableitung höherer Ordnung.....	757
§10. Vertauschung der kovarianten Ableitung mit der Differentiation nach x'	758
§11. Die den Bianchi-Identitäten entsprechenden Identitäten des Finsler-Raumes.....	758
§12. Approximation des Finsler'schen Raumes durch einen oskulierenden Riemann'schen Raum.....	759

III. Die Feldgleichungen

§1. Der elektromagnetische Feldtensor.....	761
§2. Der Erhaltungssatz der Ladung.....	761
§3. Die Maxwellgleichungen für den materiefreien Raum.....	761
§4. Die Lorentzkraft.....	762
§5. Aufbau des Energie-Impulstensors T_i^k des elektromagnetischen Feldes.....	762
§6. Der Erhaltungssatz der Energie und des Impulses der Materie	762
§7. Die Gravitationseffekte des elektromagnetischen Feldes.....	763
§8. Der Scheinkraftcharakter der Lorentzkraft.....	764
§9. Die Bewegung eines geladenen Massenpunktes.....	764
§10. Das reine Gravitationsfeld.....	765

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit soll einen Versuch darstellen, ein geometrisches Modell einer einheitlichen Feldtheorie der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes im Rahmen von vier Dimensionen zu geben derart, daß im Spezialfall des Verschwindens des elektromagnetischen Feldes die Einstein'schen Gleichungen des Gravitationsfeldes resultieren.

Dazu werden wir so vorgehen, daß wir im ersten Kapitel die Frage einer geometrischen Interpretation der wesentlichsten Größen des elektromagnetischen Feldes in einer erweiterten, struktureicheren Geometrie diskutieren. Im zweiten Kapitel werden wir alle für die späteren Ausführungen notwendigen mathematischen Definitionen und Sätze entwickeln, was diesem Kapitel unvermeidlich einen verhältnismäßig breiten Umfang gibt, um endlich im dritten Kapitel zeigen zu können, wie die Feldgleichungen aus der geometrischen Struktur unseres Raum-Zeit-Kontinuums folgen.

Seit der Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie sind zahlreiche Versuche unternommen worden, diese Theorie auch auf das elektromagnetische Feld auszudehnen, *d.h.* das Vektorpotential, *bzw.* die Maxwellgleichungen geometrisch zu interpretieren. Da dies im Rahmen der Riemann'schen Geometrie nicht möglich ist, mußte die geometrische Grundlage erweitert werden, worin sich die verschiedenen Theorien unterscheiden. Wir wollen darauf nicht näher eingehen, sondern nur aus neuester Zeit zwei Arbeiten von Horvath^{1, 2} erwähnen. Seine Theorie basiert bereits auf der Finsler'schen Geometrie und kann insofern als Ergänzung zu unserer Arbeit betrachtet werden, als er darin zeigt, daß sich die Feldgleichungen der Gravitation für den materiefreien Raum unter der Voraussetzung des absoluten Parallelismus der Linienelemente auch in dieser Geometrie von einem Variationsprinzip ableiten lassen. Aus seiner Theorie des elektromagnetischen Feldes hingegen folgt, im Gegensatz zu unserer Theorie, weder der Erhaltungssatz der Ladung, noch die Maxwellgleichungen.

I. PRINZIPIELLE ERWAGUNGEN EINER EINHEITLICHEN FELD- THEORIE IN EINEM 4-DIMENSIONALEN KONTINUUM

Die Einstein'sche Gravitationstheorie besagt, daß die vorhandenen Massen dem Raum-Zeit Kontinuum seine geometrische Struktur aufprägen. Die Gravitationskraft wird zu einer Raum-Zeit formenden Kraft. Eine geometrische Theorie des elektromagnetischen Feldes muß dasselbe für die vorhandenen Ladungen fordern: es muß von den vorhandenen Ladungen eine Raum-Zeit formende Kraft ausgehen und das von ihnen erzeugte Feld muß als das Resultat der Wirkung dieser Kraft erscheinen. Wir fordern, daß in einer Theorie, die beide Erscheinungen, Gravitation und elektromagnetisches Feld umfassen soll, die vorhandenen Massen und elektrischen Ladungen zusammen die Struktur des Raumes bestimmen.

In der allgemeinen Relativitätstheorie führt der Massenpunkt eine kräftefreie Bewegung aus. Dasselbe fordern wir für eine Punktladung.

Um diesen Forderungen nachzukommen, werden wir den geometrischen Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie erweitern. Wir stellen uns dabei auf den metrischen und nicht auf den affinen Standpunkt, *d.h.* wir nehmen an, daß der Welt eine Metrik aufgeprägt ist. Es soll dabei der Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte (ds^2) auf große Entfernungen unverändert übertragbar sein, *d.h.* Invarianz der Länge bei Parallelübertragung. Dies bedeutet, daß wir unseren Betrachtungen eine euklidisch zusammenhängende Mannigfaltigkeit zugrunde legen müssen.

Nach dem oben Gesagten müssen wir uns also nach einer struktureicheren euklidisch zusammenhängenden Mannigfaltigkeit umsehen, in der

1. Größen vorhanden sind, denen wir die wesentlichsten Größen der Theorie des elektromagnetischen Feldes ein-eindeutig entsprechen lassen können derart, daß sich mit Hilfe des Ausdrucks für die Abweichung dieser Geometrie von der Riemann'schen der antisymmetrische Tensor des elektromagnetischen Feldes konstruieren läßt und
2. die Riemann'sche Geometrie als Spezialfall, und zwar beim Verschwinden des elektromagnetischen Feldes enthält;
3. müssen die Erhaltungssätze erfüllt sein;
4. sollen die Gravitationseffekte des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt werden.

Eine derartige natürliche Erweiterung der Riemann'schen Geometrie ist die Cartan'sche Theorie der Finslerräume. Die Finslerräume besitzen drei Krümmungstensoren und einen Torsionstensor. Die Torsion ist gerade das Maß für die Abweichung der Finsler'schen Räume von den Riemann'schen Räumen, wie wir im zweiten Kapitel sehen werden. Ferner gehört der Torsionstensor, neben dem metrischen Grundtensor und dem dritten Krümmungstensor (R_{ijkh}), zu den fundamentalen Tensoren der Finsler'schen Räume, aus denen wir, wenn wir

auf sie die Operationen der Multiplikation und kovarianten Ableitung anwenden, alle übrigen Tensoren (also speziell den Tensor der linearen Übertragung, sowie die beiden weiteren Krümmungstensoren) erhalten.

Der Versuch, mit Hilfe des Torsionstensors einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe zu konstruieren, den wir mit dem elektromagnetischen Feldtensor identifizieren können, ist deshalb naheliegend. Der einfachste Tensor dieser Art ergibt sich, wenn wir dem, aus dem Torsionstensor durch Überschiebung erhaltenen Vektor die elektromagnetischen Potentiale entsprechen lassen. Dieser Tensor ist in dem verjüngten zweiten Krümmungstensor P_{ij} enthalten. Im Grenzfall schwacher Felder dürfen wir die Zusatzterme vernachlässigen, so daß dann der Tensor P_{ij} mit unserem elektromagnetischen Feldtensor identisch wird.* Beim Verschwinden unseres elektromagnetischen Feldtensors geht der Hauptkrümmungstensor in den Riemann'schen Krümmungstensor über, *d.h.* es resultieren die Einstein'schen Feldgleichungen. Damit nun aber der Erhaltungssatz der Ladung erfüllt wird, benötigen wir die Voraussetzung, daß die Reihenfolge der zweiten kovarianten Ableitungen vertauschbar ist. Dies führt uns, wie wir im zweiten Kapitel zeigen werden, auf einen Finsler'schen Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente. Die Maxwellgleichungen für das Vakuum sind in diesem Finsler'schen Raum dann automatisch erfüllt, *d.h.* sie folgen aus der geometrischen Struktur unseres Raumes. Ebenso ergibt sich aus den Bianchi-Identitäten für diesen Finsler'schen Raum der Erhaltungssatz für Energie und Impuls der Materie.

Nach der Cartan'schen Theorie wird der Finslerraum als eine Mannigfaltigkeit von Linienelementen aufgefaßt. Durch diese können wir immer Raumkurven, speziell geodätische Linien legen. Das sind aber gerade die Weltlinien eines Elektrons. Dem Einheitsvektor im Linienelement entspricht demnach die Geschwindigkeit eines Elektrons. In einem Finsler'schen Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente können wir somit Geschwindigkeiten verschiedener in endlicher Entfernung voneinander befindlicher Elektronen miteinander vergleichen. Ferner können wir in einem solchen Raum immer ein Feld von parallelen Linienelementen auszeichnen und den Finsler'schen Raum durch einen, ihn längs dieses Feldes oskulierenden nichteuklidischen Raum ersetzen. Dies wird uns die Möglichkeit geben, durch Koordinatentransformation die Kraftwirkung sowohl des elektromagnetischen, als auch des Gravitationsfeldes wegzutransformieren.

Zusammenfassend erwähnen wir nochmals, daß wir auf Grund der physikalischen Forderungen unsere Betrachtungen auf einen Finsler'schen Raum aufbauen müssen, in welchem die Parallelverschiebung des Einheitsvektors im Linienelement integrierbar, *d.h.* unabhängig vom Verschiebungsweg ist.

* Wir werden auf diesen Zusammenhang andernorts zurückkommen.

II. MATHEMATISCHE HILFSMITTEL

Wir gehen nun dazu über, diejenigen mathematischen Sätze und Definitionen zusammenzustellen *bzw.* herzuleiten, die wir für unsere Ausführungen im dritten Kapitel benötigen.

§1. Definition eines Finsler-Raumes. In der Finsler-Geometrie wird der Abstand ds zweier benachbarter Punkte (x) und $(x + dx)$ durch eine *beliebige* (positive) Funktion $L(x, dx)$ der Koordinaten (x^i) und der Differentiale (dx^i) dieses Punktes gegeben, wobei die Funktion $L(x, dx)$ positiv homogen von erster Ordnung in den Differentialen ist. Im Spezialfall, wenn $L(x, dx) = g_{ik}(x) dx^i dx^k$ ist, enthält sie die Riemann'sche Geometrie.

Wir verstehen unter einem n -dimensionalen Finslerraum eine n -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, die auf ein System von Koordinaten $(x^1 \cdots x^n)$, bezogen ist und der wir eine Metrik der Form

$$ds = L(x^1 \cdots x^n, dx^1 \cdots dx^n) = L(x, dx) \quad (1)$$

aufgeprägt haben.

Eine Kurve in diesem Finsler-Raum wird dann durch $x^i(t)$, wobei t ein beliebiger Parameter bedeutet, beschrieben. Nach (1) ist die Entfernung zweier Punkte $x^i(t_1)$ und $x^i(t_2)$ dieser Kurve durch

$$s = L\left(x^i, \frac{dx^i}{dt}\right) dt \quad (2)$$

gegeben. Ist die Kurve stückweise glatt, so können wir immer die Bogenlänge $s = \int_{t_0}^t L(x, dx/dt) dt$ als Parameter benutzen.

§2. Die Cartan'sche Theorie der Finsler'schen Räume. Wir stellen nun die Forderung, daß der Finsler'sche Raum entsprechend dem Riemann'schen Raum euklidisch zusammenhängend sei. Cartan erreicht dies dadurch, daß er den n -dimensionalen Punktraum zu einer $(2n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit von orientierten Linienelementen erweitert. Diese Mannigfaltigkeit von Linienelementen muß also euklidisch zusammenhängend sein. Dazu müssen wir:

1. ihr eine Metrik aufprägen derart, daß das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes (x^i) , der das Zentrum des Linienelementes $(x^i, dx^i/dt)$ genannt wird und eines willkürlichen unendlich benachbarten Punktes $(x^i + dx^i)$ das Zentrum des Linienelementes $(x^i + dx^i, x'^i + dx'^i)$ in bezug auf das Linienelement (x^i, x'^i) , dessen Richtung beliebig ist, eine positiv definite quadratische Differentialform ist:

$$ds^2 = g_{ik}(x, x') dx^i dx^k, \quad (3)$$

deren Koeffizienten g_{ik} also auch vom Linienelement abhängen.

$$(x'^i = dx^i/dt, t = \text{Parameter}).$$

Wenn wir nun die Differentiale dx^i als die Komponenten X^i eines Vektors $X(x^i, x'^i)$ mit dem Ursprung im Zentrum ansehen, so ist durch (3) das Quadrat der Länge eines jeden solchen Vektors X gegeben. Es ist also formal wie im Riemann'schen Raum:

$$l^2 = g_{ik}(x, x') X^i X^k \quad (4)$$

d.h. allgemein: Ist ξ^i ein kontravarianter Vektor mit dem Anfangspunkt (x^i) , so ist das Quadrat der Länge des Vektors (x^i, ξ^i) in bezug auf das Linienelement (x^i, x'^i) durch den Ausdruck

$$l^2(\xi) = g_{ik}(x, x') \xi^i \xi^k \quad (5)$$

gegeben.

Entsprechend ist der Winkel ϑ zweier Vektoren desselben Ursprungs (x^i, α^i) und (x^i, β^i) gegeben durch

$$\cos \vartheta = \frac{g_{ij}(x, x') \alpha^i \beta^j}{\sqrt{g_{ij}(x, x') \alpha^i \alpha^j} \sqrt{g_{ij}(x, x') \beta^i \beta^j}}. \quad (6)$$

Damit die Mannigfaltigkeit euklidisch zusammenhängt muß

2. die Übertragung eines Vektors ξ vom beliebigen Linienelement (x^i, x'^i) zum Nachbarlinienelement $(x^i + dx^i, x'^i + dx'^i)$ durch das invariante Differential mit kovarianten Komponenten

$$D\xi_i = d\xi_i - C_{ii}^r \xi_r dx'^i - \Gamma_{ii}^r \xi_r dx^i \quad (7)$$

und kontravarianten Komponenten

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{ki}^i \xi^k dx'^l + \Gamma_{kl}^i \xi^k dx^l \quad (8)$$

definiert sein. Ist $D\xi^i = 0$, so ist der Vektor $\xi^i(x, x')$ parallel nach $(x + dx, x' + dx')$ übertragen. Die Größen C_{ii}^r und Γ_{ii}^r sind dabei Funktionen der x^i und x'^i und sind durch die für den euklidischen Zusammenhang wesentliche Forderung bestimmt, daß bei Parallelübertragung die Länge von Vektoren erhalten bleibt, also daß

$$d(g_{ij} \xi^i \xi^j) = dg_{ij} \xi^i \xi^j + g_{ij} d\xi^i \xi^j + g_{ij} \xi^i d\xi^j = 0 \quad (9)$$

ist.

Setzen wir hierin $d\xi^i$ bzw. $d\xi^j$ aus Gleichung (8) mit $D\xi^i = 0$ ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von:

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^h} dx'^h + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} dx^h$$

das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^h} = g_{jk} C_{ih}^k + g_{ik} C_{jh}^k, \quad (10)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{jk} \Gamma_{ih}^k + g_{ik} \Gamma_{jh}^k. \quad (10')$$

Es müssen also die Größen C_{kh}^i und Γ_{kh}^i so gewählt werden, daß sie diesem System von Differentialgleichungen genügen. Ferner sind die $\Gamma_{kh}^i(x, x')$ von 0^{ter} und $C_{kh}^i(x, x')$ von 1^{ter} Ordnung positiv homogen in den x' . (Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (8) und der Tatsache, daß der parallelverschobene Vektor ungeändert bleibt, wenn wir die x'^i durch $\sigma(x^i, x'^i) \cdot x'^i$ ersetzen, wobei $\sigma(x^i, x'^i) > 0$ und in den x'^i positiv homogen von 0^{ter} Ordnung ist.

§3. Reduktion der Cartan'schen Forderungen. Es besteht nun die Aufgabe, die Funktionen $g_{ij}(x, x')$, $C_{kh}^i(x, x')$ und $\Gamma_{kh}^i(x, x')$ eindeutig aus der Metrik des als Punktraum betrachteten Finsler-Raumes, d.h. aus der Grundfunktion $L(x, x')$ zu bestimmen. Wenn wir dies getan haben, können wir analog wie in der Riemann'schen Geometrie die Verfahren der euklidischen Differentialgeometrie anwenden nur mit dem Unterschied, daß wir diese Verfahren auf eine Figur, die ein Ort von Linienelementen ist, anwenden müssen. Dies bedeutet aber keine wesentliche Einschränkung, denn wir können jede Figur als Ort von Linienelementen ansehen, z.B. eine Kurve als Ort ihrer Tangentenlinienelemente.

Um die Funktionen $g_{ij}(x, x')$, $\Gamma_{kh}^i(x, x')$, $C_{kh}^i(x, x')$ eindeutig aus $L(x, x')$ bestimmen zu können postulierte Cartan vier invariante Bedingungen neben der Voraussetzung, daß die Funktion $L(x, x')$ auf ein reguläres Variationsproblem führe. Wir werden zeigen, daß es genügt, drei dieser Bedingungen zu postulieren, während die vierte Forderung aus diesen drei Bedingungen und den Voraussetzungen über die Grundfunktion $L(x, x')$ folgt.

Diese drei Bedingungen lauten:

1. Jeder Vektor ξ^i , der die Richtung seines Linienelementes hat, hat die Länge $L(x, \xi)$.
2. Es soll der Tensor $C_{ijk} = g_{jh} C_{ik}^h$ in den ersten beiden Indices symmetrisch sein, also es soll $C_{ijk} = C_{jik}$ sein.
3. Es soll der Übertragungsparameter Γ_{kh}^{*i} in den unteren Indices symmetrisch sein.

Betrachten wir zunächst die erste Forderung.

Wir hatten für die Länge eines Vektors Gleichung (5). Hier ist speziell $\xi^i = x'^i$, also lautet Gleichung (5): $l^2 = g_{ij}(x, x')x'^i x'^j$ und dies soll gleich $L^2(x^i, x'^i)$ sein.

Berücksichtigen wir die Homogenität von $L(x, x')$ in x'^i , so erhalten wir die Beziehungen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(L^2)}{\partial x'^i} \cdot x'^i = L^2 = g_{ij} x'^i x'^j, \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'^i} = g_{ij} \frac{x'^j}{L} = \frac{L}{x'^i}. \quad (12)$$

Aus letzterer Beziehung folgt, unter Berücksichtigung der Cartan'schen Bedingung, daß:

$$\frac{\partial L}{\partial x'^i} \frac{x'^i}{L} = 1 \quad (13)$$

ist, d.h. der Einheitsvektor, der dieselbe Richtung wie sein Linienelement hat, hat die kontravarianten Komponenten:

$$l^i = \frac{x'^i}{L} = \frac{x'^i}{\sqrt{g_{ij} x'^i x'^j}} \quad (14)$$

und die kovarianten Komponenten:

$$l_i = \frac{\partial L}{\partial x'^i} = \frac{g_{ij} x'^j}{\sqrt{g_{ij} x'^i x'^j}}. \quad (15)$$

Aus

$$\frac{\partial^2(\frac{1}{2}L^2)}{\partial x'^i \partial x'^j} \cdot x'^i \cdot x'^j = L^2 = g_{ij} x'^i x'^j \quad (16)$$

erhalten wir:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2(x, x')}{\partial x'^i \partial x'^j}. \quad (17)$$

Damit haben wir den Maßtensor aus der Grundfunktion des als Punktraum aufgefaßten Finsler-Raumes hergeleitet.

Unter Berücksichtigung der zweiten Cartan'schen Bedingung erhalten wir aus Gleichung (10):

$$C_{ijh} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^h} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3(L^2)}{\partial x'^h \partial x'^i \partial x'^j} \quad (18)$$

also die Bestimmung der Tensoren C_{ijh} aus der Grundfunktion $L(x, x')$. Da unsere Voraussetzungen über die Grundfunktion $L(x, x')$ ohnehin die Voraussetz-

ung enthalten, daß in einer Umgebung jedes Punktes des betrachteten Bereiches

$$\frac{\partial(L^2)}{\partial x'^i}, \quad \frac{\partial^2(L^2)}{\partial x'^i \partial x'^j}, \quad \frac{\partial^2(L^2)}{\partial x'^h \partial x'^j}, \quad \frac{\partial^3(L^2)}{\partial x'^h \partial x'^i \partial x'^j}$$

existieren und stetig sind, so folgt nach dem Satze von Dini die Existenz von $\frac{\partial^3(L^2)}{\partial x'^i \partial x'^h \partial x'^j}$ in dem betreffenden Punkt und es ist dort:

$$d.h. \quad \frac{\partial^3(L^2)}{\partial x'^i \partial x'^h \partial x'^j} = \frac{\partial^3(L^2)}{\partial x'^h \partial x'^i \partial x'^j}$$

$$C_{hji} = C_{ijh}$$

also es folgt die Symmetrie der Tensoren C_{ijh} in allen Indices.

Hieraus und aus der Homogenität der Grundfunktion $L(x, x')$ in den Größen x'^i ergibt sich nun die vierte Cartan'sche Bedingung:

$$x'^i C_{ijh} = x'^j C_{ijh} = x'^h C_{ijh} = 0. \quad (19)$$

Die dritte Cartan'sche Bedingung verlangt, daß die Komponenten, Γ^{*i}_{kh} , die im Ausdruck für das invariante Differential eines Vektors ξ^i , der von seinem Linienelement (x, x') zu dem benachbarten und parallelen Linienelement $(x + dx, x' + dx')$ übertragen wird, in den unteren Indices k und h symmetrisch sein sollen. Dabei haben wir

$$\Gamma^i_{kh} - C^i_{kr} \Gamma^r_{jh} x'^j = \Gamma^{*i}_{kh} \quad (20)$$

gesetzt. Das invariante Differential eines solchen Vektors läßt sich damit in der Form

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^{*i}_{kh} \xi^k dx^h \quad (21)$$

schreiben.

Damit können wir die Größen Γ_{ijh} aus der Grundfunktion $L(x, dx)$ bestimmen. Aus Gleichung (20) erhalten wir die folgende Beziehung:

$$\Gamma_{ijh} - \Gamma_{hji} = C_{ijr} x'^h \Gamma^r_{kh} - C_{hjr} x'^k \Gamma^r_{ki}. \quad (22)$$

Ferner hatten wir die Beziehung

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \Gamma_{jih} + \Gamma_{ijh}. \quad (10')$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$\Gamma_{ihj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right) + C_{ijr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^h} - C_{hjr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^i}, \quad (23)$$

mit

$$G^r = \frac{1}{4} g^{mr} \left(\frac{\partial^2 L^2}{\partial x'^m \partial x^k} x'^k - \frac{\partial L^2}{\partial x^m} \right). \quad (24)$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$\frac{\partial G^r}{\partial x'^h} = \Gamma_{ih}^r x'^i. \quad (25)$$

§4. Differentialgleichung der geodätischen Linien. Geometrisch werden die geodätischen Linien dadurch charakterisiert, daß sie ihre Richtung nicht ändern, d.h., daß ihre Tangentenvektoren durch Parallelverschiebung aus einander hervorgehen.

Wählen wir als Kurvenparameter die Bogenlänge s , so ist der Tangenteneinheitsvektor $l^i = dx^i/ds$. Für seine Parallelverschiebung hatten wir den Ausdruck:

$$Dl^i = \frac{dl^i}{ds} + l^k \Gamma_{kh}^i \frac{dx^h}{ds} = 0.$$

Damit erhalten wir als Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^h}{ds} \Gamma_{kh}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = 0. \quad (26)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (25) und der Homogenität von G^h in den x' können wir diese Differentialgleichung auch auf die Gestalt bringen:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = 0. \quad (27)$$

§5. Einige Beziehungen zwischen den ko- und kontravarianten Masstensen und ihren Ableitungen nach den Grössen x' .

Eine analoge Rechnung wie im §2 angewendet auf den Ausdruck

$$l^2(\xi) = g^{ik}(x, x') \xi_i \xi_k$$

unter Berücksichtigung der Gleichung (7) führt uns auf folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x'^l} = -2C^{ik}_l, \quad (28)$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma_{rl}^i g^{rk} - \Gamma_{rl}^k g^{ir}, \quad (29)$$

Aus den Gleichungen (28) und (18) ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x'^h} = -g^{\alpha i} g^{\beta k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x'^h} \quad (30)$$

bzw.

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'^h} = -g_{\alpha i} g_{\beta k} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x'^h}. \quad (31)$$

§6. Die Torsion. Wie wir bereits im ersten Kapitel erwähnt haben, hat die Finsler-Geometrie drei Krümmungstensoren und den Torsionstensor A_{ijk} . Der Torsionstensor läßt sich in der folgenden Weise aus der Grundfunktion $L(x, x')$ des Raumes ableiten. Es ist³

$$A_{ijk} = L(x^i, x'^i) C_{ijk} \quad (32)$$

und nach Gleichung (18) ist

$$A_{ijk} = \frac{1}{2} L \frac{\partial g_{ik}}{\partial x'^j} \quad (33)$$

bzw.

$$A_{ijk} = \frac{1}{4} L \frac{\partial^3 (L^2)}{\partial x'^i \partial x'^j \partial x'^k}.$$

Aus Gleichung (33) folgt die Symmetrie des Torsionstensors in allen drei Indices.

Die Existenz einer Torsion wird uns, wie wir im dritten Kapitel zeigen werden, die Konstruktion eines antisymmetrischen Tensors ermöglichen, der alle Voraussetzungen erfüllt, um das elektromagnetische Feld darzustellen. In diesem Zusammenhang möchten wir speziell darauf hinweisen, daß wir, da die Abweichung der Finsler-Geometrie von der Riemann'schen Geometrie in der Abhängigkeit der metrischen Fundamentalforn $g_{ik}(x, x')$ von den Größen x' besteht, nach Gleichung (33) in der Torsion geradezu ein Maß für die Größe dieser Abweichung haben.

Überschieben wir Gleichung (33) mit g^{kj} , so erhalten wir aus dem Torsionstensor A_{ijk} den Vektor A_i . Es ist somit:

$$A_i = \frac{1}{2} L g^{kj} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x'^j} = \frac{1}{2} L g^{kj} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x'^i}. \quad (34)$$

Bezeichnen wir die Determinante der g_{jk} mit g , also

$$g = |g_{jk}|,$$

so erhalten wir durch Differentiation dieses Ausdruckes:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jk}} = g^{jk} g \quad (35)$$

bzw.

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x'^i} = g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^i}.$$

Wir können somit A_i auch in der Form

$$A_i = \frac{1}{2} L \frac{\partial \log g}{\partial x'^i} = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x'^i} \quad (34')$$

schreiben.

Aus der Beziehung (34) folgt unter Berücksichtigung von (19), (18) und (14), daß

$$A_i l^i = 0$$

ist, bzw., folgt aus (14), (19) und (32) daß

$$A_{ijk} l^i = A_{ijk} l^j = A_{ijk} l^k = 0 \quad (36)$$

ist.

§7. Die Krümmung. Der erste oder Hauptkrümmungstensor des Finsler'schen Raumes ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:³

$$\begin{aligned} R_{ijkh} = & \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} - \left[\frac{\partial \Gamma^*_{ijh}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijh}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} \right] \\ & + C_{ijm} \left(\frac{\partial^2 G^m}{\partial x'^k \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^m}{\partial x'^h \partial x^k} - G^m_{kr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^h} + G^m_{hr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^k} \right) \\ & + \Gamma^*_{imh} \Gamma^{*m}_{jk} - \Gamma^*_{jmh} \Gamma^{*m}_{ik} \end{aligned}$$

(wobei $G_{ihj} = \Gamma^*_{ihj} + A_{ihj|0}$ bedeutet).

In einem Finsler'schen Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente, wie wir ihn unseren Betrachtungen zugrunde legen, müssen die Differentialgleichungen der Parallelübertragung der Linienelemente, also die Gleichungen (21), vollständig integrierbar sein. Dies führt nach dem Satz von Frobenius auf die notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\frac{\partial^2 G^j}{\partial x'^k \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^j}{\partial x'^h \partial x^k} - G^j_{kr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^h} + G^j_{hr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^k} = 0.$$

Nun ist aber

$$LR_0^j{}_{kh} = \frac{\partial^2 G^j}{\partial x'^k \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^j}{\partial x'^h \partial x^k} - G^j_{kr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^h} + G^j_{hr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^k}. \quad (37)$$

Somit ist ein Finsler'scher Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente durch die Bedingung³

$$R_0^j{}_{kh} = 0 \quad (38)$$

charakterisiert.

Hierbei haben wir $R_0^j{}_{kh}$ für $l^i R_{i kh}$ gesetzt. Der Hauptkrümmungstensor eines solchen Finsler'schen Raumes nimmt dann die Gestalt an:

$$R_{ijkh} = \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} - \left(\frac{\partial \Gamma^*_{ijh}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijh}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} \right) + \Gamma^{*m}_{ik} \Gamma^*_{mjh} - \Gamma^{*m}_{ih} \Gamma^*_{mjk}. \quad (39)$$

Wie wir aus (39) unmittelbar ersehen, ist der Tensor R_{ijkh} in bezug auf die beiden ersten und in bezug auf die beiden letzten Indices antisymmetrisch. Der aus ihm folgende zweistufige Einstein-Ricci Tensor R_{ik} hat die Gestalt:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^{*j}{}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{*j}{}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^{*j}{}_{ik}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^j} + \frac{\partial \Gamma^{*j}{}_{ij}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} + \Gamma^{*m}_{ik} \Gamma^*_{mj} - \Gamma^{*m}_{ij} \Gamma^*_{mk}. \quad (40)$$

Neben dem sogenannte Hauptkrümmungstensor existieren in der Finsler-Geometrie die beiden weiteren Krümmungstensoren³

$$S_{ijkh} = A_{jk}{}^m A_{ihm} - A_{jh}{}^m A_{ikm}, \quad (41)$$

$$P_{ijkh} = A_{jkh|i} - A_{ikh|j} + A_{ikm} A_j{}^m{}_{h0} - A_{jkm} A_i{}^m{}_{h0}, \quad (42)^*$$

welche sich aus der Torsion ergeben.

Während der Tensor S_{ijkh} in bezug auf die beiden ersten, sowie in bezug auf die beiden letzten Indices antisymmetrisch ist, gilt dies für den Tensor P_{ijkh} nur bezüglich der beiden ersten Indices. Nach der Beziehung (36) ist

$$S_{ijkh} l^i = S_{0jkh} = S_{i0kh} = S_{ij0h} = S_{ijk0} = 0. \quad (43)$$

Analog wird

$$P_{ijkh} l^i = P_{0jkh} = A_{jkh|i} l^i = A_{jkh0}, \quad (44)$$

$$P_{ijkh} l^h = P_{ijk0} = 0.$$

Durch zweimalige Verjüngung erhalten wir aus (41) den symmetrischen Tensor zweiter Stufe

$$S_{ik} = A_{jk}{}^m A_i{}^j{}_m - A^m A_{ikm} = S_{ki}. \quad (45)$$

Aus (42) folgt durch zweimalige Verjüngung der antisymmetrische Tensor

$$P_{ij} = A_{j|i} - A_{i|j} + A_i{}^h{}_m A_j{}^m{}_{h0} - A_j{}^h{}_m A_i{}^m{}_{h0}. \quad (46)$$

* Vergl. §8.

§8. Die kovariante Ableitung. Für die kovariante Ableitung eines r -fach kovarianten und 0-fach kontravarianten Tensors haben wir den Ausdruck^{4b}

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_0}{}_{|j} &= \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_0}}{\partial x^j} - \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_0}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^j} \\ &- \dots - \Gamma_{i_r j}^{*m} T_{i_1 \dots i_{r-1}}^{k_1 \dots k_0} + \Gamma_{m j}^{*k_1} T_{i_1 \dots i_r}^{m \dots k_0} \\ &+ \dots + \Gamma_{m j}^{*k_0} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots m}. \end{aligned} \quad (47)$$

Damit lautet die kovariante Ableitung des Vektors des Torsionstensors:

$$A_{i|j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_i}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^j} - \Gamma_{ij}^{*m} A_m. \quad (48)$$

Der Satz von Ricci. Aus (47) ergibt sich, unter Berücksichtigung der Beziehungen (10), (20) und (25) bzw. (29) die Übertragung des Lemmas von Ricci auf Finsler'sche Räume. Danach gilt:

$$g_{ik| \lambda} = 0 \quad \text{bzw.} \quad g^{ik}{}_{| \lambda} = 0. \quad (49)$$

Insbesondere ist die kovariante Ableitung der Grundfunktion $L(x, x')$ gleich 0, denn es ist:

$$L_{| \lambda} = \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^\lambda} = 0, \quad (50)$$

Zufolge der, für die kovariante Ableitung von Summen und Produkten gleichartiger Tensoren geltenden Rechenregeln, erhalten wir unter Berücksichtigung von (50) die Beziehung:

$$l^i{}_{|h} = \left(\frac{x'^i}{L} \right)_{|h} = 0 \quad (51)$$

bzw. unter Berücksichtigung von (49) und von $g_{ik} l^k = l_i$

$$l_{i|h} = 0. \quad (52)$$

Denn es ist:

$$\frac{x'^i{}_{|h} L - x'^i L_{|h}}{L^2} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^h} - \frac{\partial x'^i}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} + x'^m \Gamma_{mh}^{*i} \right) = 0.$$

Es läßt sich ferner zeigen, daß die kovariante Ableitung von $\sqrt{g}$ verschwindet. Nach (47) ist:

$$(\sqrt{g})_{|h} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} - \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x'^l} \frac{\partial G^l}{\partial x'^h} - \Gamma_{mh}^{*m} \sqrt{g}$$

und dies ist = 0 zufolge der Beziehungen (34'), (25) und weil $\partial \sqrt{g}/\partial x^h = \sqrt{g} \Gamma_{ih}^i$ ist, welche letztere Beziehung sich aus Gleichung (35) unter Berücksichtigung von (10') herleiten läßt.

Bezeichnen wir

$$T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |j| l^j = T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |0|_0,$$

so ist:

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |0|_0 &= \frac{x'^j}{L} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x^j} - \frac{2}{L} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x'^m} G^m \\ &\quad - \frac{1}{L} \frac{\partial G^m}{\partial x'^{i_1}} T_{m \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} - \dots - \frac{1}{L} \frac{\partial G^m}{\partial x'^{i_r}} T_{i_1 \dots m}^{k_1 \dots k_s} \quad (53) \\ &\quad + \frac{1}{L} \frac{\partial G^{k_1}}{\partial x'^m} T_{i_1 \dots i_r}^{m \dots k_s} + \dots + \frac{1}{L} \frac{\partial G^{k_s}}{\partial x'^m} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots m}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt hieraus für den Torsionstensor

$$\begin{aligned} A_{j \dots h}^m |0|_0 &= \frac{x'^\lambda}{L} \frac{\partial A_{jh}^m}{\partial x^\lambda} - \frac{2}{L} \frac{\partial A_{jh}^m}{\partial x'^l} G^l - \frac{1}{L} \frac{\partial G^l}{\partial x'^j} A_{lh}^m \\ &\quad - \frac{1}{L} \frac{\partial G^l}{\partial x'^h} A_{jl}^m + \frac{1}{L} \frac{\partial G^m}{\partial x'^n} A_{jh}^l. \end{aligned} \quad (54)$$

§9. Die kovariante Ableitung höherer Ordnung. Wir nennen die kovariante Ableitung der ersten kovarianten Ableitung eines Tensors seine zweite kovariante Ableitung und *usw.* Wir bezeichnen die zweite kovariante Ableitung eines Tensors $T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s}$ mit $T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |j| \lambda$.

Vertauschung der Reihenfolge der kovarianten Differentiationen. Unter Berücksichtigung der Beziehung (37) erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |j| \lambda - T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} | \lambda | j &= - \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x'^p} L R_0^p{}_{j\lambda} \\ &\quad - T_{m \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} \frac{\partial}{\partial x'^{i_1}} (L R_0^m{}_{j\lambda}) - \dots - T_{i_1 \dots m}^{k_1 \dots k_s} \frac{\partial}{\partial x'^{i_r}} (L R_0^m{}_{j\lambda}) \quad (55) \\ &\quad + T_{i_1 \dots i_r}^{m \dots k_s} \frac{\partial}{\partial x'^m} (L R_0^{k_1}{}_{j\lambda}) + \dots + T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots m} \frac{\partial}{\partial x'^m} (L R_0^{k_s}{}_{j\lambda}). \end{aligned}$$

Nach §7 sind die Finsler'schen Räume mit absolutem Parallelismus der Linienelemente durch $R_0^p{}_{jk} = 0$ gekennzeichnet. Dies ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die Vertauschung der Reihenfolge der kovarianten Ableitungen, d.h. in einem Finsler-Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente darf die Reihenfolge der zweiten kovarianten Ableitungen vertauscht werden.

Insbesondere gilt in einem solchen Raum analog zu (55)

$$T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |_{j|0} = T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |_{0|j}, \quad (56)$$

ebenso ist

$$A_{i|j|\lambda} = A_{i|\lambda|j} \quad (57)$$

bzw.

$$A_{i|j|0} = A_{i|0|j}.$$

§10. Vertauschung der kovarianten Ableitung mit der Differentiation nach x' .
Es gilt für einen beliebigen Tensor $T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x'^i} \right) |_{j} - \frac{\partial (T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} |_{j})}{\partial x'^i} &= -T_{i_1 \dots i_r}^{m \dots k_s} \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k_1}}{\partial x'^m} - \dots \\ &- T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots m} \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k_s}}{\partial x'^m} + T_{m \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} \frac{\partial \Gamma_{i_1}^{*m}}{\partial x'^i} + \dots + T_{i_1 \dots m}^{k_1 \dots k_s} \frac{\partial \Gamma_{i_r}^{*m}}{\partial x'^i} \end{aligned} \quad (58)$$

d.h. die Vertauschung der Reihenfolge dieser Differentiationen ist nur in einem Raum möglich, in welchem

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{*m}}{\partial x'^p} = 0,$$

d.h., wo Γ_{ij}^{*m} von x' unabhängig ist.

§11. Die den Bianchi-Identitäten entsprechenden Identitäten des Finsler-Raumes. Die, den Bianchi-Identitäten entsprechenden Identitäten lauten für unseren, der Bedingung (38) genügenden Finsler-Raum

$$R_{ihkl} + R_{iklh} + R_{ilhk} = 0, \quad (59)$$

$$R_{ijkh|l} + R_{ijhl|k} + R_{ijlk|h} = 0. \quad (60)$$

Aus der Beziehung (59) und der Schiefsymmetrie des Krümmungstensors R_{ijkh} in bezug auf die beiden ersten und die beiden letzten Indices folgt

$$R_{ijkh} - R_{khij} = 0. \quad (61)$$

Ferner erhalten wir aus (60) unter Berücksichtigung der Antisymmetrie der R_{ijhl} in den ersten Indices die Beziehung:

$$R_{ijkh|l} - R_{jihl|k} - R_{jiik|h} = 0. \quad (62)$$

Durch Überschiebung dieser Gleichung mit $g^{ji} \cdot g^{hl}$ ergibt sich daraus:

$$2 R_k{}^l{}_{|l} - R_{|k} = 0$$

bzw.

$$(R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R)_{|l} = 0. \quad (63)$$

§12. Approximation des Finsler'schen Raumes durch einen oskulierenden Riemann'schen Raum. Varga⁴ hat gezeigt, daß sich die Finsler'sche Maßbestimmung längs einer stetig differenzierbaren Folge von Linienelementen

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\tau) \\ x'^i &= x'^i(\tau) \end{aligned} \quad (\tau_0 \leq \tau \leq 1) \quad (64)$$

durch eine oskulierende Riemann'sche Maßbestimmung approximieren läßt. Dazu setzt er die Kurve $x^i(\tau)$ über die Linienelementfolge (64) hinaus fort, indem er die Grundfunktion des Raumes $L(x, x')$ als die Grundfunktion eines Variationsproblems betrachtet. Dann kann er durch die Linienelementfolge (64) eine einparametrische Schar von Extremalen legen. Diese Schar bettet er in eine Schar von Extremalen (man könnte sie auch in eine Schar gewöhnlicher Kurven einbetten), die einen gewissen Bereich dieses Finsler-Raumes schlicht bedeckt. Er ordnet dann jedem Punkt x^i dieses Bereiches eindeutig eine Richtung $r^i(x^i)$ zu, indem er auf jeder Extremalen die Bogenlänge $s = \int L(x, dx/dt) dt$ als Parameter wählt und den Tangentenvektor in bezug auf diesen Parameter bestimmt. Einfachheitshalber setzt er die Linienelementfolge so gewählt voraus, daß sie mit den Ableitungen der Extremalen nach der Bogenlänge zusammenfallen. Dann ist:

$$x'^i(\tau) = r^i(x^i(\tau)).$$

Durch Einsetzen der Funktion $r^i(x^i)$ in den Maßtensor $g_{ik}(x, x')$ lautet er

$$g_{ik}(x^i, r^i(x^i)) = \gamma_{ik}(x^i), \quad (65)$$

wobei also $\gamma_{ik}(x^i)$ den Maßtensor eines Riemann'schen Raumes in diesem Bereiche bedeutet.

Die Extremalen, die zu dieser Riemann'schen Maßbestimmung

$$(ds^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k)$$

gehören, haben die charakteristische Eigenschaft, die zur Grundfunktion $L(x, dx)$ gehörenden Extremalen zu oskulieren, falls sie ein Linienelement (x^i, r^i) gemeinsam haben. Wegen dieser Eigenschaft wird der so bestimmte Riemann'sche Raum ein den Finsler-Raum längs der Kurvenschar mit dem Richtungsfeld r^i oskulierender Riemann'sche Raum genannt.

Diese Überlegungen vereinfachen sich ganz erheblich, wenn wir sie auf einen Finsler'schen Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente anwenden, wie wir ihn unseren späteren Betrachtungen zugrunde legen werden. In einem

solchen Finsler'schen Raum können wir immer ein Feld von parallelen Linienelementen auszeichnen. Dieses Feld sei durch

$$x'^i = x'^i(x^i),$$

gegeben. Dann werden in diesem Feld sämtliche Größen Ortsfunktionen, also speziell auch der Maßtensor

$$g_{ik}(x^i, x'^i(x^i)) = \gamma_{ik}(x^i), \quad (65')$$

wobei also $\gamma_{ik}(x^i)$ der Maßtensor des oskulierenden Riemann'schen Raumes ist. Es läßt sich ferner zeigen, daß dieser Riemann'sche Raum konstante Krümmung hat. Doch wollen wir bezüglich einer ausführlichen analytischen Behandlung dieser Probleme auf die Publikationen von Varga⁴ verweisen. Hier wollten wir nur diejenigen Zusammenhänge kurz skizzieren, die wir im dritten Kapitel bei der Frage des Wegtransformierens der Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes benötigen werden.

III. DIE FELDGLEICHUNGEN

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, dem elektromagnetischen Feldtensor in unserem speziellen Finsler'schen Raum eine selbständige geometrische Interpretation zu geben, welche den im ersten Kapitel erwähnten Bedingungen genügt, und die sich aus dieser Darstellung ergebenden Folgerungen zu diskutieren.

§1. Der elektromagnetische Feldtensor. Entsprechend unseren Betrachtungen im ersten Kapitel versuchen wir nun, das elektromagnetische Feld durch den folgenden antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe darzustellen:

$$P_{ij} = A_{j|i} - A_{i|j}. \quad (66)$$

Das elektromagnetische Potential erscheint hierbei als unmittelbarer Ausdruck der Torsion des Raumes, nämlich als der Vektor des Torsionstensors.

§2. Der Erhaltungssatz der Ladung. Um zeigen zu können, daß die Beziehung (66) physikalisch sinnvoll ist, muß nebst weiteren Forderungen auch der Erhaltungssatz der Ladung erfüllt bleiben. Dies folgt unmittelbar aus der Schief-symmetrie des Feldtensors und der Beziehung (57). Für den Strom haben wir den Ausdruck:

$$I^i = \epsilon_0 P^{ik}{}_{|k} = \epsilon_0 (g^{\alpha i} A^k{}_{|\alpha|k} - g^{\beta k} A^i{}_{|\beta|k}) \quad (67)$$

und hieraus folgt unter Berücksichtigung von (57), daß die Feldwirbel I^i quellenfrei vorgegeben sind, also daß

$$I^i{}_{|i} = 0 \quad (68)$$

ist.

§3. Die Maxwellgleichungen für den materiefreien Raum. Wir betrachten zunächst das homogene System der Maxwellgleichungen, also dasjenige, das die Ladungsdichte nicht enthält. Es lautet:

$$P_{ij|k} + P_{ki|j} + P_{jk|i} = 0. \quad (69)$$

Durch Einsetzen der aus Gleichung (66) folgenden Werte für die Größen $P_{ij|k}$ in obiges Gleichungssystem erkennen wir, daß dieses Gleichungssystem zufolge der Beziehung (57), d.h. in unserem speziellen Finsler'schen Raum, automatisch erfüllt ist.

Das inhomogene System der Maxwellgleichungen läßt sich in der Form darstellen:

$$\epsilon_0 P^{ik}{}_{|k} = I^i \quad \text{mit} \quad I^i{}_{|i} = 0$$

und wird nach §2 auch befriedigt.

§4. Die Lorentzkraft. Das elektromagnetische Feld übt auf die Ströme die sogenannte Lorentzkraft aus. Wenn wir den Feldtensor kennen, können wir die Lorentzkraft berechnen. Sie ist:

$$k_j = -\epsilon_0 P^{ik} \cdot P_{ij}. \quad (70)$$

Die Lorentzkraft ist also durch die Größen $A_{i|j}$ d.h. durch die Geometrie des Raumes vollständig bestimmt. Sie wird, wie wir dies im ersten Kapitel forderten, analog wie die Gravitationskraft, d.h. mit dieser zusammen zu einer Raum-Zeit-formenden Wirkung. Setzen wir in (70) die Beziehungen (66) und (67) ein, so lautet der Ausdruck für die Lorentzkraftdichte:

$$k_j = \epsilon_0 (g^{k\beta} A^i_{|\beta|k} \cdot A_{j|i} - g^{\alpha i} A_{j|i} \cdot A^k_{|\alpha|k} + A^\alpha_{|j} \cdot A^k_{|\alpha|k} - g^{k\beta} A^i_{|\beta|k} \cdot A_{i|j}). \quad (71)$$

§5. Aufbau des Energie-Impulstensors T_i^k des elektromagnetischen Feldes. Da die Lorentzkraftdichte die Quelle des Energie-Impulstensors T_i^k des elektromagnetischen Feldes ist, läßt sie sich auch in der Form darstellen:

$$k_i = -T_i^k{}_{,k}, \quad (72)$$

wenn wir in Analogie zur gewöhnlichen Elektrodynamik die Beziehung (70) unter Berücksichtigung von (69) und der Antisymmetrie des Feldtensors derart umformen, daß T_i^k die folgende Gestalt annimmt:

$$T_i^k = \epsilon_0 (P_{i\rho} P^{k\rho} - \frac{1}{2} \delta_i^k P_{rs} P^{rs}). \quad (73)$$

Setzen wir hierin für $P_{i\rho}$ bzw. für $P^{k\rho}$ den sich aus (66) ergebenden Ausdruck ein, so lautet der Energie-Impulstensor:

$$T_i^k = \epsilon_0 [g^{k\alpha} A_{\rho|i} A^\rho_{|\alpha} - A_{i|\rho} A^\rho_{|\alpha} g^{k\alpha} - A^\beta_{|i} A^k_{|\beta} + g^{\rho\beta} A_{i|\rho} A^k_{|\beta} - \frac{1}{2} \delta_i^k (g^{r\alpha} A_{s|r} A^r_{|\alpha} - A^\alpha_{|s} A^r_{|\alpha})]. \quad (74)$$

Aus (74) folgt, daß sein Skalar verschwindet, also daß

$$T_i^i = 0 \quad (75)$$

ist.

§6. Der Erhaltungssatz der Energie und des Impulses der Materie. In Anlehnung an die allgemeine Relativitätstheorie bezeichnen wir den Energie-Impulstensor der Materie mit:

$$T_{ik} = -\frac{1}{\kappa} (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R). \quad (76)$$

Im Falle des Verschwindens des elektromagnetischen Feldes geht der Tensor T_{ik} wie wir im letzten Paragraphen zeigen werden in den Energie-Impulstensor der allgemeinen Relativitätstheorie über.

Die Beziehung (63) besagt nun, daß

$$T_i{}^l{}_{;l} = 0$$

ist, und stellt somit den Erhaltungssatz der Energie und des Impulses der Materie dar.

§7. Die Gravitationseffekte des elektromagnetischen Feldes. Nach der allgemeinen Beziehung zwischen Masse und Energie besitzt die elektrische Energie auch eine träge, bzw. schwere Masse, die ihrerseits gravitierend wirkt und also die Metrik beeinflusst. Dieser Effekt kommt in unserer Geometrie sehr klar in der Abhängigkeit des Krümmungstensors R_{ik} von den Größen x' zum Ausdruck. Die Abweichung vom Einstein-Ricci-Tensor besteht in der Abhängigkeit der Übertragungsparameter Γ_{ih}^k von den Größen x' , sowie im Auftreten zusätzlicher Glieder, deren Summe wir mit Z_{ik} bezeichnen. Unter Berücksichtigung der Beziehungen (40) und (20) können wir in Anlehnung an den Einstein-Ricci-Tensor den verjüngten Krümmungstensor R_{ik} unseres Finsler'schen Raumes auch in der Form schreiben:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h(x, x')}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mh}^h - \Gamma_{ih}^m \Gamma_{mk}^h + Z_{ik}(x, x') \quad (77)$$

bzw.

$$R_{ik} = r_{ik} + Z_{ik}, \quad (78)$$

mit

$$Z_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*h}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} [C_{is}^h \Gamma_{hl}^s x'^l] - \frac{\partial}{\partial x^h} [C_{is}^h \Gamma_{kl}^s x'^l], \quad (79)$$

Der Energie-Impulstensor der Materie lautet dann:

$$T_{ik}(x, x') = -\frac{1}{\kappa} [(r_{ik}(x, x') - \frac{1}{2} g_{ik} r + Z_{ik}(x, x') - \frac{1}{2} g_{ik} Z)]. \quad (80)$$

Die Beziehungen (77) und (80) zeigen, daß die beiden Felder, Gravitations- und elektromagnetisches Feld, in unserer Theorie miteinander verkoppelt sind, daß es unmöglich ist, sie in von einander unabhängige Bestandteile aufzuspalten. Wohl folgt aus Gleichung (80) der Beitrag des elektromagnetischen Feldes zum Energie-Impulstensor T_{ik} , in der Größe:

$$Z_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} Z,$$

doch ist eine totale Abspaltung insofern unmöglich, als die Tensoren r_{ik} noch von den Größen x' abhängen. Erst im Falle des Verschwindens des elektromagnetischen Feldes geht unser Krümmungstensor R_{ik} , wie wir im letzten Para-

graphen zeigen werden, in den Einstein-Ricci-Tensor über und damit erhalten wir das reine Gravitationsfeld.

§8. Der Scheinkraftcharakter der Lorentzkraft. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt⁶, daß man immer eine hinreichend kleine Umgebung eines Punktes des Riemann'schen Raumes auf ein geodätisches Koordinatensystem beziehen kann. Ein solches Koordinatensystem ist durch das Verschwinden der Übertragungsparameter Γ_{ikl} , d.h. durch den stationären Charakter der g_{ik} in dem betreffenden Punkte bestimmt. Physikalisch besagt dies die Möglichkeit, durch Koordinatentransformation die Kraftwirkung des Schwerfeldes in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes wegzutransformieren.

In Kapitel II, §12 haben wir die Möglichkeit erwähnt, den Finsler'schen Raum längs einer stetig differenzierbaren Linienelementfolge durch einen den Finsler'schen Raum längs dieser Linienelementfolge oskulierenden Riemann'schen Raum zu ersetzen. Insbesondere können wir in einem ganzen Bereiche eines Finsler-Raumes mit absolutem Parallelismus der Linienelemente, der also der Bedingung (38) genügt, ein Feld von parallelen Linienelementen auszeichnen und den Finsler'schen Raum längs dieses Feldes durch einen nichteuklidischen Raum ersetzen, d.h. wir können diesen Finsler'schen Raum längs des Feldes auf ein solches Koordinatensystem beziehen, in welchem der Maßtensor g_{ik} nur vom Orte abhängt (vgl. (65')). Somit können wir in diesem Feld von parallelen Linienelementen durch Koordinatentransformation die Lorentzkraft wegtransformieren.

In diesem nichteuklidischen Raum können wir jeden Punkt, also insbesondere die Berührungspunkte mit unserem Finsler-Raum auf ein geodätisches Koordinatensystem beziehen, wodurch auch die Kraftwirkung des Schwerfeldes wegtransformiert wird. Es ist somit möglich, in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes des unseren Betrachtungen zugrunde gelegten Finsler'schen Raumes durch geeignete Koordinatentransformation die Kraftwirkung sowohl des elektromagnetischen als auch des Gravitationsfeldes wegzutransformieren. Die Lorentzkraft ist somit in unserer Theorie ebenso wie die Gravitation in der allgemeinen Relativitätstheorie und die Coriolis- und Zentrifugalkraft in der Newton-Theorie eine Scheinkraft.

§9. Die Bewegung eines geladenen Massenpunktes. In §8 haben wir gesehen, daß wir die Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes in einem ganzen Bereiche durch eine stetige Transformation wegtransformieren können, indem wir den, unseren Betrachtungen zugrunde gelegten Finsler'schen Raum durch einen ihn in diesem Bereich oskulierenden Riemann'schen Raum ersetzen. Dabei oskulieren die geodätischen Linien der beiden Räume einander. Die Weltlinie eines geladenen Massenpunktes ist in diesem oskulierenden Riemann'schen Raum nach den Gesetzen der allgemeinen Relativitätstheorie eine geodätische Linie. Somit bewegt sich dieser geladene Massenpunkt im Finsler'schen Raum längs der diese geodätische Linie des Riemann'schen Raumes oskulierenden geodäti-

sehen Linie unseres Finsler'schen Raumes. Da die Geschwindigkeit eines solchen Massenpunktes durch den Einheitsvektor im Linienelement l^i dargestellt wird, erhalten wir als Bewegungsgleichung nach Kapitel II, §4 die Differentialgleichung der geodätischen Linie.

§10. Das reine Gravitationsfeld. Wir betrachten nun noch den Grenzfall des Verschwindens des elektromagnetischen Feldes. Nach der Beziehung (66) ist dies gleichbedeutend mit:

$$A_{i|j} = A_{j|i}.$$

Diese Gleichung ist nach (34), (49) und (58) nur für

$$A_{i|j} \equiv A_{j|i} \equiv 0 \quad (81)$$

erfüllt. Das heißt, das elektromagnetische Feld verschwindet nur, wenn $A_{i|j} \equiv 0$ wird. Die Bedingung (81) läßt sich nach (58) auch durch

$$\frac{\partial \Gamma^{*m}_{ij}}{\partial x'^p} = 0$$

ausdrücken. Diese letztere Beziehung besagt, daß die Übertragungsparameter Γ^{*m}_{ij} von den Größen x' unabhängig sind. Berücksichtigen wir noch die Gleichung (20) so hat unsere Bedingung die Unabhängigkeit der Übertragungsparameter Γ^m_{ij} von den Größen x' zur Folge. Dies heißt aber, daß dann die Übertragungsparameter Γ^m_{ij} in diejenigen der Riemann'schen Geometrie übergehen und daß gemäß der Formel (40) unser Krümmungstensor R_{ik} identisch wird mit dem Einstein-Ricci-Tensor. Wir erhalten somit im Falle des Verschwindens des elektromagnetischen Feldes die Einstein'schen Gleichungen des Gravitationsfeldes.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. A. MERCIER (Bern) möchte ich für die zahlreichen wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen. Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Dr. F. DESSAUER (Fribourg) bestens dafür, daß er es mir ermöglichte, die vorliegende Arbeit in seinem Institut auszuführen.

LITERATUR

1. HORVATH, J. I.: *Phys. Rev.* **80**, 901 (1950).
2. HORVATH, J. I. und MOOR, A.: *Zeitschrift f. Physik*, **131** 4. (Schluß-) Heft (1952).
3. CARTAN, E.: Les Espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles* **79**, Paris.
- 4a. VARGA, O.: *Mh. Math. Phys.* **50** (1941).
- 4b. VARGA, O.: *Comm. Math. Helv.* **19** (1946/47).
5. SCHOUTEN, J. A.: Der Ricci-Kalkül. *Die Grundlagen der Math. Wiss. in Einzeldarstellung X*.
6. PAULI, W.: Relativitätstheorie. *Encyklopädie der Math. Wissenschaften.* **5**.