Verallgemeinerte Multipolfelder

REIMAR LÜST, ARNULF SCHLÜTER UND
ELEONORE TREFFTZ

Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

Communicated by W. TOLLMIEH

Zusammenfassung. Es werden skalare und vektorielle verallgemeinerte Multipolfelder definiert, so dass bei Rückführung auf das Potential des Unipols statt der Funktion $1/r$ (wie bei den gewöhnlichen Multipolfeldern) eine beliebige kugelsymmetrische Stammfunktion $g(r)$ auftritt. Es werden explizite Darstellungen dieser Felder, Differentiationsformeln und algebraische Zusammenhänge zwischen ihnen abgeleitet. Formeln für die Multiplikation zweier beliebiger Multipolfelder mit einander werden angegeben. Die Entwicklung eines vorgegebenen zylindersymmetrischen Feldes nach allgemeinen Multipolen und ihre Eindeutigkeit werden betrachtet. Im Anhang wird ein aus der Theorie stellarer Magnetfelder stammendes Beispiel näher ausgeführt.

Die folgende Untersuchung ist aus einem praktischen Bedürfnis bei der Behandlung von Problemen entstanden, dessen wesentliche Züge so charakterisiert werden können: Es ist ein System von (evt. nichtlinearen) Vektordifferentialgleichungen zu integrieren; die angestrebte Lösung sei zylindersymmetrisch um eine Achse auf der sich ein ausgezeichneter Punkt befindet (etwa als Schnittpunkt mit einer Symmetrieebene der Lösung); man wisse von der Lösung bereits, dass sie sich auf jeder Kugelschale um diesen Mittelpunkt einigermaßen einfach verhalte, aber vielleicht in komplizierter Weise vom Mittelpunktsabstand abhängen. Ein typisches Problem dieser Art ist die Theorie des inneren Aufbaus rotierender Sterne. Ein anderes (damit zusammenhängendes) Problem ist im Anhang dargestellt; hier besitzt die Lösung auch nicht annähernd Kugelsymmetrie.

In solchen Fällen ist es nun häufig sehr unzweckmässig, ein spezielles Koordinatensystem einzuführen und die Vektorgleichungen in ihre Komponenten aufzuspalten, da dabei leicht der Überblick über die Bedeutung und Grösse der einzelnen Glieder, sowie über die geltenden Identitäten (z.B. $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$) verlorengeht. Insbesondere wird hierdurch die exakte oder näherungs-

weise Überführung der partiellen Differentialgleichungen in ein (endliches) System gewöhnlicher Differentialgleichungen praktisch undurchführbar. Vor allem bei nichtlinearen Problemen bleibt aber oft keine andere Möglichkeit als eine solche Reduktion, um mit einem tragbaren Aufwand an numerischer Arbeit zu einer brauchbaren Lösung zu gelangen.

Mit den im folgenden abgeleiteten Sätzen lassen sich nun Vektorgleichungen in Systeme von Gleichungen von skalaren, nur vom Mittelpunktsabstand abhängigen "Stammfunktionen" überführen. Im allgemeinen Falle, besonders bei der Multiplikation von zwei Multipolfeldern entstehen dabei ziemlich verwickelte Ausdrücke, die sich aber für Felder geringer Ordnung in der "Polzahl" auf überschaubare Formeln reduzieren.

Für den Fall, dass die Stammfunktionen g der Wellengleichung

$$\Delta g + \text{const. } g = 0, \text{ const. } > 0$$

genügen, (aber nicht notwendig rotationssymmetrisch sind) hat W. M. Elsasser¹ ähnliche Entwicklungen angegeben.

1. Aufteilung in $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$ -Felder. Es sollen im folgenden stets zylindersymmetrische Vektorfelder betrachtet werden. Ein solches Feld lässt sich stets algebraisch zusammensetzen aus einem Feld, das in den Meridianebenen verläuft, und aus einem Feld, dessen Feldlinien parallel zur Äquatorebene verlaufen. Nach einem bekannten Satz lässt sich ein Vektorfeld unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen eindeutig als Summe eines quellenfreien und eines wirbelfreien Feldes darstellen, wobei die Zuordnung von Feldern, die im ganzen Aussenraum sowohl wirbel- wie quellenfrei sind (deren Potential bzw. Vektorpotential also der Potentialgleichung genügt), willkürlich bleibt. Wegen der Symmetrievoraussetzung muss der wirbellose Teil des Feldes ganz in den Meridianebenen liegen. Wir nennen diesen wirbelfreien Anteil des Feldes das "*Quellfeld*" $\mathfrak{Q}$ mit dem Potential S und den anderen Teil des Feldes, der ganz in den Meridianebenen liegt und quellenfrei ist, poloidales Feld oder kurz "*Polfeld*" $\mathfrak{P}$. Das quellenfreie Feld, dessen Feldlinien parallel zur Äquatorebene verlaufen, heisse toroidales Feld oder kurz "*Torfeld*" $\mathfrak{T}$.

Man kann also ein allgemeines zylindersymmetrisches Vektorfeld α , falls die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, als aus Quell-, Pol- und Torfeldern zusammengesetzt betrachten:

$$\alpha = \mathfrak{Q} + \mathfrak{P} + \mathfrak{T} \quad (1, 1)$$

mit $\text{rot } \mathfrak{Q} = 0$, $\text{div } \mathfrak{P} = 0$ und $\text{div } \mathfrak{T} = 0$. Die tatsächliche Zerlegung eines gegebenen Vektorfeldes wird im Abschnitt 9c betrachtet.

2. Koordinatensysteme. Zur Darstellung der $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ -Felder sollen Kugelkoordinaten r , θ , ϕ und Zylinderkoordinaten z , ρ , ϕ benutzt werden. Die Sym-

¹ W. M. ELSASSER, Phys. Rev. **69**, 106 (1946).

metrieachse sei die z -Achse. Der Einheitsvektor in der z -Richtung werde mit $\mathbf{m}$ bezeichnet. Dann gilt

$$(\mathbf{m}\mathbf{r}) = r \cos \theta = z \quad (2, 1)$$

wobei $\mathbf{r}$ der Ortsvektor vom Koordinatensprung ist.

Für die Ableitung nach z bei konstant gehaltenen ρ kann man schreiben

$$\frac{\partial}{\partial z} \dots = (\mathbf{m} \text{ grad } \dots). \quad (2, 2)$$

Falls nicht anders gesagt, werden wir im folgenden stets unter $(\partial/\partial z)$ die Ableitung nach z bei festem ρ verstehen.

Für das Vektorprodukt aus $\mathbf{m}$ und $\mathbf{r}$ ergibt sich

$$|[\mathbf{m}\mathbf{r}]| = r \sin \theta = \rho, \quad (2, 3)$$

wobei ρ der Abstand von der z -Achse ist. Also

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \quad (2, 4)$$

Es sei $g(r)$ eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion des Abstandes r . Die Differentiation nach r wird im folgenden stets mit einem "Strich" bezeichnet. Dann gilt

$$\Delta g \equiv \text{div grad } g = \frac{2g'}{r} + g''. \quad (2, 5)$$

Oft ist es einfacher g als Funktion von r^2 aufzufassen. Wir werden die "physikalische" Bezeichnungsweise verwenden und unter $g(r)$ und $g(r^2)$ dieselbe Funktion im Raum verstehen. Die Differentiation nach r^2 wird immer mit einem "Punkt" bezeichnet. Es gilt die Identität

$$g' = 2r\dot{g} \quad (2, 6)$$

und

$$\Delta g = 6\dot{g} + 4r^2\ddot{g} = \frac{\partial}{\partial r^2} (2g + 4r^2\dot{g}). \quad (2, 7)$$

Für manche Fälle ist es im folgenden zweckmässig, in der Meridianebene eine Darstellung in dem schiefwinkligen Koordinatensystem $\mathbf{r}, \mathbf{m}$ zu wählen. Es seien deshalb die Gleichungen angegeben, welche diese schiefwinkligen Koordinaten mit den Zylinderkoordinaten ρ, z verknüpfen. Ein Vektor $\mathbf{a}$ in der Meridianebene habe in Zylinderkoordinaten die Darstellung

$$\mathbf{a} = a_\rho \tilde{\rho} + a_z \mathbf{m}, \quad (2, 8)$$

wobei $\vec{\rho}$ ein Einheitsvektor in der ρ -Richtung ist. In den schiefwinkligen Koordinaten lautet die Darstellung

$$\mathbf{a} = a_r \frac{\mathbf{r}}{r} + a_m \mathbf{r}_1. \quad (2, 9)$$

Hierin ist a_m , die Komponente in der m -Richtung in den schiefwinkligen Koordinaten, nicht gleich a_z , der z -Komponente in den rechtwinkligen Koordinaten. Man erhält:

$$a_\rho = a_r \sin \theta = a_r \frac{\rho}{r} \quad (2, 10)$$

und

$$a_z = a_m + a_r \cos \theta = a_m + a_r \frac{z}{r}. \quad (2, 11)$$

3. Gewöhnliche Multipolfelder. Die skalaren Potentiale der gewöhnlichen Multipolfelder können bekanntlich durch Differentiationsprozesse aus dem Potential einer Punktladung abgeleitet werden. Das Potential der Punktladung ist durch $-(1/r)$ gegeben. Wir schreiben dafür in Übereinstimmung mit der später eingeführten allgemeinen Bezeichnungsweise: $S_0\{-(1/r)\}$, also

$$S_0\left\{-\frac{1}{r}\right\} \equiv -\frac{1}{r}; \quad r > 0. \quad (3, 1)$$

Durch Gradienten-Bildung erhält man daraus das Feld der Punktladung, das in unserer Sprechweise ein Quellfeld ist:

$$\mathfrak{D}_0\left\{-\frac{1}{r}\right\} = \text{grad } S_0\left\{-\frac{1}{r}\right\} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3, 2)$$

Das Potential eines *Bipols* erhält man, indem man die Operation ($m \text{ grad } \dots$) auf $S_0\{-(1/r)\}$ anwendet, also

$$S_1\left\{-\frac{1}{r}\right\} = \left(m \text{ grad } S_0\left\{-\frac{1}{r}\right\}\right) = \frac{(m\mathbf{r})}{r^3}, \quad (3, 3)$$

während das Feld $\mathfrak{D}_1$ des Bipols wieder durch

$$\mathfrak{D}_1\left\{-\frac{1}{r}\right\} = \text{grad } S_1\left\{-\frac{1}{r}\right\} \quad (3, 4)$$

gegeben ist.

Zum Potential des nächsthöheren Pols, des *Quadrupols*, gelangt man durch erneute Anwendung der Operation ($m \text{ grad } \dots$) auf S_1 . Das Potential des 2^n -Pols ist so schliesslich gegeben durch:

$$S_n\left\{-\frac{1}{r}\right\} = \left(m \text{ grad } S_{n-1}\left\{-\frac{1}{r}\right\}\right), \quad (3, 5)$$

und das Feld des 2^n -Pols ist:

$$\mathfrak{D}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = \text{grad } S_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\}. \quad (3, 6)$$

Alle diese Felder sind als Quellfelder natürlich wirbelfrei, d.h.

$$\text{rot } \mathfrak{D}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = 0. \quad (3, 7)$$

An die Stelle des skalaren Potentials kann auch das Vektorpotential treten, um die gewöhnlichen Multipolfelder zu entwickeln, da sie gleichzeitig im ganzen Aussenraum ($r > 0$) quellenfrei und wirbelfrei sind. Das Vektorpotential eines in einer Meridianebene verlaufenden Feldes (also eines Polfeldes) ist ein Torfeld und das durch Rotationsbildung daraus entstehende Feld ist definitionsgemäss ein Polfeld. Es ist also hier

$$\mathfrak{P}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = \text{rot } \mathfrak{T}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\}, \quad (3, 8)$$

wobei $\mathfrak{T}_n \{-(1/r)\}$ das Vektorpotential des 2^n -Pols ist, während $\mathfrak{P}_n \{-(1/r)\}$ das Feld des 2^n -Pols ist, für das hier natürlich gilt:

$$\mathfrak{P}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = \mathfrak{D}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\}, \quad (3, 9)$$

mit

$$\text{div } \mathfrak{P}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = 0, \quad r > 0. \quad (3, 10)$$

Für den Bipol ist z.B.

$$\mathfrak{T}_1 \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = \left[m \text{ grad } \frac{1}{r} \right] = \left[\mathfrak{D}_0 \left\{ -\frac{1}{r} \right\}, m \right], \quad (3, 11)$$

und allgemein gilt

$$\mathfrak{T}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = [\mathfrak{D}_{n-1} m] \quad (3, 12)$$

mit

$$\text{div } \mathfrak{T}_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = 0. \quad (3, 13)$$

Die skalaren Potentiale $S_n \{-(1/r)\}$ sind mit den Legendreschen Kugelfunktionen

$$P_n (\cos \theta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (3, 14)$$

(die Differentiation ist nach unserer Konvention, s.(2.2), bei konstantem ρ durchzuführen) auf folgende Art verknüpft:

$$S_n \left\{ -\frac{1}{r} \right\} = (-1)^{n+1} n! \frac{1}{r^{n+1}} P_n (\cos \theta). \quad (3, 15)$$

4. Definition von verallgemeinerten Multipolfeldern. Die gewöhnlichen Multipolfelder sollen nun dadurch verallgemeinert werden, dass anstelle der Funktion $-(1/r)$ beim skalaren Potential des Unipols eine willkürliche Funktion $g(r)$ des Abstandes r eingeführt wird, während die übrigen Definitionen beibehalten werden. Die "Stammfunktion" $g(r)$ sei für alle endlichen positiven Werte von r definiert und hinreichend oft differenzierbar. Singularitäten für $r = 0$ und $r \rightarrow \infty$ sind zugelassen, aber der Gültigkeitsbereich aller Ableitungen ist auf das Gebiet eingeschränkt, indem $g(r)$ sich regulär verhält. Der Ausdruck Δg , der für die gewöhnlichen Multipolfelder ($g = -1/r$) für $r > 0$ verschwindet und im Nullpunkt singular ist, soll jetzt ein Mass für die Dichte einer (i.a.) kontinuierlichen Verteilung von elementaren gewöhnlichen Multipolladungen sein, die das betrachtete Feld erzeugen.

Es sei also jetzt:

$$S_0\{g\} \equiv g(r). \quad (4, 1)$$

Die höheren *skalaren Potentiale* erhält man wie früher:

$$S_{n+1}\{g\} = (m \text{ grad } S_n\{g\}). \quad (4, 2)$$

Durch Bildung des Gradienten von $S_n\{g\}$ wird dann ein *Quellfeld* $\mathfrak{Q}_n\{g\}$ definiert

$$\mathfrak{Q}_n\{g\} = \text{grad } S_n\{g\}. \quad (4, 3)$$

Aus diesem Quellfeld wird auf folgende Art ein *toroidales Vektorfeld* $\mathfrak{T}_n\{g\}$ gebildet:

$$\mathfrak{T}_{n+1}\{g\} = [\mathfrak{Q}_n\{g\}, m], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4, 4)$$

Dass ein solches Torfeld wirklich quellenfrei ist, kann auch durch direktes Differenzieren der Definitionsgleichung (4, 4) bestätigt werden. Durch Rotationsbildung von $\mathfrak{T}_n\{g\}$ gelangt man zu einem *poloidalen Vektorfeld* $\mathfrak{P}_n\{g\}$:

$$\mathfrak{P}_n\{g\} = \text{rot } \mathfrak{T}_n\{g\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4, 5)$$

das natürlich quellenfrei ist. Für $n = 0$ ist weder ein Torfeld noch ein Polfeld definiert, wohl aber $\mathfrak{Q}_0$ und S_0 .

Für alle eben eingeführten Felder gelten die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} = (m \operatorname{grad})\mathfrak{Q}_n\{g\} \quad (4, 6)$$

$$\mathfrak{T}_{n+1}\{g\} = (m \operatorname{grad})\mathfrak{T}_n\{g\} \quad (4, 7)$$

$$\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} = (m \operatorname{grad})\mathfrak{P}_n\{g\}. \quad (4, 8)$$

Beweise der Gln. (4, 6) bis (4, 8). Es gilt für alle Felder a und b die Vektorgleichung:

$$(b \operatorname{grad}) a = \frac{1}{2}(\operatorname{rot} [ab] + \operatorname{grad} (ab) - a \operatorname{div} b + b \operatorname{div} a - [a \operatorname{rot} b] - [b \operatorname{rot} a]).$$

Es ist also

$$a) \quad (m \operatorname{grad}) \mathfrak{Q}_n = \frac{1}{2}(\operatorname{rot} [\mathfrak{Q}_n m] + \operatorname{grad} (m\mathfrak{Q}_n) + m \operatorname{div} \mathfrak{Q}_n).$$

Nach Gl. (4, 4), (4, 2) und (4, 9) wird daraus

$$\frac{1}{2}(\operatorname{rot} \mathfrak{T}_{n+1}\{g\} + \operatorname{grad} S_{n+1}\{g\} + m S_n\{\Delta g\}).$$

Mit Hilfe der erst in Abschnitt 6a abgeleiteten Gl. (6, 6) (wobei aber die Gl. (4, 6) bis (4, 8) nicht benutzt werden) erhält man schliesslich:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} + \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} + \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} - \mathfrak{P}_{n+1}\{g\}).$$

Also

$$(m \operatorname{grad})\mathfrak{Q}_n\{g\} = \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\}.$$

Nach der obigen Vektorgleichung gilt:

$$b) \quad (m \operatorname{grad})\mathfrak{T}_n\{g\} = \frac{1}{2}(\operatorname{rot} [\mathfrak{T}_n\{g\} m] - [m \operatorname{rot} \mathfrak{T}_n\{g\}]).$$

Mit Gl. (6, 4) und (6, 5) bekommt man (s. vorigen Beweis):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\operatorname{rot} (m S_n\{g\} - \mathfrak{Q}_{n-1}\{g\}) + \mathfrak{T}_{n+1}\{g\}) &= \frac{1}{2}(-[m \operatorname{grad} S_n\{g\}] + \mathfrak{T}_{n+1}\{g\}) \\ &= \frac{1}{2}(-[m \mathfrak{Q}_n\{g\}] + \mathfrak{T}_{n+1}\{g\}). \end{aligned}$$

Nach Gl. (4, 4) ist dies:

$$= \frac{1}{2}(+ \mathfrak{T}_{n+1}\{g\} + \mathfrak{T}_{n+1}\{g\}).$$

Also

$$(m \operatorname{grad})\mathfrak{T}_n\{g\} = \mathfrak{T}_{n+1}\{g\}.$$

Es gilt nach der obigen Vektorgleichung:

$$c) \quad (m \operatorname{grad})\mathfrak{P}_n\{g\} = \frac{1}{2}(\operatorname{rot} [\mathfrak{P}_n\{g\} m] + \operatorname{grad} (m\mathfrak{P}_n\{g\}) - [m \operatorname{rot} \mathfrak{P}_n\{g\}]).$$

Mit Gl. (6, 5), (6, 3) und (4, 10) erhält man (s. vorigen Beweis):

$$\frac{1}{2}(\operatorname{rot} \mathfrak{T}_{n+1}\{g\} + \operatorname{grad} (S_{n+1}\{g\} - S_{n-1}\{\Delta g\}) + [m \mathfrak{T}_n\{\Delta g\}]).$$

Dies ergibt nach Gl. (4, 5), (4, 3) und (6, 4):

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} + \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} - \mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\} - mS_n\{\Delta g\} + \mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\}).$$

Mit Hilfe von Gl. (6, 6) bekommt man

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} + \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} - \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} + \mathfrak{P}_{n+1}\{g\}).$$

Also

$$(m \text{ grad}) \mathfrak{P}_n\{g\} = \mathfrak{P}_{n+1}\{g\}.$$

Ausserdem gelten folgende Identitäten (s. Gl. (2, 5))

$$\operatorname{div} \mathfrak{Q}_n\{g\} = S_n\{\Delta g\} \quad (4, 9)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{P}_n\{g\} = \mathfrak{T}_n\{-\Delta g\}. \quad (4, 10)$$

Beweis der Gl. (4, 9) und (4, 10):

a) Es ist nach Gl. (4, 2)

$$\operatorname{div} \mathfrak{Q}_n\{g\} = \operatorname{div} \operatorname{grad} S_n\{g\} = \Delta S_n\{g\}.$$

Mit Gl. (5, 1b) (wir benutzen hier Gleichungen von Abschnitt 5b), bei deren Ableitung aber Gl. (4, 9) und (4, 10) nicht benutzt worden sind) und

$$\Delta \dots = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \dots + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots$$

erhält man (wobei die Differentiationen jeweils bei konstant gehaltenem z bzw. ρ auszuführen sind)

$$S_n\{g\} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(r).$$

Man sieht hier unmittelbar, dass man die Reihenfolge der Differentionen vertauschen darf, also

$$S_n\{g\} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] g(r)$$

und somit

$$\Delta S_n\{g\} = S_n\{\Delta g\}.$$

b) Für die ϕ -Komponente der Rotation von $\mathfrak{P}_n\{g\}$ (der einzig auftretenden Komponente) erhält man mit Gl. (5, 30) und (5, 32):

$$\operatorname{rot}_\phi \mathfrak{P}_n\{g\} = \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{\partial T_n\{g\}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho T_n\{g\})}{\partial \rho} \right)$$

wobei $T_n\{g\}$ die ϕ -Komponente von $\mathfrak{T}_n\{g\}$ ist. Nach Gl. (5, 29) ist diese gegeben durch:

$$T_n\{g\} = 2\rho S_{n-1}\{\dot{g}\} = 2\rho \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \dot{g}.$$

Somit wird aus der obigen Gleichung:

$$\operatorname{rot}_{\Phi} \mathfrak{P}_n\{g\} = -2 \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\rho \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \dot{g} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \dot{g} \right) \right) \right].$$

Die Reihenfolge der Differentiation ist auch hier wieder vertauschbar, so dass man bekommt:

$$\operatorname{rot}_{\Phi} \mathfrak{P}_n\{g\} = -2 \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{g} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \dot{g}) \right) \right].$$

Nun ist aber (s. Gl. (5, 17))

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{\rho=\text{const.}} g(r^2) = 2z\dot{g}$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_{z=\text{const.}} g(r^2) = 2\rho\dot{g}.$$

Damit erhält man

$$\operatorname{rot}_{\Phi} \mathfrak{P}_n\{g\} = -2\rho \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} (10\ddot{g} + 4x\ddot{g})$$

Dies ist aber nach Gl. (2, 7)

$$= -2\rho \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} (\Delta g) \cdot \quad \left((\dots) \cdot = \frac{\partial}{\partial r^2} (\dots) \right).$$

Es ergibt sich schliesslich mit Hilfe von Gl. (5, 29)

$$\mathfrak{P}_n\{g\} = \mathfrak{I}_n\{-\Delta g\}.$$

Mit Gl. (4.9) und (4.10) bekommt man:

$$\Delta S_n\{g\} = S_n\{\Delta g\} \quad (4, 11)$$

$$\Delta \mathfrak{Q}_n\{g\} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Q}_n\{g\} = \mathfrak{Q}_n\{\Delta g\} \quad (4, 12)$$

$$\Delta \mathfrak{I}_n\{g\} \equiv -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{I}_n\{g\} = \mathfrak{I}_n\{\Delta g\} \quad (4, 13)$$

$$\Delta \mathfrak{P}_n\{g\} \equiv -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{P}_n\{g\} = \mathfrak{P}_n\{\Delta g\}. \quad (4, 14)$$

Es kann also bei allen Multipolfeldern der Δ -Operator auf die Stammfunktion abgewälzt werden.

5. Explizite Darstellung der ersten Multipolfelder. Um einen Überblick zu geben, welche Form die oben definierten Potentiale und Felder haben, sollen die niedrigsten Feldtypen hier explizit angegeben werden.

a) Darstellung in r .

Skalare Potentiale:

$$S_0\{g\} = g(r) \quad (5, 1)$$

$$S_1\{g\} = \frac{(\mathfrak{m}r)}{r} g' \quad (5, 2)$$

$$S_2\{g\} = \frac{g'}{r} + (\mathfrak{m}r)^2 \left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) \quad (5, 3)$$

$$S_3\{g\} = 3(\mathfrak{m}r) \left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) + (\mathfrak{m}r)^3 \left(\frac{g'''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right). \quad (5, 4)$$

Quellfelder:

$$\mathfrak{D}_0\{g\} = \mathfrak{r} \frac{g'}{r} \quad (5, 5)$$

$$\mathfrak{D}_1\{g\} = \mathfrak{m} \frac{g'}{r} + \mathfrak{r}(\mathfrak{m}r) \left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) \quad (5, 6)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_2\{g\} = 2\mathfrak{m}(\mathfrak{m}r) \left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) + \mathfrak{r} \left[\left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) \right. \\ \left. + (\mathfrak{m}r)^2 \left(\frac{g'''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right) \right] \end{aligned} \quad (5, 7)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_3\{g\} = 3\mathfrak{m} \left[\left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) + (\mathfrak{m}r)^2 \left(\frac{g'''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right) \right] \\ + \mathfrak{r} \left[3(\mathfrak{m}r) \left(\frac{g'''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right) \right. \\ \left. + (\mathfrak{m}r)^3 \left(\frac{g''''}{r^4} - \frac{6g'''}{r^5} + \frac{15g''}{r^6} - \frac{15g'}{r^7} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5, 8)$$

Torfelder:

$$\mathfrak{T}_1\{g\} = \frac{g'}{r} [\mathfrak{r}\mathfrak{m}] \quad (5, 9)$$

$$\mathfrak{T}_2\{g\} = (\mathfrak{m}r) \left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) [\mathfrak{r}\mathfrak{m}] \quad (5, 10)$$

$$\mathfrak{T}_3\{g\} = \left[\left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) + (\mathfrak{m}r)^2 \left(\frac{g''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right) \right] [\mathfrak{r}\mathfrak{m}]. \quad (5, 11)$$

Polfelder:

$$\mathfrak{P}_1\{g\} = -m \left(g'' + \frac{g'}{r} \right) + r(mr) \left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) \quad (5, 12)$$

$$\mathfrak{P}_2\{g\} = -m(mr) \frac{g'''}{r} + r \left[\left(\frac{g''}{r^2} - \frac{g'}{r^3} \right) + (mr)^2 \left(\frac{g'''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right) \right] \quad (5, 13)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_3\{g\} = -m \left[\left(\frac{g'''}{r} - \frac{g''}{r^2} + \frac{g'}{r^3} \right) + (mr)^2 \left(\frac{g''''}{r^2} - \frac{2g'''}{r^3} + \frac{3g''}{r^4} - \frac{3g'}{r^5} \right) \right. \\ \left. + r \left[3(mr) \left(\frac{g'''}{r^3} - \frac{3g''}{r^4} + \frac{3g'}{r^5} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (mr)^3 \left(\frac{g''''}{r^4} - \frac{6g'''}{r^5} + \frac{15g''}{r^6} - \frac{15g'}{r^7} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5, 14)$$

b) *Darstellung in r^2 .* Mit Gl. (2, 2) erhält man für das skalare Potential

$$S_n\{g\} = \frac{\partial}{\partial z} S_{n-1}\{g\}, \quad (5, 15)$$

wo $(\partial/\partial z) = (m \text{ grad})$, d.h. ρ konstant zu halten ist. Damit wird

$$S_n\{g\} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} S_0\{g\} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(r). \quad (5, 16)$$

Da für eine Funktion, die nur von $\rho^2 + z^2 = r^2$ abhängt, gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{\rho=\text{const.}} = 2z \frac{d}{dr^2} \quad (5, 17)$$

bekommt man für $S_n\{g\}$ folgende Reihendarstellung:

$$S_n\{g\} = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu} g^{(n-\nu)}. \quad (5, 18)$$

Hierin ist $g^{(n-\nu)}$ die $(n - \nu)$ -te Ableitung nach r^2 ; $g^{(0)} = g$, und $[n/2]$ die grösste ganze Zahl $\leq n/2$.

Für die Koeffizienten ergibt sich folgende Rekursionsformel:

$$a_{n+1-2\nu}^{n+1} = (n - 2\nu + 2)a_{n-2(\nu-1)}^n + 2a_{n-2\nu}^n. \quad (5, 19)$$

Aus der Definition $S_0\{g\} = g(\rho^2 + z^2)$ folgt:

$$a_0^0 = 1.$$

Weiterhin gilt $a_m^n = 0$, wenn $m > n$. Mit Hilfe Gl. (5, 19) kann man so die $a_{n-2\nu}^n$ bestimmen:

$$a_{n-2\nu}^n = 2^{n-2\nu} \frac{n!}{\nu!(n-2\nu)!}. \quad (5, 20)$$

Die ersten skalaren Potentiale haben so folgendes Aussehen:

$$S_0\{g\} = g \quad (5, 21)$$

$$S_1\{g\} = 2z\dot{g} \quad (5, 22)$$

$$S_2\{g\} = 4z^2\ddot{g} + 2\dot{g} \quad (5, 23)$$

$$S_3\{g\} = 8z^3\ddot{\ddot{g}} + 12z\ddot{g} \quad (5, 24)$$

$$S_4\{g\} = 16z^4g^{(4)} + 48z^2\ddot{g} + 12\dot{g} \quad (5, 25)$$

$$S_5\{g\} = 32z^5g^{(5)} + 160z^3g^{(4)} + 120z\ddot{g}. \quad (5, 26)$$

Mit Hilfe dieser Reihendarstellung von S_n lassen sich auch die Vektorfelder $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{P}_n$ darstellen, indem man das in Gl. (2, 9) angegebene schiefwinklige Koordinatensystem r, m benutzt. Es ist nach Gl. (4, 3)

$$\mathfrak{D}_n\{g\} = \text{grad } S_n\{g\} = 2r \frac{\partial S_n}{\partial r^2} \Big|_{z=\text{const.}} + m \frac{\partial S_n}{\partial z} \Big|_{r^2=\text{const.}} \quad (5, 27)$$

$$\begin{aligned} &= 2r \sum_{\nu=0}^{[n/2]} a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu} g^{(n-\nu+1)} + m \sum_{\nu=0}^{[n/2]} a_{n-2\nu}^n (n-2\nu) z^{n-2\nu-1} g^{(n-\nu)} \\ &= 2r S_n\{\dot{g}\} + 2mn S_{n-1}\{g\}. \end{aligned} \quad (5, 28)$$

Für das Torfeld erhält man mit Gl. (4, 4)

$$\mathfrak{T}_{n+1}\{g\} = [\mathfrak{D}_n m] = 2[r m] \sum_{\nu=0}^{[n/2]} a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu} g^{(n-\nu+1)} = 2[r m] S_n\{g\}. \quad (5, 29)$$

Um das Polfeld durch S_n auszudrücken, benutzen wir zunächst die Rotationsbildung in Zylinderkoordinaten.

Es ist nach Gl. (4, 5) die ρ -Komponente von $\mathfrak{P}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{n+1}|_\rho &= \text{rot}_\rho \mathfrak{T}_{n+1} = - \frac{\partial T_{n+1}}{\partial z} \Big|_{\rho=\text{const.}} \\ &= 2\rho \left[\sum_{\nu=0}^{[n/2]} (n-2\nu) a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu-1} g^{(n-\nu+1)} + \sum_{\nu=0}^{[n/2]} 2a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu+1} g^{(n-\nu+2)} \right] \\ &= 2\rho \sum_{\nu'=1}^{[n/2+1]} (n-2\nu'+2) a_{n-2(\nu'-1)}^n z^{n-2\nu'+1} g^{(n-2\nu'+2)} \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{[n/2]} 2a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu+1} g^{(n-\nu+2)}. \end{aligned} \quad (5, 30)$$

Mit der Gl. (5, 19) wird daraus:

$$\mathfrak{P}_{n+1}|_{\rho} = 2\rho \sum_{\nu=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n+1-2\nu}^{n+1} z^{n+1-2\nu} g^{(n-\nu+2)} = 2\rho S_{n+1}\{\dot{g}\}. \quad (5, 31)$$

Für die z -Komponente von $\mathfrak{P}_{n+1}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{n+1}|_z &= \text{rot}_z \mathfrak{T}_{n+1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho T_{n+1})}{\partial \rho} \Big|_{z=\text{const.}} \\ &= -4S_n\{\dot{g}\} - 4\rho^2 S_n\{\ddot{g}\}. \end{aligned} \quad (5, 32)$$

Damit bekommt man für die r -Komponente von $\mathfrak{P}_{n+1}$ nach Gl. (2, 10):

$$\mathfrak{P}_{n+1}|_r = 2r S_{n+1}\{\dot{g}\}, \quad (5, 33)$$

und für die m -Komponente von $\mathfrak{P}_{n+1}$ ergibt sich nach Gl. (2, 11):

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{n+1}|_m &= -4S_n\{\dot{g}\} - 4\rho^2 S_n\{\ddot{g}\} - 2z S_{n+1}\{\dot{g}\} \\ &= -4S_n\{\dot{g}\} - 4r^2 S_n\{\ddot{g}\} + 2z(2z S_n\{\ddot{g}\} - S_{n+1}\{\dot{g}\}). \end{aligned} \quad (5, 34)$$

Nun ist aber nach Gl. (5, 20)

$$2a_{n-2\nu}^n - a_{n+1-2\nu}^{n+1} = -2na_{n-2\nu+1}^{n-1}, \quad (5, 35)$$

und somit wird aus Gl. (5, 34)

$$\mathfrak{P}_{n+1}|_m = -4S_n\{\dot{g}\} - 4r^2 S_n\{\ddot{g}\} - 4nz S_{n-1}\{\ddot{g}\}. \quad (5, 36)$$

Damit erhält man für $\mathfrak{P}_{n+1}$ schliesslich

$$\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} = 2r S_{n+1}\{\dot{g}\} - 4m[S_n\{\dot{g}\} + r^2 S_n\{\ddot{g}\} + n(mr)S_{n-1}\{\ddot{g}\}]. \quad (5, 37)$$

Eine weitere Umformung dieses Ausdrucks gibt Gl. (6, 22).

6. Vektorbeziehungen zwischen $\mathfrak{Q}_n$, $\mathfrak{T}_n$, und $\mathfrak{P}_n$.

a) Multiplikation mit m .

α) Skalare Multiplikation mit m :

Nach Gl. (4, 2) ist

$$(\mathfrak{Q}_n m) = S_{n+1}\{g\} \quad (6, 1)$$

und nach Gl. (4, 4):

$$(\mathfrak{T}_n m) = 0. \quad (6, 2)$$

Nach Gl. (4, 5) erhält man:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}_n m) &= (\text{rot } \mathfrak{T}_n m) = \text{div } [\mathfrak{T}_n m] \\ &= \text{div } [[\mathfrak{Q}_{n-1} m]m] = \text{div } (m S_n - \mathfrak{Q}_{n-1}) \\ &= (m \mathfrak{Q}_n) - \text{div } \mathfrak{Q}_{n-1} \end{aligned}$$

und damit nach Gl. (4, 9):

$$(\mathfrak{P}_n m) = S_{n+1}\{g\} - S_{n-1}\{\Delta g\}. \quad (6, 3)$$

β) Vektorielle Multiplikation mit m :

Nach Gl. (4, 4) ist:

$$[\mathfrak{Q}_n m] = \mathfrak{T}_{n+1}.$$

Hieraus und mit (6, 1)

$$[\mathfrak{T}_n m] = mS_n - \mathfrak{Q}_{n-1}. \quad (6, 4)$$

Nach Gl. (5, 28) und (5, 37) gilt die bemerkenswerte Identität

$$[\mathfrak{Q}_n m] = [\mathfrak{P}_n m]$$

und somit

$$[\mathfrak{P}_n m] = \mathfrak{T}_{n+1}\{g\}. \quad (6, 5)$$

γ) Schliesslich sei noch die Multiplikation von m mit S_n angegeben. Aus Gl. (6, 4) ergibt sich:

$$[\mathfrak{T}_{n+1}\{g\} m] = mS_{n+1}\{g\} - \mathfrak{Q}_n\{g\}.$$

Andererseits folgt aus Gl. (6, 5) und (6, 3)

$$[\mathfrak{T}_{n+1}\{g\} m] = mS_{n+1}\{g\} - mS_{n-1}\{\Delta g\} - \mathfrak{P}_n\{g\}$$

und daraus erhält man

$$mS_n\{\Delta g\} = \mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} - \mathfrak{P}_{n+1}\{g\}. \quad (6, 6)$$

Wenn Δg gegeben ist, so ist g bestimmt nur bis auf Vielfache von $1/r$ und eine Konstante. Die von dem Vielfachen von $1/r$ stammenden Glieder heben sich nach Gl. (3, 9), während die Konstante nichts beiträgt, da schon für $n = 0$ rechts $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{Q}_1$ steht, zu denen Konstante in g nichts beitragen. Eine analoge Situation wird bei vielen folgenden Formeln entstehen. Sie hebt sich immer auf eine ähnliche Weise, ohne dass wir darauf besonders hinweisen.

b) Multiplikation mit r .

α) Aus Gl. (5, 28) und Gl. (6, 6) bekommt man

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_n\{\gamma\} &= 2rS_n\{\dot{\gamma}\} + 2mnS_{n-1}\{\dot{\gamma}\} \\ &= 2rS_n\{\dot{\gamma}\} + 2n(\mathfrak{Q}_n\{g\} - \mathfrak{P}_n\{g\}) \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = 4r^2 \dot{g} + 2g$$

sodass

$$\dot{\gamma} = \Delta g. \quad (\text{vgl. 2, 7})$$

Bei gegebenem $\gamma(r)$ bleibt danach für $g(r)$ ein willkürliches Vielfaches von r^{-1} unbestimmt. Das ist konsistent, da die entsprechenden Pol- und Quellfelder identisch sind (vgl. Abschnitt 3) und ihre Differenz sich in der vorangehenden Gleichung aufhebt. Damit erhält man

$$\mathfrak{r}S_n\{\Delta g\} = \mathfrak{Q}_n\{2r^2\dot{g} - (n-1)g\} + \mathfrak{P}_n\{ng\}. \quad (6, 7)$$

β) Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{r}$:

Es ist

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{g\}) = (\mathfrak{r} \text{ grad } S_n\{g\}) = \text{div } (\mathfrak{r}S_n\{g\}) - 3S_n\{g\}.$$

Mit Gl. (6, 7) wird daraus:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{\Delta g\}) &= \text{div } (\mathfrak{Q}_n\{2r^2\dot{g} + g - ng\} + \mathfrak{P}_n\{ng\}) - 3S_n\{\Delta g\} \\ &= S_n\{\Delta(2r^2\dot{g}) + \Delta g - n\Delta g\} - 3S_n\{\Delta g\} \\ &= S_n\{2r^2(\Delta g)' - n\Delta g\}. \end{aligned}$$

Und mit Umbenennung $\Delta g \rightarrow g$

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{g\}) = S_n\{2r^2\dot{g} - ng\}. \quad (6, 8)$$

Aus Gl. (5, 29) folgt:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{I}_n\{g\}) = 0. \quad (6, 9)$$

Mit Gl. (4, 5) erhält man:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{P}_n\{g\}) = (\mathfrak{r} \text{ rot } \mathfrak{I}_n\{g\}) = \text{div } [\mathfrak{I}_n\{g\}, \mathfrak{r}].$$

Nun ist nach Gl. (4, 4)

$$\begin{aligned} [\mathfrak{I}_n\{g\} \mathfrak{r}] &= \mathfrak{m}(\mathfrak{Q}_{n-1} \mathfrak{r}) - \mathfrak{Q}_{n-1}(\mathfrak{m}\mathfrak{r}) \\ \text{div } [\mathfrak{I}_n \mathfrak{r}] &= (\mathfrak{m} \text{ grad } (\mathfrak{Q}_{n-1} \mathfrak{r})) - (\mathfrak{m}\mathfrak{r}) \text{div } \mathfrak{Q}_{n-1} - (\mathfrak{Q}_{n-1} \mathfrak{m}) \\ &= (\mathfrak{m} \text{ rot } [\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_{n-1}]) - 2S_n\{g\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der gleich zu beweisenden Gleichung (6,11) erhält man daraus:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{P}_n\{g\}) = -(\mathfrak{m}(n-1) \text{ rot } \mathfrak{I}_{n-1}\{g\}) - 2S_n\{g\} - (n-1)(\mathfrak{m}\mathfrak{P}_{n-1}\{g\}) - 2S_n\{g\}$$

und nach Gl. (6, 3) wird daraus schliesslich:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{P}_n\{g\}) = -(1+n)S_n\{g\} + (n-1)S_{n-2}\{\Delta g\}. \quad (6, 10)$$

γ) Vektorielle Multiplikation mit $\mathbf{r}$:

Es ist nach Gl. (5, 28)

$$[\mathbf{r}\mathfrak{D}_n\{g\}] = 2[\mathbf{r}\mathbf{m}]nS_{n-1}\{\dot{g}\}$$

und dann nach Gl. (5, 29)

$$[\mathbf{r}\mathfrak{D}_n\{g\}] = n\mathfrak{T}_n\{g\}. \quad (6, 11)$$

Wir hätten diese Gleichung auch an Stelle von (4, 4) zur Definition von $\mathfrak{T}_n$ benutzen können². Durch Vergleich zwischen Gl. (4, 4) und Gl. (6, 11) folgt die Relation

$$[\mathbf{r}\mathfrak{D}_{n+1}] + (n+1)[\mathbf{m}\mathfrak{D}_n] = 0. \quad (6, 11a)$$

die eine *algebraische Beziehung zwischen Feldern verschiedener Multiplizität* darstellt.

Um das Vektorprodukt $[\mathbf{r}\mathfrak{T}_n]$ zu erhalten, wird zunächst die einfacher zu bestimmende Divergenz dieses Ausdruckes gebildet. Nach Gl. (6, 10) ist

$$\operatorname{div} [\mathbf{r}\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}] = -(\mathbf{r}\mathfrak{P}_n\{\Delta g\}) = (1+n)S_n\{\Delta g\} + (1-n)S_{n-2}\{\Delta\Delta g\}.$$

Daraus ist der Quellen-Anteil von $[\mathbf{r}\mathfrak{T}_n]$ leicht zu erhalten und somit:

$$[\mathbf{r}\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}] = (1+n)\mathfrak{D}_n\{g\} + (1-n)\mathfrak{D}_{n-2}\{\Delta g\} + \mathfrak{P}\text{-Glieder}$$

Um die $\mathfrak{P}$ -Glieder dieses Ausdruckes noch festzulegen, bilden wir zunächst die Rotation von $[\mathbf{r}\mathfrak{T}_n]$, also

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [\mathbf{r}\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}] &= \operatorname{rot} (\mathfrak{D}_{n-1}\{\Delta g\}(\mathbf{m}\mathbf{r}) - \mathbf{m}(\mathfrak{D}_{n-1}\{\Delta g\}, \mathbf{r})) \\ &= -[\mathfrak{D}_{n-1}\{\Delta g\} \mathbf{m}] + [\mathbf{m} \operatorname{grad} (\mathfrak{D}_{n-1}\{\Delta g\}, \mathbf{r})] \\ &= -\mathfrak{T}_n\{g\} + [\mathbf{m}, \mathfrak{D}_{n-1}\{2r^2(\Delta g)^\cdot - (n-1)\Delta g\}] \\ &= \mathfrak{T}_n\{(n-2)\Delta g - 2r^2(\Delta g)^\cdot\} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man nach Gl. (4, 10) den wirbelnden Anteil

$$[\mathbf{r}\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}] = \mathfrak{P}_n\{2r^2\dot{g} - ng\} + \mathfrak{D}\text{-Glieder}.$$

Somit ist also

$$[\mathbf{r}\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}] = (1+n)\mathfrak{D}_n\{g\} + (1-n)\mathfrak{D}_{n-2}\{\Delta g\} + \mathfrak{P}_n\{2r^2\dot{g} - ng\}. \quad (6, 12)$$

Es ist nun noch das Vektorprodukt $[\mathbf{r}\mathfrak{P}_n]$ zu bestimmen. Mit der Beziehung

$$[\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{a}] = \operatorname{rot} [\mathbf{r}\mathbf{a}] + \operatorname{grad} (\mathbf{r}\mathbf{a}) + \mathbf{a} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{a}$$

(wobei $\mathbf{a}$ ein beliebiger Vektor ist) und mit Gl. (4, 5) erhält man

$$[\mathbf{r}\mathfrak{P}_n\{g\}] = [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathfrak{T}_n\{g\}] = \operatorname{rot} [\mathbf{r}\mathfrak{T}_n\{g\}] + \mathfrak{T}_n\{g\}.$$

² Wie dies ELSASSER (*l.c.*¹⁾) getan hat.

Das ergibt nach Gl. (6, 12) unter Benutzung von Gl. (4, 10)

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_n\{g\}] = \mathfrak{T}_n\{(n-1)g - 2r^2\dot{g}\}. \quad (6, 13)$$

c) *Multiplikation mit* $(\mathfrak{r}\mathfrak{m}) = z$.

Es ist nach Gl. (5, 28) und Gl. (4, 2)

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{Q}_n\{\dot{g}\}) = 2(\mathfrak{r}\mathfrak{m})S_n\{\dot{g}\} + 2nS_{n-1}\{\dot{g}\} = S_{n+1}\{g\}$$

und daraus

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{m})S_n\{\dot{g}\} = \frac{1}{2}S_{n+1}\{g\} - nS_{n-1}\{\dot{g}\}. \quad (6, 14)$$

Weiter ergibt sich nach Gl. (6, 1) (6, 11) und (6, 4):

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m}[\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{\dot{g}\}]] &= \mathfrak{r}(\mathfrak{Q}_n\{\dot{g}\}\mathfrak{m}) - \mathfrak{Q}_n\{\dot{g}\}(\mathfrak{m}\mathfrak{r}) \\ &= n[\mathfrak{m}\mathfrak{T}_n\{\dot{g}\}] = n\mathfrak{Q}_{n-1}\{\dot{g}\} - n\mathfrak{m}S_n\{\dot{g}\}. \end{aligned}$$

Aus den beiden rechten Seiten wird mit Hilfe von Gl. (5, 28):

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{Q}_n\{\dot{g}\} = \frac{1}{2}\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} - n\mathfrak{Q}_{n-1}\{\dot{g}\} - \mathfrak{m}S_n\{\dot{g}\}.$$

Wir ersetzen nun g durch $2g + 4r^2\dot{g}$, d.h. $\dot{g}$ durch Δg (Gl. (2, 7)).

Daraus mit Gl. (6, 6)

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{Q}_n\{\Delta g\} = \mathfrak{Q}_{n+1}\{2r^2\dot{g}\} - n\mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\} + \mathfrak{P}_{n+1}\{g\}. \quad (6, 15)$$

Es ist

$$[[\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}\mathfrak{m}]\mathfrak{r}] = \mathfrak{m}(\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}\mathfrak{r}) - (\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}$$

und daraus wird mit Gl. (6, 4) und (6, 9)

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{T}_n\{\Delta g\} = -[(\mathfrak{m}S_n\{\Delta g\} - \mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\})\mathfrak{r}].$$

Mit Hilfe von Gl. (5, 29) und Gl. (6, 11) erhält man schliesslich:

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{T}_n\{\Delta g\} = \mathfrak{T}_{n+1}\{2r^2\dot{g} + g\} - (n-1)\mathfrak{T}_{n-1}\{\Delta g\}. \quad (6, 16)$$

Mit Gl. (6, 5) erhält man

$$[\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}\mathfrak{r}] = [[\mathfrak{P}_{n-1}\{\Delta g\}\mathfrak{m}]\mathfrak{r}] = \mathfrak{m}(\mathfrak{P}_{n-1}\{\Delta g\}\mathfrak{r}) - \mathfrak{P}_{n-1}\{\Delta g\}(\mathfrak{m}\mathfrak{r})$$

und daraus wird mit Gl. (6, 10) und (6, 12) sowie mit $\Delta g = \dot{\gamma}$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{P}_{n-1}\{\Delta g\} &= (1+n)\mathfrak{Q}_n\{\gamma\} + (1-n)\mathfrak{Q}_{n-2}\{\Delta g\} \\ &\quad + \mathfrak{P}_n\{2r^2\dot{g} - n\dot{g}\} + \mathfrak{m}((n-2)S_{n-2}\{\Delta\Delta g\} - nS_{n-1}\{\Delta g\}). \end{aligned}$$

Mit Gl. (6, 6) bekommt man so schliesslich:

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{r})\mathfrak{P}_{n-1}\{\Delta g\} = \mathfrak{Q}_n\{g\} - \mathfrak{Q}_{n-2}\{\Delta g\} + \mathfrak{P}_n\{2r^2\dot{g}\} - (n-2)\mathfrak{P}_{n-2}\{\Delta g\}. \quad (6, 17)$$

d) *Spatprodukte.*

Es ist nach Gl. (4, 4) und (6, 9)

$$(\mathfrak{m}[\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{g\}]) \equiv (\mathfrak{m}, \mathfrak{r}, \mathfrak{Q}_n\{g\}) = 0. \quad (6, 18)$$

Es ist

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}, \mathfrak{T}_n\{\Delta g\}) = (\mathfrak{r}[\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}]\mathfrak{m}).$$

Daraus wird nach Gl. (6, 4)

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{r})S_n\{\Delta g\} - (\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\}).$$

Mit $\Delta g = \dot{\gamma}$ und Gl. (6, 14) sowie (6, 8) bekommt man:

$$\frac{1}{2}S_{n+1}\{\gamma\} - nS_{n-1}\{\Delta g\} - S_{n-1}\{2r^2(\Delta g)\} - (n-1)\Delta g\}.$$

Ersetzt man Δg durch $\dot{g}$, so erhält man schliesslich:

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}, \mathfrak{T}_n\{\dot{g}\}) = \frac{1}{2}S_{n+1}\{g\} - S_{n-1}\{2r^2\ddot{g} + \dot{g}\}. \quad (6, 19)$$

Nach Gl. (6, 5) und (6, 9) ist

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}, \mathfrak{P}_n\{g\}) = 0. \quad (6, 20)$$

e) Produkt von r^2 mit S_n .

Es ist nach Gl. (5, 28)

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{g\}) = 2r^2 S_n\{\dot{g}\} + 2(\mathfrak{m}\mathfrak{r})nS_{n-1}\{\dot{g}\}$$

$$r^2 S_n\{\dot{g}\} = \frac{1}{2}(\mathfrak{r}\mathfrak{Q}_n\{g\}) - (\mathfrak{m}\mathfrak{r})nS_{n-1}\{\dot{g}\},$$

und mit Gl. (6, 8) sowie (6, 14)

$$\frac{1}{2}S_n\{2r^2\dot{g} - ng\} - n(\frac{1}{2}S_n\{g\} - (n-1)S_{n-2}\{\dot{g}\}).$$

Damit

$$r^2 S_n\{\dot{g}\} = S_n\{r^2\dot{g} - ng\} + n(n-1)S_{n-2}\{\dot{g}\}. \quad (6, 21)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung sowie Gl. (6, 14) wird dann aus Gl. (5, 37)

$$\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} = 2\mathfrak{r}S_{n+1}\{\dot{g}\} - 2\mathfrak{m}S_n\{(2-n)\dot{g} + 2r^2\dot{g}\}. \quad (6, 22)$$

f) Tripelprodukte.

Es ist nach Gl. (5, 28):

$$[\mathfrak{Q}_n\{\Delta g\}[\mathfrak{m}\mathfrak{r}]] = 2[\mathfrak{r}[\mathfrak{m}\mathfrak{r}]]S_n\{(\Delta g)\} + 2[\mathfrak{m}[\mathfrak{m}\mathfrak{r}]]nS_{n-1}\{(\Delta g)\} = [\mathfrak{r}\mathfrak{T}_{n+1}\{\Delta g\}] - n[\mathfrak{m}\mathfrak{T}_n\{\Delta g\}]$$

und daraus wird nach Gl. (6, 12), (6, 4) und (6, 6):

$$\begin{aligned} &= -(2+n)\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} + n\mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\} - \mathfrak{P}_{n+1}\{2r^2\dot{g} - (n+1)g\} \\ &\quad + n\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} - n\mathfrak{P}_{n+1}\{g\} - n\mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\}. \end{aligned}$$

Damit

$$[\mathfrak{Q}_n\{\Delta g\}[\mathfrak{mr}]] = \mathfrak{P}_{n+1}\{g - 2r^2 \dot{g}\} - 2\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\}. \quad (6, 23)$$

Weiter ist nach Gl. (5, 29):

$$[\mathfrak{T}_n\{g\}[\mathfrak{mr}]] = 0. \quad (6, 24)$$

Nach Gl. (6, 22) erhält man:

$$[\mathfrak{P}_n\{\Delta g\}[\mathfrak{mr}]] = 2[\mathfrak{r}[\mathfrak{mr}]]S_n\{(\Delta g)'\} - 2[\mathfrak{m}[\mathfrak{mr}]]S_{n-1}\{(3-n)(\Delta g)' + 2r^2(\Delta g)''\}$$

und daraus wird nach Gl. (5, 29)

$$-[\mathfrak{r}\mathfrak{T}_{n+1}\{\Delta g\}] + [\mathfrak{m}\mathfrak{T}_n\{(1-n)\Delta g + 2r^2(\Delta g)'\}]$$

und mit Gl. (6, 12), (6, 4) und (6, 6) bekommt man dann:

$$\begin{aligned} & - (2+n)\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\} + n\mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g\} - \mathfrak{P}_{n+1}\{2r^2 \dot{g} - (n+1)g\} - \mathfrak{Q}_{n+1}\{(1-n)g\} \\ & + \mathfrak{P}_{n+2}\{(1-n)g\} + \mathfrak{Q}_{n-1}\{(1-n)\Delta g\} - \mathfrak{Q}_{n+1}\{\delta\} + \mathfrak{P}_{n+1}\{\delta\} + \mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta\delta\} \end{aligned}$$

mit $\delta = 2r^2 \dot{g} - 2g$, so dass $2r'(\Delta g)' = \Delta\delta$.

Dies ergibt schliesslich

$$[\mathfrak{P}_n\{\Delta g\}[\mathfrak{mr}]] = \mathfrak{Q}_{n+1}\{-g - 2r^2 \dot{g}\} + \mathfrak{Q}_{n-1}\{\Delta g + 2r^2(\Delta g)'\}. \quad (6, 25)$$

Es ist also

$$\text{rot } [\mathfrak{P}_n\{g\}, [\mathfrak{mr}]] = 0. \quad (6, 26)$$

g) Die Tangentengleichung der Linien $S_n = \text{const.}$ und die Gleichung der Feldlinien des $\mathfrak{P}_n$ -Feldes.

α) Der Tangentenvektor $\mathfrak{t}_n\{g\}$ an eine Linie $S_n\{g\} = \text{const.}$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{t}_n = \mathfrak{m} \left. \frac{\partial S_n}{\partial \rho} \right|_{z=\text{const.}} - \bar{\rho} \left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{\rho=\text{const.}}. \quad (6, 27)$$

Mit Gl. (2, 10) und (2, 11) erhält man daraus

$$\mathfrak{t}_n = \mathfrak{m} \left(\left. \frac{\partial S_n}{\partial \rho} \right|_{z=\text{const.}} + \frac{z}{\rho} \left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{\rho=\text{const.}} \right) - \frac{\mathfrak{r}}{\rho} \left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{\rho=\text{const.}} \quad (6, 28)$$

wobei

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial \rho} \right|_{z=\text{const.}} = 2\rho \left. \frac{\partial S_n}{\partial r^2} \right|_{z=\text{const.}}.$$

Damit wird aus Gl. (6, 28)

$$\mathfrak{t}_n\{g\} = \frac{\mathfrak{m}}{\rho} (2\rho^2 S_n\{\dot{g}\} + z S_{n+1}\{g\}) - \frac{\mathfrak{r}}{\rho} S_{n+1}\{g\} \quad (6, 29)$$

und mit Hilfe von Gl. (6, 21):

$$= \frac{1}{\rho} \left(m(2S_n\{r^2 \dot{g} - ng\} + 2n(n-1)S_{n-2}\{\dot{g}\} - z(2zS_n\{\dot{g}\} - S_{n+1}\{g\})) - rS_{n+1}\{g\} \right).$$

Mit Gl. (5, 35) und (6, 14) erhält man schliesslich

$$t_n\{g\}_\rho = S_n\{2r^2 \dot{g} - ng\}_m - S_{n+1}\{g\}_r. \quad (6, 30)$$

Es sei g durch Δg ersetzt, dann wird aus dieser Gleichung mit Hilfe von Gl. (6, 6) und (6, 7):

$$t_n\{\Delta g\}_\rho = \mathfrak{Q}_{n+1}\{\delta - ng\} - \mathfrak{P}_{n+1}\{\delta - ng\} - \mathfrak{Q}_{n+1}\{2r^2 \dot{g} - ng\} - \mathfrak{P}_{n+1}\{(n+1)g\}$$

wobei $2r^2(\Delta g)' = \Delta\delta$ d.h. $\delta = 2r^2 \dot{g} - 2g$ ist.

Damit

$$t_n\{\Delta g\}_\rho = \mathfrak{Q}_{n+1}\{-2g\} + \mathfrak{P}_{n+1}\{-2r^2 \dot{g} + g\}. \quad (6, 31)$$

Der Tangentenvektor $t_n\{\Delta g\}$ der Äquipotentialfläche von $S_n\{\Delta g\}$ steht stets senkrecht auf $\mathfrak{Q}_n\{\Delta g\}$, d.h. es gilt:

$$(\mathfrak{Q}_n\{\Delta g\}, \mathfrak{P}_{n+1}\{g - 2r^2 \dot{g}\} - 2\mathfrak{Q}_{n+1}\{g\}) = 0. \quad (6, 32)$$

β) Da $\mathfrak{P}_n$ ein rotationssymmetrisches, divergenzfreies Feld ist, dessen Feldlinien ganz in einer Meridianebene verlaufen, ist die *Gleichung einer Feldlinie* $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}_n$ dadurch gegeben, dass der Fluss von $\mathfrak{P}_n$ durch jede Kreisfläche $F(\mathfrak{L}, z)$, die durch die Rotation derselben Feldlinie aus jeder Äquatorparallelen Ebene herausgeschnitten wird, unabhängig vom Äquatorabstand z dieser Ebene ist. Also

$$\int_{F(\mathfrak{L}, z)} (\mathfrak{P}_n df) = 2\pi C_{\mathfrak{L}}, \quad (6, 33)$$

wobei

$$df = mdf$$

(df ein Flächenelement von F) und $C_{\mathfrak{L}}$ eine für eine feste Feldlinie von z und ρ unabhängige Zahl ist.

Gl. (6, 33) lässt sich mit Hilfe des Stokes' schen Satzes in ein Integral über den Rand (F) von F umformen

$$\int_F (\mathfrak{P}_n\{g\} df) = \int_F (\text{rot } \mathfrak{T}_n\{g\} df) = \int_{(F)} (\mathfrak{T}_n\{g\}, [\text{mr}]) d\phi = 2\pi C_{\mathfrak{L}}. \quad (6, 34)$$

Da der Integrand unabhängig von ϕ ist, folgt

$$(\mathfrak{T}_n\{g\}, [\text{mr}]) = C_{\mathfrak{L}}. \quad (6, 35)$$

Wenn man nun g in $\dot{g}$ umbenennt, ist die Gleichung der Feldlinien von $\mathfrak{P}_n\{\dot{g}\}$ nach Gl. (6, 19) gegeben durch:

$$\frac{1}{2}S_{n+1}\{g\} - S_{n-1}\{2r^2\ddot{g} + \dot{g}\} = C_{\mathfrak{g}}. \quad (6, 36)$$

Eine zu Gl. (6, 32) analoge Beziehung erhält man daraus, dass

$$(\mathfrak{P}_n, \text{grad } C_{\mathfrak{g}}) \equiv 0,$$

oder explizit

$$(\mathfrak{P}_n\{\dot{g}\}, \mathfrak{D}_{n+1}\{g\} - 2\mathfrak{D}_{n-1}\{2r^2\ddot{g} + \dot{g}\}) = 0. \quad (6, 37)$$

7. Multiplikation zweier S-Funktionen. Das Produkt zweier S -Funktionen lässt sich als eine Summe von S -Funktionen darstellen. Wir behaupten:

Es ist

$$S_m\{g\}S_n\{h\} = \sum_{\mu=0}^{\lfloor (n+m)/2 \rfloor} S_{m+n-2\mu}\{\gamma_{2\mu}^{m,n}\} \quad (7, 1)$$

mit

$$\begin{aligned} \binom{m+n}{n} \gamma_{2\mu}^{(m+n-\mu)} &= \frac{(m+n)!}{(m+n-2\mu)!\mu!} \\ &\cdot \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \binom{m+n-2\mu}{n-\lambda} \binom{2\mu}{\lambda} (-1)^\lambda g^{(m-\mu+\lambda)} h^{(n+\mu-\lambda)}, \end{aligned} \quad (7, 2)$$

wobei $\gamma_{2\mu}^{(\lambda)}$ die λ -te Ableitung [von $\gamma_{2\mu}$ nach r^2 ist. Den Beweis holen wir sofort nach und betrachten zunächst den Spezialfall $m = 0$:

$$S_0\{g\}S_n\{h\} = \sum_{\mu=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} S_{n-2\mu}\{\gamma_{2\mu}^n\}, \quad (7, 3)$$

wobei

$$\gamma_{2\mu}^{(n-\mu)} = \frac{n!}{(n-2\mu)!\mu!} g^{(\mu)} h^{(n-\mu)}. \quad (7, 4)$$

Denn in (7, 2) verschwinden alle Glieder der Summe bei $m = 0$ für $\lambda < 2\mu$, da $\binom{n-2\mu}{n-\lambda} = 0$ ist für $n-2\mu < n-\lambda$, also für $\lambda < 2\mu$.

Beweis von Gl. (7, 4). Das Produkt $S_0(g)S_n(h)$ ist als Summe von S -Funktionen darstellbar

$$S_0(g)S_n(h) = \sum_{\lambda=-\infty}^n S_{n-\lambda}\{\gamma_\lambda\}.$$

Die Potenzreihenentwicklung nach z (5, 18) zeigt, dass λ nicht negativ sein kann, da keine höheren Potenzen als z^n auftreten. Ferner kommen nur gerade bzw. ungerade Potenzen von

z vor, wenn n gerade bzw. ungerade ist, so dass die Form (7, 3) resultiert. Wendet man auf beide Seiten wieder (5, 18) an, so folgt

$$S_0\{g\}S_n\{h\} = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} a_{n-2\nu}^n z^{n-2\nu} h^{(n-\nu)} g = \sum_{\mu=0}^{[n/2]} \sum_{\kappa=0}^{[(n/2)-\mu]} a_{n-2\mu-2\kappa}^{n-2\mu} z^{n-2\mu-2\kappa} \gamma_{2\mu}^{(n-2\mu-\kappa)}. \quad (7, 5)$$

Hieraus erhält man durch Koeffizientenvergleich von $z^{n-2\nu}$ für

$$a_n^n g h^{(n)} = a_n^n \gamma_0^{(n)},$$

also

$$\gamma_0^{(n)} = g h^{(n)}.$$

Für $\nu = 1$ erhält man nach einmaliger Differentiation nach r^2 :

$$a_{n-2}^n \left(\binom{1}{0} g h^{(n)} + \binom{1}{1} \dot{g} h^{(n-1)} \right) = a_{n-2}^n \gamma_0^{(n)} + a_{n-2}^{n-2} \gamma_2^{(n-1)},$$

also

$$\gamma_2^{(n-1)} = \frac{a_{n-2}^n}{a_{n-2}^{n-2}} \binom{1}{1} \dot{g} h^{(n-1)} = \frac{n!}{1!(n-2)!} \dot{g} h^{(n-1)},$$

und für $\nu = \lambda$ nach λ -maliger Differentiation nach r^2 :

$$\begin{aligned} a_{n-2}^n \left(\binom{\lambda}{0} g h^{(n)} + \binom{\lambda}{1} \dot{g} h^{(n-1)} + \dots + \binom{\lambda}{k} g^{(k)} h^{(n-k)} + \dots + \binom{\lambda}{\lambda} g^{(\lambda)} h^{(n-\lambda)} \right) \\ = a_{n-2}^n \lambda \gamma_0^{(n)} + a_{n-2}^{n-2} \gamma_2^{(n-1)} + \dots + a_{n-2}^{n-2k} \gamma_{2k}^{(n-k)} + \dots + a_{n-2}^{n-2\lambda} \gamma_{2\lambda}^{(n-\lambda)}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\gamma_{2\lambda}^{(n-\lambda)} = \frac{a_{n-2}^n}{a_{n-2}^{n-2\lambda}} \binom{\lambda}{\lambda} g^{(\lambda)} h^{(n-\lambda)} = \frac{n!}{(n-2\lambda)! \lambda!} g^{(\lambda)} h^{(n-\lambda)}.$$

Der Beweis der Gleichung (7, 2) erfolgt durch vollständige Induktion von m auf $m+1$. Dass die Gleichung für $m=0$ gilt, ist oben gezeigt worden. Es ist nun (vgl. (2, 2))

$$S_{m+1}\{g\}S_n\{h\} = \frac{\partial}{\partial z} (S_m\{g\}S_n\{h\}) - S_m\{g\}S_{n+1}\{h\}. \quad (7, 6)$$

Wir nehmen nun an, dass (7, 1) und (7, 2) für $S_m \cdot S_n$ und $S_m \cdot S_{n+1}$ bewiesen sei, setzen dies ein und führen die Differentiation nach z durch:

$$S_{m+1}\{g\}S_n\{h\} = \sum_{\mu=0}^{[(n+m)/2]} S_{m+n+1-2\mu}\{\gamma_{m,n}\} - \sum_{\mu=0}^{[(n+m+1)/2]} S_{n+m+1-2\mu}\{\gamma_{m,n+1}\}.$$

Wir benutzen auf beiden Seiten wieder die Entwicklung gemäss Gl. (5, 18) und (5, 20):

$$\sum_{\mu=0}^{[(m+n+1)/2]} \sum_{\nu=0}^{[(m+n+1)/2]-\mu} \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n+m+1-2\mu-2\nu)! \nu!} (2z)^{n+m+1-2\mu-2\nu} \gamma_{2\mu}^{(m+n+1-2\mu-\nu)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{[(m+n)/2]} \sum_{\nu=0}^{[(m+n+1)/2]-\mu} \frac{(m+n+1-2\mu)!}{(m+n+1-2\mu-2\nu)! \nu!} (2z)^{n+m+1-2\mu-2\nu} \gamma_{m,n}^{(m+n+1-2\mu-\nu)} \\ - \sum_{\mu=0}^{[(m+n+1)/2]} \sum_{\nu=0}^{[(m+n+1)/2]-\mu} \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n+m+1-2\mu-2\nu)! \nu!} (2z)^{n+m+1-2\mu-2\nu} \gamma_{m,n+1}^{(m+n+1-2\mu-\nu)}.$$

Es sei jetzt der Koeffizient einer festen Potenz von z betrachtet und zwar sei $\mu + \nu = k$. Dann ergibt sich nach k -maliger Differentiation nach r^2 :

$$\sum_{\mu=0}^k \frac{(m+n+1-2\mu)!}{(n+m+1-2k)! (k-\mu)!} \gamma_{m,n}^{(m+n+1-\mu)} \\ = \sum_{\mu=0}^k \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n+m+1-2k)! (k-\mu)!} (\gamma_{m,n}^{(m+n+1-\mu)} - \gamma_{m,n+1}^{(m+n+1-\mu)}). \quad (7, 7)$$

Auf der rechten Seite ist nach Gl. (7, 2):

$$\gamma_{m,n}^{(m+n-\mu+1)} - \gamma_{m,n+1}^{(m+n+1-\mu)} \\ = \frac{1}{\binom{m+n}{n}} \frac{(n+m)!}{(n+m-2\mu)! \mu!} \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \binom{n+m-2\mu}{n-\lambda} \binom{2\mu}{\lambda} (-1)^\lambda \\ \cdot (g^{(m+1-\mu+\lambda)} h^{(n+\mu-\lambda)} + g^{(m-\mu+\lambda)} h^{(n+1+\mu-\lambda)}) - \frac{1}{\binom{m+n+1}{n+1}} \frac{(n+m+1)!}{(n+m+1-2\mu)! \mu!} \\ \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \binom{n+m+1-2\mu}{n+1-\lambda} \binom{2\mu}{\lambda} (-1)^\lambda g^{(m-\mu+\lambda)} h^{(n+1+\mu-\lambda)} \\ = \frac{n! m!}{(n+m+1-2\mu)! \mu!} \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \left\{ \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n-\lambda)! (m-2\mu+\lambda+1)! \lambda! (2\mu-\lambda)!} (-1)^\lambda (m-2\mu+\lambda+1) \right. \\ \left. - \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n-\lambda)! (m+1-2\mu+\lambda)! (\lambda+1)! (2\mu-\lambda-1)!} (-1)^\lambda (n-\lambda) \right. \\ \left. + (n+1) \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n-\lambda)! (m-2\mu+\lambda+1)! (\lambda+1)! (2\mu-\lambda-1)!} (-1)^\lambda \right\} g^{(m+1-\mu+\lambda)} h^{(n+\mu-\lambda)} \\ = \frac{n! m! (2\mu)!}{\mu!} \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \frac{(-1)^\lambda}{(n-\lambda)! (m+1-2\mu+\lambda)! (\lambda+1)! (2\mu-\lambda)!} \\ \cdot \{ (\lambda+1)(m-2\mu+\lambda+1) - (2\mu-\lambda)(n-\lambda) + (n+1)(2\mu-\lambda) \} g^{(m+1-\mu+\lambda)} h^{(n+\mu-\lambda)} \\ = \frac{n! (m+1)!}{(n+m+1)! (n+m+1-2\mu)! \mu!} \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \frac{(n+m+1-2\mu)!}{(n-\lambda)! (m+1-2\mu+\lambda)! \lambda! (2\mu-\lambda)!} \\ \cdot (-1)^\lambda g^{(m+1-\mu+\lambda)} h^{(n+\mu-\lambda)}.$$

Dieser Ausdruck ist in der Tat $\gamma_{m+1,n}^{(m+n+1-\mu)}$, was nach Gl. (7, 7) zu beweisen war.

8. Produkte von S_n , $\mathfrak{Q}_n$, $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{P}_n$. Mit dem im Abschnitt 7 angegebenen Produkt zweier S -Funktionen lassen sich nun auch alle anderen auftretenden skalaren sowie vektoriellen Produkte zwischen S_n , $\mathfrak{Q}_n$, $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{P}_n$ angeben. Um die Abhängigkeit der $\gamma_{m,n,2\mu}$, die in Gl. (7, 2) definiert sind, von den beiden Stammfunktionen g und h explizit anzugeben, schreiben wir in den folgenden Produkten abkürzend $\gamma_{m,n,2\mu}\{g; h\}$, wenn die $(m+n-\mu)$ -te Ableitung von $\gamma_{m,n,2\mu}$ gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \gamma_{m,n,2\mu}^{(m+n-\mu)}\{g; h\} &= \frac{1}{\binom{m+n}{n}} \frac{(m+n)!}{(m+n-2\mu)! \mu!} \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \binom{m+n-2\mu}{n-\lambda} (-1)^\lambda g^{(m-\mu+\lambda)} h^{(n+\mu-\lambda)}. \end{aligned} \quad (8, 1)$$

Auf die Ableitungen und die Beweise der im folgenden angegebenen Produktformeln soll hier verzichtet werden. Sie sind auf einfache Weise mit Hilfe der Gl. (7, 1) und der Vektorbeziehungen von Abschnitt 6 zu erhalten. Die in den Formeln auftretenden Summen beginnen stets mit $\mu = 0$ und sind abbrechen, sobald die Ordnung eines Feldes negativ wird ($\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{P}_0$ sind identisch Null zu setzen).

a) *Multiplikation mit S_n .*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_m\{g\}S_n\{h\} &= 2 \sum_{\mu} \mathfrak{Q}_{m+n-2\mu}\{2r^2 \dot{\xi}_{m,n,2\mu} - (m+n-1-2\mu)\xi_{m,n,2\mu} + m\epsilon_{m-1,n,2\mu}\} \\ &\quad + 2 \sum_{\mu} \mathfrak{P}_{m+n-2\mu}\{(m+n-2\mu)\xi_{m,n,2\mu} - m\epsilon_{m-1,n,2\mu}\}, \end{aligned} \quad (8, 2)$$

$$\text{wobei} \quad \Delta \xi_{m,n,2\mu} = \gamma_{m,n,2\mu}\{\dot{g}; h\}; \quad \Delta \epsilon_{m-1,n,2\mu} = \gamma_{m-1,n,2\mu}\{\dot{g}; h\}.$$

$$\mathfrak{T}_m\{g\}S_n\{h\} = \sum_{\mu} \mathfrak{T}_{m+n-2\mu}\{\xi_{m-1,n,2\mu}\}, \quad (8, 3)$$

$$\text{wobei} \quad \dot{\xi}_{m-1,n,2\mu} = \gamma_{m-1,n,2\mu}\{\dot{g}; h\}.$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_m\{g\}S_n\{h\} &= 2 \sum_{\mu} \mathfrak{Q}_{m+n-2\mu}\{2r^2 \dot{\xi}_{m,n,2\mu} - (m+n-1-2\mu)\xi_{m,n,2\mu} - \epsilon_{m-1,n,2\mu}\} \\ &\quad + 2 \sum_{\mu} \mathfrak{P}_{m+n-2\mu}\{(m+n-2\mu)\xi_{m,n,2\mu} + \epsilon_{m-1,n,2\mu}\}, \end{aligned} \quad (8, 4)$$

$$\text{wobei} \quad \Delta \xi_{m,n,2\mu} = \gamma_{m,n,2\mu}\{\dot{g}; h\}; \quad \Delta \epsilon_{m-1,n,2\mu} = \gamma_{m-1,n,2\mu}\{(3-m)\dot{g} + 2r^2 \ddot{g}; h\}.$$

b) *Skalare Produkte.*

$$(\mathfrak{D}_m\{g\}\mathfrak{D}_n\{h\}) = 2 \sum_{\mu} S_{m+n-2\mu} \{ \zeta_{2\mu}^{m,n} - \epsilon_{2\mu}^{m-1,n+1} \}, \quad (8, 5)$$

$$\text{wobei} \quad \zeta_{2\mu}^{m,n} = \gamma_{2\mu}^{m,n} \{ \dot{g}; 2r^2 \dot{h} - nh \}; \quad \epsilon_{2\mu}^{m-1,n+1} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n+1} \{ m\dot{g}; h \}.$$

$$(\mathfrak{D}_m\{g\}\mathfrak{T}_n\{h\}) = 0. \quad (8, 6)$$

$$(\mathfrak{P}_m\{g\}\mathfrak{D}_n\{h\}) = 2 \sum_{\mu} S_{m+n-2\mu} \{ 2\zeta_{2\mu}^{m,n} - \epsilon_{2\mu}^{m-1,n+1} \} \quad (8, 7)$$

$$\text{wobei} \quad \zeta_{2\mu}^{m,n} = \gamma_{2\mu}^{m,n} \left\{ \dot{g}; r^2 \dot{h} - \frac{n}{2} h \right\}; \quad \epsilon_{2\mu}^{m-1,n+1} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n+1} \{ (3-m)\dot{g} + 2r^2\dot{g}; h \}.$$

$$(\mathfrak{T}_m\{g\}\mathfrak{T}_n\{h\}) = \sum_{\mu} S_{m+n-2\mu} \{ \zeta_{2\mu}^{m-1,n+1} \} + \sum_{\mu} S_{m+n-2-2\mu} \{ \epsilon_{2\mu}^{m+1,n-1} \}, \quad (8, 8)$$

wobei

$$\zeta_{2\mu}^{m-1,n+1} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n+1} \{ \dot{g}; h \}; \quad \epsilon_{2\mu}^{m-1,n-1} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n-1} \left\{ \dot{g}; r^2 \dot{h} + \frac{n+1}{2} h \right\}.$$

$$(\mathfrak{P}_m\{g\}\mathfrak{T}_n\{h\}) = 0. \quad (8, 9)$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}_m\{g\}\mathfrak{P}_n\{h\}) &= 4 \sum_{\mu} S_{m+n-2\mu} \{ \zeta_{2\mu}^{m,n} + \epsilon_{2\mu}^{m-1,n+1} \} \\ &\quad + 4 \sum_{\mu} S_{m+n-2-2\mu} \{ \eta_{2\mu}^{m,n-2} + \theta_{2\mu}^{m-1,n-1} \}, \end{aligned} \quad (8, 10)$$

wobei

$$\zeta_{2\mu}^{m,n} = \gamma_{2\mu}^{m,n} \{ \dot{g}; -\frac{1}{2}(1+n)h \}; \quad \epsilon_{2\mu}^{m-1,n+1} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n+1} \left\{ (3-m)\dot{g} + 2r^2\dot{g}; -\frac{h}{2} \right\};$$

$$\eta_{2\mu}^{m,n-2} = \gamma_{2\mu}^{m,n-2} \{ \dot{g}; (n-1)(3\dot{h} + 2r^2\dot{h}) \}$$

$$\theta_{2\mu}^{m-1,n-1} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n-1} \{ (3-m)\dot{g} + 2r^2\dot{g}; 3\dot{h} + 2r^2\dot{h} \}.$$

c) *Vektorielle Produkte.*

$$[\mathfrak{D}_m\{g\}\mathfrak{D}_n\{h\}] = 2 \sum_{\mu} \mathfrak{T}_{m+n-2\mu} \{ \eta_{2\mu}^{m,n-1} - \theta_{2\mu}^{m-1,n} \}, \quad (8, 11)$$

$$\text{wobei} \quad \eta_{2\mu}^{m,n-1} = \gamma_{2\mu}^{m,n-1} \{ \dot{g}; n\dot{h} \}; \quad \theta_{2\mu}^{m-1,n} = \gamma_{2\mu}^{m-1,n} \{ m\dot{g}; \dot{h} \}.$$

$$[\mathfrak{D}_m\{g\}\mathfrak{T}_n\{h\}] = 2\sum_{\mu} [(1+m+n-2\mu)\mathfrak{D}_{m+n-2\mu}\{\zeta_{m,n-1}\}_{2\mu} \\ + (1-m-n+2\mu)\mathfrak{D}_{m+n-2-2\mu}\{\Delta\zeta_{m,n-1}\}_{2\mu}] \quad (8, 12)$$

$$+ \mathfrak{P}_{m+n-2\mu}\{2r^2\zeta_{m,n-1} - (m+n-2\mu)\zeta_{m,n-1}\}_{2\mu} \\ + 2\sum_{\mu} [\mathfrak{D}_{m+n-2\mu}\{\epsilon_{m-1,n-1}\}_{2\mu} + \mathfrak{P}_{m+n-2\mu}\{\epsilon_{m-1,n-1}\}_{2\mu} + \mathfrak{D}_{m+n-2-2\mu}\{\Delta\epsilon_{m-1,n-1}\}_{2\mu}],$$

$$\text{wobei } (\Delta\zeta_{m,n-1})^\cdot = \gamma_{m,n-1}\{\dot{g}; \dot{h}\}; \quad (\Delta\epsilon_{m-1,n-1})^\cdot = \gamma_{m-1,n-1}\{m\dot{g}; \dot{h}\}.$$

$$[\mathfrak{P}_m\{g\}\mathfrak{D}_n\{h\}] = 2\sum_{\mu} \mathfrak{T}_{m+n-2\mu}\{\eta_{m,n-1} + \theta_{m-1,n}\}_{2\mu}, \quad (8, 13)$$

$$\text{wobei } \eta_{m,n-1} = \gamma_{m,n-1}\{\dot{g}; n\dot{h}\}; \quad \theta_{m-1,n} = \gamma_{m-1,n}\{(3-m)\dot{g} + 2r^2\ddot{g}; \dot{h}\}.$$

$$[\mathfrak{T}_m\{g\}\mathfrak{T}_n\{h\}] = 0. \quad (8, 14)$$

$$[\mathfrak{P}_m\{g\}\mathfrak{T}_n\{h\}] = 2\sum_{\mu} [(1+m+n-2\mu)\mathfrak{D}_{m+n-2\mu}\{\zeta_{m,n-1}\}_{2\mu} \\ + (1-m-n+2\mu)\mathfrak{D}_{m+n-2-2\mu}\{\Delta\zeta_{m,n-1}\}_{2\mu} \\ + \mathfrak{P}_{m+n-2\mu}\{2r^2\zeta_{m,n-1} - (m+n-2\mu)\zeta_{m,n-1}\}_{2\mu}] \quad (8, 15)$$

$$- 2\sum_{\mu} [\mathfrak{P}_{m+n-2\mu}\{\epsilon_{m-1,n-1}\}_{2\mu} - \mathfrak{D}_{m+n-2\mu}\{\epsilon_{m-1,n-1}\}_{2\mu} + \mathfrak{D}_{m+n-2-2\mu}\{\epsilon_{m-1,n-1}\}_{2\mu}],$$

$$\text{wobei } (\Delta\zeta_{m,n-1})^\cdot = \gamma_{m,n-1}\{\dot{g}; \dot{h}\}; \quad (\Delta\epsilon_{m-1,n-1})^\cdot = \gamma_{m-1,n-1}\{(3-m)\dot{g} + 2r^2\ddot{g}; \dot{h}\}.$$

$$[\mathfrak{P}_m\{g\}\mathfrak{P}_n\{h\}] = 2\sum_{\mu} \mathfrak{T}_{m+n-2\mu}\{\theta_{m-1,n} - \eta_{m,n-1}\}_{2\mu}, \quad (8, 16)$$

wobei

$$\eta_{m,n-1} = \gamma_{m,n-1}\{\dot{g}; (3-n)\dot{h} + 2r^2\ddot{h}\}; \quad \theta_{m-1,n} = \gamma_{m-1,n}\{(3-m)\dot{g} + 2r^2\ddot{g}; \dot{h}\}.$$

9. Eindeutigkeit und Entwickelbarkeit. a) Im vorigen Abschnitt war gezeigt worden, dass das Produkt zweier S -Funktionen sich als Summe von S -Funktionen darstellen lässt. Nach Gl. (7, 2) sind aber von den $\gamma_{m,n}$ jeweils nur die $(m+n-\mu)$ -te Ableitung bestimmt. Die $\gamma_{m,n}$ kann man durch $(m+n-\mu)$ Integrationen gewinnen, wobei entsprechende Integrationskonstanten auftreten. Nicht alle Integrationskonstanten sind hierbei wesentlich, da nach Gl. (5, 18) die niedrigst auftretende Ableitung bei $S_{m+n-2\mu}$ die $[(m+n-2\mu)/2]$ -te Ableitung ist. Somit sind für jedes $\gamma_{m,n}$ ($\mu = 0, 1 \dots [(m+n)/2]$) nur $[(m+n)/2]$

Integrationen von Interesse. Das ergibt insgesamt $[(m+n)/2][(m+n)/2+1]$ Integrationskonstanten. Diese Anzahl lässt sich aber noch weiter einschränken. Denn für $S_m\{r^{2k}\}$ muss gefordert werden, damit es nicht als Summe von S -Funktionen dargestellt werden kann, dass $k \geq m$ ist. Dies ergibt sich aus Gl. (5, 18), da mit $k < m$ der Koeffizient von z^m verschwindet. Mit dieser "Eindeutigkeitsforderung" reduziert sich die Zahl der wirklich wesentlichen Integrationskonstanten auf $\frac{1}{2}[(m+n)/2][(m+n)/2+1]$, d.h. auf die Hälfte der oben angegebenen Zahl.

Wir können also schreiben:

$$\gamma_{m,n}^{2\mu} = \int_{r_0^2}^{r^2} \cdots \int_{r_0^2}^{r^2} f\{g, h\} (dr^2)^{m+n-\mu} + \sum_{\kappa=1}^{\mu} C_{\kappa}^{2\mu} \frac{(r^2 - r_0^2)^{m+n-\mu-\kappa}}{(m+n-\mu-\kappa)!} \quad (9, 1)$$

wobei

$$f\{g, h\} = \gamma_{m,n}^{(m+n-\mu)}_{2\mu} \quad (9, 2)$$

und $C_{\kappa}^{2\mu}$ die zu bestimmenden Integrationskonstanten seien. Der Wert der $C_{\kappa}^{2\mu}$ hängt von der Wahl der unteren Grenzen der Integrale (r_0^2) ab. Ist insbesondere die Stelle r_0^2 so gewählt, dass dort g und h verschwinden samt ihren Ableitungen, (wie es oft für $r_0 \rightarrow \infty$ der Fall sein wird), so sind auch alle $C_{\kappa}^{2\mu}$ gleich Null, wie man durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von z mit Gl. (7, 1) feststellen kann.

Dies sei an einem einfachen Beispiel gezeigt. Es sei zu bilden $S_3\{x^4\} \cdot S_2\{x^2\}$, wobei $x = r^2$ sei. Nach Gl. (5, 24) und (5, 23) ist

$$S_3\{x^4\} = 8x^3 \cdot 24x + 12 \cdot 12x \cdot x^2$$

$$S_2\{x^2\} = 4 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 2x.$$

Das ergibt

$$S_3\{x^4\} S_2\{x^2\} = 64 \cdot 24x^5 + 1920x^3 x^2 + 576x^2 x^3.$$

Nach Gl. (7, 1) ist

$$S_3\{x^4\} S_2\{x^2\} = S_5\{\gamma_{3,2}^{(5)}\} + S_3\{\gamma_{3,2}^{(4)}\} + S_1\{\gamma_{3,2}^{(3)}\}$$

und nach Gl. (7, 2)

$$\gamma_{3,2}^{(5)} = 24 \cdot 2x; \quad \gamma_{3,2}^{(4)} = -480x; \quad \gamma_{3,2}^{(3)} = 36 \cdot 48x;$$

Nach Gl. (9, 1), wobei $r_0^2 = 0$ gewählt ist, erhält man:

$$\gamma_{3,2} = 24 \cdot 2 \frac{x^6}{6!}; \quad \gamma_{3,2} = -480 \frac{x^5}{5!} + \frac{C_1^2}{3!} x^3;$$

$$\gamma_{3,2} = 36 \cdot 48 \frac{x^4}{4!} + \frac{C_1^4}{2!} x^2 + \frac{C_2^4}{1!} x$$

und damit

$$S_0\{\gamma_{3,2}\} = 32z^5 \cdot 48x + 160z^3 \cdot 24x^2 + 120z \cdot 8x^3$$

$$S_2\{\gamma_{3,2}\} = -8 \cdot z^3 [204x^2 - C_1^2] - 12z [80 \cdot x^3 - C_1^2 \cdot x]$$

$$S_4\{\gamma_{3,2}\} = 2z [6 \cdot 48 \cdot x^3 + C_1^4 \cdot x + C_2^4].$$

Man sieht daraus durch Vergleich der Koeffizienten von z^3 , dass $C_1^2 = 0$ sein muss. Daraus folgt für die Koeffizienten von z , dass auch $C_1^4 = 0$ sein muss und entsprechend $C_2^4 = 0$.

b) Es soll nun noch gezeigt werden, wie eine beliebige Funktion $f(r, z)$ in eine Reihe von S -Funktionen entwickelt werden kann. Es wird dazu vorausgesetzt, dass die Funktion nach Legendreschen Kugelfunktionen $P_n(\cos \theta)$ (s. Gl. (3, 14)) zu entwickeln sei. Es sei also

$$f(z, r) = f^*(\cos \theta, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(r) \cdot P_{\nu}(\cos \theta) \quad (9, 3)$$

wobei

$$f_{\nu}(r) = \frac{2\nu + 1}{2} \int_0^{\pi} f^*(\cos \theta, r) \cdot P_{\nu}(\cos \theta) \sin \theta \cdot d\theta. \quad (9, 4)$$

Aus Gl. (9, 3) wird nun mit Gl. (3, 15):

$$f(z, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(r) \frac{1}{\nu!(-1)^{\nu+1}} r^{\nu+1} S_{\nu} \left\{ -\frac{1}{r} \right\} \quad (9, 5)$$

und mit der Definition von g_{ν} :

$$r^{\nu+1} f_{\nu}(r) \frac{1}{\nu!(-1)^{\nu+1}} \equiv S_0\{g_{\nu}\} \quad (9, 6)$$

wird daraus

$$f(z, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_0\{g_{\nu}\} S_{\nu} \left\{ -\frac{1}{r} \right\}. \quad (9, 7)$$

Das ergibt nach Gl. (7, 3)

$$f(z, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{[\nu/2]} S_{\nu-2\mu}\{\gamma_{\nu}\} \quad (9, 8)$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} S_{\kappa}\{\gamma_{\kappa}\}. \quad (9, 9)$$

Hierin ist nach Gl. (7, 4) (mit $\nu - 2\mu = \kappa$) gesetzt:

$$\gamma_{\kappa} = \sum_{\nu=\kappa, \kappa+2, \dots}^{\infty} \gamma_{\nu} \quad (9, 10)$$

und

$$\gamma_{\nu-\kappa}^{((\nu+\kappa)/2)} = \frac{\nu!}{\nu! \left(\frac{\nu-\kappa}{2}\right)!} g^{((\nu-\kappa)/2)} \left(\frac{1}{r}\right)^{((\nu+\kappa)/2)}. \quad (9, 11)$$

Die $\gamma_\kappa(r^2)$ stellen dann die gesuchten Entwicklungskoeffizienten (analog zu $f_\nu(r)$) dar.

c) Mit Hilfe dieser Entwicklungen ist es auch möglich, ein vorgegebenes zylindersymmetrisches Vektorfeld in seinen quellen- und seinen wirbelfreien Anteil aufzuspalten. Die Komponente des Feldes, die parallel zur Äquatorebene liegt, lässt sich algebraisch ohne weiteres abspalten. Als Torfeld ist diese Komponente quellenfrei. Wir betrachten daher nur noch den Teil $\mathfrak{M}$ des Feldes, der in der Meridianebene liegt. Es sei also

$$\mathfrak{M} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{Q}_\nu\{\alpha_\nu\} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu\{\beta_\nu\} \quad (9, 12)$$

wobei die α_ν und β_ν zu bestimmen sind.

Durch Divergenzbildung erhält man

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = \operatorname{div} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{Q}_\nu\{\alpha_\nu\} = \operatorname{div} \sum_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{grad} S_\nu\{\alpha_\nu\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu\{\Delta\alpha_\nu\}. \quad (9, 13)$$

Nun ist, da $\mathfrak{M}$ vorgegeben ist, auch $\operatorname{div} \mathfrak{M}$ eine bekannte Funktion, die nach Gl. (9, 8) mit $\operatorname{div} \mathfrak{M}$ statt $f(z, r)$ und g_ν statt γ_κ in eine Reihe von S -Funktionen zu entwickeln ist. Also

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu\{g_\nu\}. \quad (9, 14)$$

Aus Gl. (9, 13) und (9, 14) bekommt man die Differentialgleichung.

$$\Delta\alpha_\nu = g_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2 \dots) \quad (9, 15)$$

woraus die α_ν zu bestimmen sind.

In analoger Weise erhält man durch Rotationsbildung von Gl. (9, 12) den quellenfreien Anteil des Feldes. Es ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{M} = \operatorname{rot} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu\{\beta_\nu\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{T}_\nu\{-\Delta\beta_\nu\} = 2[\operatorname{rm}] \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{\nu-1}\{-(\Delta\beta_\nu)'\}. \quad (9, 16)$$

Weiter ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{M} = [\operatorname{rm}]f(r, z) = [\operatorname{rm}] \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu\{h_\nu\}. \quad (9, 17)$$

D.h. man spaltet von $\operatorname{rot} \mathfrak{M}$ die skalare Funktion $f(r, z)$ ab, die man dann nach Gl. (9, 9) entwickelt (mit h_ν statt γ_κ). Man erhält zur Bestimmung der β_ν schliesslich die Differentialgleichung.

$$-2(\Delta\beta_{\nu+1})' = h_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2 \dots). \quad (9, 18)$$

10. Beispiel.³ In einer Arbeit von L. Biermann "Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum"⁴ war in einem Anhang von einem der Verfasser ein vollständig integrierbares Modell für die Entstehung von Magnetfeldern auf Sternen durch nichtstarre Rotation angegeben worden, indem eine ganz spezielle Lösung der zu behandelnden Plasma-Gleichungen gefunden werden konnte.

Es soll hier an diesem Beispiel gezeigt werden, wie man mit Hilfe der verallgemeinerten Multipolfelder allgemeinere Lösungen des betrachteten Problems angeben kann.

Die zu lösenden Gleichungen sind in etwas vereinfachter Schreibweise ($c/4\pi = m = e = R = \sigma_0 = 1$, die Schwerebeschleunigung g ist weglassen; zur Definition der Bezeichnungen siehe⁴)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) \quad (10, 1)$$

$$\mathfrak{E}^e = [m\mathfrak{T}_n\{g\}] \quad (10, 2)$$

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathfrak{S}, \quad (10, 3)$$

mit

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad \text{und} \quad \text{div } \mathfrak{S} = 0. \quad (10, 4, a, b, c)$$

Als Randbedingung für $\mathbf{j}$ hat man zu erfüllen

$$(\mathbf{j}\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}| = 1 \quad (10, 5)$$

und für σ wird vorausgesetzt

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{r}| < 1 \\ 0 & \text{für } |\mathbf{r}| > 1. \end{cases} \quad (10, 6)$$

Das $\mathfrak{T}_n\{g\}$ in Gl. (10, 2) ist mit der vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit ω verknüpft. Wenn ω gegeben ist durch

$$\bar{\omega} = \omega(r, z)m, \quad (10, 7)$$

so bekommt man, da nach Gl. (5, 29)

$$\mathfrak{T}_n\{g\} = 2[\mathbf{r}m]S_{n-1}\{\dot{g}\},$$

für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega^2 = -2S_{n-1}\{\dot{g}\}. \quad (10, 8)$$

³ Weitere Anwendungsbeispiele finden sich in der Arbeit: R. LÜST & A. SCHLÜTER, Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse II, Z. f. Naturforschg., im Erscheinen.

⁴ L. BIERMANN mit einem Anhang von A. SCHLÜTER, Z. f. Naturforschg. **5a**, 65 (1950).

Wir nehmen an, dass ω^2 jeweils in dieser Form vorgegeben ist. Gl (10, 2) in Gl. (10, 1) eingesetzt ergibt

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{E} + [\mathfrak{m}\mathfrak{T}_n\{g\}] \quad (10, 9)$$

und durch Gl. (6, 4)

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{E} + \mathfrak{Q}_{n-1}\{g\} - \mathfrak{Q}_{n+1}\{h\} + \mathfrak{P}_{n+1}\{h\} \quad (10, 10)$$

wobei

$$g = \Delta h \quad (10, 11)$$

ist.

Zur Lösung der Gleichungen machen wir jetzt für $\mathfrak{E}$ einen solchen Ansatz, dass Gl (10, 4b) gleich erfüllt ist. Das bedeutet, dass $\mathfrak{j}$ ein Polfeld sein muss. Wir setzen deshalb an:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{Q}_{n+1}\{h\} - \mathfrak{Q}_{n-1}\{g\} + \sum_{\mu=1}^{n'} \mathfrak{P}_{\mu}\{a_{\mu} x^{k_{\mu}}\} \quad (10, 12)$$

Die spezielle Form der $\mathfrak{P}_{\mu}$ ergibt sich aus der gleich näher zu betrachtenden Gl. (10, 4a). Die Konstanten n' , a_{μ} und k_{μ} sind zunächst noch beliebig und werden durch gleich zu besprechende Bedingungsgleichungen erst festgelegt. Gl. (10, 12) in Gl. (10, 10) eingesetzt ergibt

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{P}_{n+1}\{h\} + \sum_{\mu=1}^{n'} \mathfrak{P}_{\mu}\{a_{\mu} x^{k_{\mu}}\} \quad (10, 13)$$

und für $\mathfrak{S}$ erhält man

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{T}_{n+1}\{h\} + \sum_{\mu=1}^{n'} \mathfrak{T}_{\mu}\{a_{\mu} x^{k_{\mu}}\} \quad (10, 14)$$

womit Gl. (10, 3) und (10, 4c) erfüllt sind. Es sind jetzt noch die Gln. (10, 4a) und (10, 5) zu befriedigen.

Gl. (10, 4a) ergibt mit Gl. (10, 12)

$$\text{rot } \mathfrak{P}_{\mu}\{a_{\mu} x^{k_{\mu}}\} = 0 \quad \text{für jedes } \mu. \quad (10, 15)$$

Da wir voraussetzen $a_{\mu} \neq 0$, erhält man mit Gl. (4, 10), (2, 7) und (5, 29)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{P}_{\mu}\{x^{k_{\mu}}\} &= -\mathfrak{T}_{\mu}\{\Delta x^{k_{\mu}}\} = -\mathfrak{T}_{\mu}\{2k_{\mu}(2k_{\mu} + 1)x^{k_{\mu}-1}\} \\ &= 2[\text{mr}]S_{\mu-1}\{2k_{\mu}(2k_{\mu} + 1)(k_{\mu} + 1)x^{k_{\mu}-2}\}. \end{aligned} \quad (10, 16)$$

Es muss somit nach Gl. (10, 15)

$$S_{\mu-1}\{2k_{\mu}(2k_{\mu} + 1)(k_{\mu} - 1)x^{k_{\mu}-2}\} = 0 \quad (10, 17)$$

sein. Die Fälle, dass $k_\mu = 0$ oder $k_\mu = 1$ ist, brauchen nicht betrachtet zu werden, da $\mathfrak{P}_\mu\{\text{const.}\} = \mathfrak{P}_\mu\{x\} = 0$ ist für jedes μ . Ebenso soll der Fall $k_\mu = -\frac{1}{2}$, womit (10, 17) ebenfalls erfüllt ist, ausgelassen werden, da dies die gewöhnlichen Multipolfelder ergibt, die im Mittelpunkt singulär sind. Es muss dann, damit

$$S_{\mu-1}\{x^{k_\mu-2}\} = 0 \quad (10, 18)$$

ist, die $(\mu - 1 - [(\mu - 1)/2])$ -te Ableitung von $x^{k_\mu-2}$ verschwinden, also

$$\mu - \left[\frac{\mu - 1}{2} \right] \geq k_\mu \quad (10, 19)$$

sein.

Als letztes ist nun noch die Randbedingung (10, 5) zu erfüllen, die die Bedingungsgleichungen für n' und a_μ liefert. Aus Gl. (10, 13) und (10, 5) erhält man mit (6, 10):

$$\begin{aligned} (jr) = & -(n+2)S_{n+1}\{h\} + nS_{n-1}\{g\} \\ & - \sum_{\mu=1}^{n'} (1+\mu)S_\mu\{a_\mu x^{k_\mu}\} + \sum_{\mu=1}^{n'} (\mu-1)S_{\mu-2}\{a_\mu 2k_\mu(2k_\mu+1)x^{k_\mu-1}\}. \end{aligned} \quad (10, 20)$$

Für $|r| = 1$ oder $x = 1$ soll dieser Ausdruck verschwinden. Daraus ergibt sich, dass $n' = n + 1$ sein muss. Somit bleibt die Gleichung

$$\begin{aligned} & -(n+2)S_{n+1}\{h + a_{n+1}x^{k_n}\} + nS_{n-1}\{g + a_{n+1}2k_{n+1}(2k_{n+1}+1)x^{k_{n+1}-1}\} \\ & + \sum_{\mu=1}^n (1+\mu)S_\mu\{a_\mu x^{k_\mu}\} + \sum_{\mu=1}^n (\mu-1)S_{\mu-2}\{a_\mu 2k_\mu(2k_\mu+1)x^{k_\mu-1}\} = 0 \end{aligned} \quad (10, 21)$$

für $x = 1$.

Für die μ ergibt sich die weitere Bedingung, dass sie entweder nur gerade oder ungerade sein können, je nachdem, ob $n + 1$ gerade oder ungerade ist. Denn wegen der zu erfüllenden Randbedingung können nur gerade oder ungerade Potenzen von z auftreten. Die auftretenden a_μ ($\mu \leq n + 1$) werden durch Gl. (10,21) festgelegt. Damit sind dann alle Gleichungen erfüllt.

Um alle Gleichungen ((10, 1)–(10, 6)) zu befriedigen, muss man also, wenn g vorgegeben ist, aus Gl. (10, 11) h bestimmen. Weiterhin findet man die a_μ und k_μ mit Hilfe der Randbedingung (10, 21), wobei die k_μ noch der einschränkenden Bedingung (10, 18) gehorchen müssen. Und zwar ergeben sich zur Bestimmung der a_μ aus Gl. (10, 21) algebraische Gleichungen, in denen die Koeffizienten der Potenzen von z zum Verschwinden gebracht werden müssen.

Es sei dies an dem Fall $n = 1$ genauer betrachtet, der auch in⁴ zu Grunde gelegt war. Die Annahme $n = 1$ bedeutet, dass die Winkelgeschwindigkeit ω nur vom Abstand r vom Mittelpunkt abhängt und nicht von z . Denn nach Gl. (10, 8) ist jetzt

$$\omega^2 = -2j. \quad (10, 22)$$

Wir nehmen an, dass g (bzw. $\dot{g}$) vorgegeben sei. Dann ist j durch Gl. (10, 13) gegeben:

$$j = \mathfrak{P}_2\{h\} + \mathfrak{P}_2\{ax^k\} \quad (a_2 = a, k_2 = k) \quad (10, 23)$$

wobei h bestimmt ist durch Gl. (10, 11)

$$\Delta h = g.$$

Für k gilt nach (10,19) die Einschränkung $k \leq 2$. Die Randbedingung liefert nach Gl. (10, 21):

$$-3S_2\{h + ax^k\} + S_0\{g + 2ak(2k + 1)x^{k-1}\} = 0 \quad \text{für } x = 1. \quad (10, 24)$$

Dies ergibt nach Gl. (5, 21) und (5, 23):

$$\begin{aligned} -3[4z^2(\dot{h} + ak(k-1)x^{k-2}) - 2(\dot{h} + akx^{k-1})] \\ + g + 2ak(2k + 1)x^{k-1} = 0 \quad \text{für } x = 1 \end{aligned} \quad (10, 25)$$

Koeffizientenvergleich der Potenzen von z ergibt:

$$\ddot{h} \mid_{x=1} = -ak(k-1) \quad (10, 26)$$

und

$$-6\dot{h} \mid_{x=1} + g \mid_{x=1} = -4ak(k-1). \quad (10, 27)$$

Aus (10, 26) folgt, wenn für $x = 1$ nicht $\ddot{h} = 0$ gefordert werden kann, dass $k = 2$ sein muss, was mit der obigen Bedingung für k verträglich ist. Für a erhält man dann aus Gl. (10, 26)

$$a = -\frac{1}{2}\ddot{h} \mid_{x=1}. \quad (10, 28)$$

Dies a erfüllt auch Gl. (10, 27). Denn nach Gl. (10, 11) und (2, 7) ist

$$g = \Delta h = 6\dot{h} + 4x\ddot{h}, \quad (10, 29)$$

und damit

$$-6\dot{h} + g = 4x\ddot{h}. \quad (10, 30)$$

Setzt man (10, 30) in (10, 27) ein, so bekommt man

$$4\ddot{h} \mid_{x=1} = -8a, \quad (10, 31)$$

was ebenfalls liefert

$$a = -\frac{1}{2}\ddot{h} \mid_{x=1}.$$

Das Problem für ein gegebenes g ist also jeweils gelöst, sobald man h aus Gl. (10, 11) und das a dann entsprechend Gl. (10, 28) bestimmt hat.