*Eine einheitliche Charakteristikenmethode zur
Behandlung gemischter Unterschall-
Überschallströmungen¹*

MANFRED SCHÄFER

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und Universität Göttingen

Communicated by W. TOLLMIE

1. Einleitung. Die Berechnung stationärer ebener Gasströmungen stößt selbst unter den vereinfachenden Annahmen von Reibungs- und Wirbelfreiheit auf Schwierigkeiten, sobald Strömungsgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit einander gleich werden. Dies hat seinen tiefliegenden mathematischen Grund in dem Wechsel der Strömungsdifferentialgleichung beim Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten vom elliptischen zum hyperbolischen Typus und umgekehrt². Indessen weiß man aber aus experimentellen Befunden (Druckmessungen, Auswertung von Interferenzbildern) wie durch Kenntnis exakter Speziallösungen, daß die Überschreitung der Schallgeschwindigkeit an sich physikalisch im allgemeinen mit keiner wesentlichen Veränderung der Strömung verbunden ist. Ein bemerkenswertes Verhalten der Strömung tritt vielmehr—wenn überhaupt—in Erscheinung, nachdem die Schallgeschwindigkeit um ein gewisses Maß überschritten ist (Auftreten der Tollmienschen Grenzlinien², die anzeigen, daß die Strömung nicht weiter als Potentialströmung fortbestehen kann).

Für *reine Überschallströmungen* bietet das *Charakteristikenverfahren* in seiner jetzigen Ausgestaltung die Möglichkeit, alle praktisch anfallenden Probleme in

¹ Über diese Arbeit hat der Verfasser auszugsweise im ersten Teil seines Vortrages auf dem VIII. Internationalen Kongreß für Theoretische und Angewandte Mechanik in Istanbul im August 1952 berichtet.

² Einen Gesamtüberblick über diesen Problemkreis gibt der Göttinger Monographieartikel von W. TOLLMIE [1].

guter Näherung bequem zu berechnen³. Andererseits existieren spezifische *Unterschallmethoden*, denen gemeinsam ist, daß eine Ausgangsnäherungslösung, die man der inkompressiblen Strömung entnimmt (Methode von Janzen und Rayleigh) oder durch Linearisierung gewinnt (Methode von Prandtl und Glauert), einmal oder mehrfach iterativ verbessert wird⁴. Der Anwendbarkeit aller dieser Verfahren ist aber in der Nachbarschaft der kritischen Schallgeschwindigkeit eine Grenze gesetzt.

Infolge ihrer *grundsätzlichen Verschiedenartigkeit* ist es offenbar unmöglich, von der Charakteristikenmethode zu den angeführten Unterschallmethoden eine Brücke zu schlagen. Vielmehr muß, wenn eine "gemischte" Unterschall-Überschallströmung in ihrer *Gesamtheit einheitlich* erfaßt werden soll, ein methodisch andersartiger Weg beschritten werden.

Nun bestehen zwar gegen die nächstliegende Idee, mit einem Reihenansatz⁵ zu arbeiten, grundsätzlich keine Bedenken, indeßen ist die Anwendungsmöglichkeit dieser Methode infolge der schlechten Konvergenz der Reihenentwicklungen stark eingeschränkt. Umstritten ist ferner der Gültigkeitsbereich von Lösungen einer vereinfachten Differentialgleichung, die nur die *unmittelbare* Umgebung der kritischen Schallgeschwindigkeit streng erfaßt⁶. Jedenfalls kann man auf diese Art höchstens Ausschnitte aus einem Strömungsfeld⁷ berechnen, wobei offen bleibt, ob diesem Ausschnitt ein physikalisch vernünftiges Gesamtströmungsfeld entspricht. Schließlich ist der Gedanke, durch Umschreiben der Bedingungsgleichungen für Kontinuität und Wirbelfreiheit auf ein natürliches Bezugssystem, bestehend aus Bogenlänge einer Stromlinie und der Normalen dazu, zwei Beziehungen von *einheitlichem* Charakter gewinnen zu wollen, trügerisch, wie wir erkennen werden⁸.

Daher kommt zur Berechnung eines gemischten Strömungsfeldes von den bislang bekannt gewordenen Methoden allein die auf P. Molenbroek [10] und C. A. Tschapligin [11] zurückgehende Hodographenmethode für kompressible Strömungen in Betracht. Bei der Hodographenmethode werden Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential als Funktionen der *Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors* anstelle der Ortskoordinaten betrachtet. Zwar erleidet auch die Tschapliginsche Differentialgleichung den eigentümlichen Typuswechsel, aber da sie im Unterschied zur ursprünglichen Differentialgleichung *linear* ist, liefert die Methode des Produktansatzes—wie bereits Tschapligin bemerkt hat—eine Klasse von einfachen Partikularlösungen für das gesamte Feld, die man außerdem linear superponieren kann. Tschapligins aussichtsreiche Idee ist jedoch lange Zeit unbeachtet geblieben und erst vor reichlich 15 Jahren in Deutschland von

³ Vgl. etwa den zusammenfassenden Artikel [2] oder R. SAUER [3, §§18–20].

⁴ Vgl. hierzu etwa den Göttinger Monographieartikel von E. KRAHN [4] oder R. SAUER [3, §15].

⁵ Vgl. hierzu etwa [1] und die dort zitierten Arbeiten.

⁶ Vgl. etwa [5]. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Approximation hingewiesen, die I. IMAI [6] anwendet.

⁷ Vgl. hierzu H. BEHRBOHM [7] sowie [8] und von den GUDERLEY schen Arbeiten etwa [9].

⁸ Vgl. Abschnitt 6.

A. Busemann [12] und danach von F. Ringleb [13]⁹ und W. Tollmien [15] sowie in England vor allem von M. J. Lighthill und Mitarbeitern [16, 17, 18] und T. M. Cherry [19, 20] aufgegriffen worden. Auf ihr fußt auch die Operatorenmethode von S. Bergman¹⁰ sowie¹¹ die Methode von S. Tomotika und K. Tamada [24, 25], bei der mit anscheinend guter Näherung (auch in einem größeren Geschwindigkeitsbereich) an Stelle des Adiabaten Gesetzes ein für die Rechnung bequemerer hypothetisches Gesetz¹² benutzt wird. Hinsichtlich einer Verallgemeinerung der Hodographenmethode sei auf die Arbeit von L. Crocco [26] verwiesen.

Trotz der mit der Hodographenmethode bisher erzielten Erfolge kann ein ihr grundsätzlich anhaftender Nachteil nicht übersehen werden. Er besteht darin, daß in vielen Fällen, z.B. bei Umströmungsproblemen, *mehreren Punkten* des Strömungsfeldes der *gleiche Geschwindigkeitsvektor* zugeordnet ist und somit *kein eindeutiger Zusammenhang* zwischen Strömungs(Orts-)plan und Hodographenplan besteht¹³. Daher drängt sich die Frage auf, ob man nicht an Stelle der Geschwindigkeitskoordinaten andere *geeignete* unabhängige Variable finden kann, die von diesem Nachteil frei sind, so daß also die Ortskoordinaten eindeutige Funktionen dieser Variablen werden. Für reine Überschallströmungen haben die charakteristischen Grundkurven als Bezugssystem die gewünschte Eigenschaft. Dagegen ist dieses Bezugssystem für Unterschallströmungen nicht ohne weiteres brauchbar, da hier die charakteristischen Grundkurven *konjugiert-komplex*¹⁴ werden.

Die wesentliche Vereinfachung, welche durch die Einführung von charakteristischen Koordinaten im Überschallbereich erzielt wird, ließe indeßen eine Übertragungsmöglichkeit in den *Unterschallbereich* erstrebenswert erscheinen, und so ist denn der Gedanke nicht fernliegend, die dort konjugiert-komplexen Koordinaten paarweise zu zwei neuen *reellen* Koordinaten zusammenzufassen und dazu ihr im *Überschallbereich* ebenfalls *reelles Analogon* heranzuziehen. Wir wollen also die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors und die Ortskoordinaten als eindeutige Funktionen dieser von uns als "nebencharakteristische" bezeichneten Koordinaten betrachten. Dabei wird sich ergeben, daß man im ersten Falle auf Funktionen geführt wird, die der Potentialgleichung bzw. der Saitenschwingungsgleichung genügen, welche man ja mathematisch vollständig beherrscht.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darauf, die mathematischen Grundla-

⁹ Vgl. hierzu [14].

¹⁰ Wir können uns hier mit dem Zitat von [21] begnügen, da diese Abhandlung mit einer umfangreichen Zusammenstellung der vielen einschlägigen Arbeiten des gleichen Verfassers sowie derjenigen anderer Autoren abschließt. Vgl. hierzu außerdem [22].

¹¹ Vgl. ferner [23].

¹² Im Unterschied zur nächstliegenden Näherung (vielfach nach v. KÁRMÁN und TSIEN benannt, jedoch bereits von TSCHAPLIGIN benutzt), bei der die Adiabatenkurve einfach durch ihre Tangente in einem ausgewählten Punkt ersetzt wird.

¹³ Vgl. hierzu etwa [27].

¹⁴ Vgl. hierzu [28].

gen dieser einheitlichen Charakteristikenmethode zu entwickeln. Eine Anwendung dieser Methode, und zwar auf die Untersuchung von stationären Störungen in einer gemischten Strömung, die der Verfaßer im zweiten Teil seines Kongreßvortrages¹⁵ mitgeteilt hat, soll in einer gesonderten Veröffentlichung behandelt werden.

2. Charakteristische Bedingung und Einführung der Nebencharakteristiken.

Wir knüpfen an die geläufige Charakteristikenmethode an, für die wir die benötigten Grundgleichungen kurz herleiten¹. Dabei führen wir die charakteristischen Grundkurven als Koordinatenlinien in der Weise ein, daß wir verlangen, die beiden partiellen Ausgangsdifferentialgleichungen sollen je eine Beziehung liefern, die längs jeder der neuen Koordinatenlinien nur *tangentielle* Ableitungen der abhängigen Variablen enthält, dagegen keine Ableitungen quer zu der Koordinatenlinie. Man bekommt so eine Art gewöhnlicher Differentialgleichungen, da längs einer Schar charakteristischer Grundkurven nur noch Ableitungen nach der laufenden Koordinate auftreten, während die Querkordinate lediglich als Parameter fungiert. Die Lösung der partiellen Differentialgleichungen wird entsprechend den zwei Scharen charakteristischer Grundkurven auf ein gekoppeltes Paar gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt.

Den Ausgangspunkt bilden die Bedingungsgleichungen für die Quell- und Wirbelfreiheit einer stationären ebenen reibungslosen adiabatischen Gasströmung; sie lauten

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (2.1b)$$

oder in skalarer Form:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v \cos \vartheta) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \sin \vartheta) = 0, \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v \sin \vartheta) - \frac{\partial}{\partial y}(v \cos \vartheta) = 0. \quad (2.2b)$$

Dabei bedeutet v den Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}$ und ϑ seine Richtung gegen die positive Abszissenachse eines cartesischen x - y -Ortskoordinatensystems, also den Stromlinienwinkel (Figur 1). Die Dichte ρ hängt nach dem Adiabaten-gesetz für ideale Gase und dem Energiesatz mit dem Geschwindigkeitsbetrag² durch die Beziehung

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa-1} = 1 - \frac{v^2}{V_m^2} = \frac{2}{\kappa-1} \frac{a^2}{V_m^2} \quad (2.3)$$

¹⁵ Vgl. Anm. 1.

¹ Nach [2].

² Im folgenden üblicherweise einfach "Geschwindigkeit" genannt.

zusammen, wobei mit ρ_0 die Ruhedichte (für $v = 0$), mit $\kappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen, mit V_m die Geschwindigkeit im Vakuum und mit $a = \sqrt{dp/d\rho}$ die örtliche Schallgeschwindigkeit bezeichnet sei.

Unter Berücksichtigung von (2.3) hat (2.2) die ausführliche Gestalt:

$$\left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right) \left(\frac{\cos\vartheta}{v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sin\vartheta}{v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \sin\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \cos\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\sin\vartheta}{v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\cos\vartheta}{v} \frac{\partial v}{\partial y} + \cos\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \sin\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0. \quad (2.4b)$$

Anstelle der unabhängigen Veränderlichen x und y werden nun gemäß der oben formulierten Forderung "charakteristische" oder—wie wir im Hinblick auf eine später notwendige Unterscheidung genauer sagen wollen—"haupt-

FIGUR 1

charakteristische" Koordinaten ξ , η eingeführt. Die Existenz eines solchen Netzes von Koordinatenlinien $\xi(x, y) = \text{const.}$, $\eta(x, y) = \text{const.}$ muß natürlich nachgewiesen werden. Zunächst liefert die Umrechnung von (2.4) auf ganz allgemeine ξ - η -Koordinaten³

$$\begin{aligned} &\left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right) \frac{v_\xi}{v} (\cos\vartheta \xi_x + \sin\vartheta \xi_y) + \vartheta_\xi (\sin\vartheta \xi_x - \cos\vartheta \xi_y) \\ &+ \left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right) \frac{v_\eta}{v} (\cos\vartheta \eta_x + \sin\vartheta \eta_y) + \vartheta_\eta (\sin\vartheta \eta_x - \cos\vartheta \eta_y) = 0, \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} &\frac{v_\xi}{v} (\sin\vartheta \xi_x - \cos\vartheta \xi_y) + \vartheta_\xi (\cos\vartheta \xi_x + \sin\vartheta \xi_y) \\ &+ \frac{v_\eta}{v} (\sin\vartheta \eta_x - \cos\vartheta \eta_y) + \vartheta_\eta (\cos\vartheta \eta_x + \sin\vartheta \eta_y) = 0. \end{aligned} \quad (2.5b)$$

³ Variable als Indizes deuten stets entsprechende Differentiation an.

Hieraus sollen nun, etwa für die hauptcharakteristischen Grundkurven $\eta = \text{const.}$, Beziehungen hergeleitet werden, die nur tangentielle Ableitungen in Richtung des laufenden Kurvenparameters ξ enthalten, also von Querableitungen nach η frei sind. Beseitigt man in (2.5) eine dieser Ableitungen, beispielsweise ϑ_η , durch Elimination, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{v_\eta}{v} \cdot \begin{vmatrix} \sin \vartheta \eta_x - \cos \vartheta \eta_y & \cos \vartheta \eta_x + \sin \vartheta \eta_y \\ (\cos \vartheta \eta_x + \sin \vartheta \eta_y) \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) & \sin \vartheta \eta_x - \cos \vartheta \eta_y \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \frac{v_\xi}{v} (\sin \vartheta \xi_x - \cos \vartheta \xi_y) + \vartheta_\xi (\cos \vartheta \xi_x + \sin \vartheta \xi_y) & \cos \vartheta \eta_x + \sin \vartheta \eta_y \\ \frac{v_\xi}{v} (\cos \vartheta \xi_x + \sin \vartheta \xi_y) \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) + \vartheta_\xi (\sin \vartheta \xi_x - \cos \vartheta \xi_y) & \sin \vartheta \eta_x - \cos \vartheta \eta_y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Damit nun auch v_η nicht auftritt, muß die Determinante auf der linken Seite von (2.6) verschwinden. Dies liefert die Differentialgleichung für die hauptcharakteristischen Grundkurven $\eta(x, y) = \text{const.}$, die man als "*charakteristische Bedingung*" bezeichnet. Dann muß aber auch die Determinante auf der rechten Seite null werden, was zu einer weiteren Differentialgleichung führt, die längs der hauptcharakteristischen Grundkurven zu erfüllen ist. Die Beschäftigung mit dieser Differentialgleichung, die wir "*hauptcharakteristische Hodographengleichung*" nennen wollen, stellen wir im Augenblick noch zurück.

Die Ausrechnung der charakteristischen Bedingung führt auf die quadratische Gleichung

$$\frac{a^2}{v^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) = (\cos \vartheta \eta_x + \sin \vartheta \eta_y)^2. \quad (2.7)$$

Dieselbe Schlußweise kann natürlich ebensogut für die andere Schar von Netzkurven $\xi(x, y) = \text{const.}$ durchgeführt werden. Es ergibt sich dann eine völlig analoge charakteristische Bedingung, die sich von (2.7) nur dadurch unterscheidet, daß ξ anstelle von η auftritt, und wir können daher eine der beiden Lösungen von (2.7) für ξ und die andere für η nehmen:

$$\cos \vartheta \xi_x + \sin \vartheta \xi_y = + \frac{a}{v} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad (2.8a)$$

$$\cos \vartheta \eta_x + \sin \vartheta \eta_y = - \frac{a}{v} \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}. \quad (2.8b)$$

Das Gleichungspaar (2.8) besitzt *reelle* Lösungen für die Ableitungen von ξ und η offenbar nur dann, wenn $v \geq a$ ist, d.h. für *Überschallströmungen* mit

Einschluß des Grenzfalls, bei dem gerade Strömungs- und Schallgeschwindigkeit einander gleich sind.

Führt man in bekannter Weise durch

$$\frac{a}{v} = \sin \alpha \quad (2.9)$$

den Machschen Winkel α ein, so wird (2.8) durch die Ansätze

$$\xi_x = -\lambda \sin(\vartheta - \alpha), \quad \xi_y = \lambda \cos(\vartheta - \alpha) \quad (2.10a)$$

bzw.

$$\eta_x = -\mu \sin(\vartheta + \alpha), \quad \eta_y = \mu \cos(\vartheta + \alpha) \quad (2.10b)$$

befriedigt, wobei die beiden Faktoren λ und μ vorerst unbestimmt⁴ bleiben. Durch

$$-\frac{\xi_x}{\xi_y} = \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) \quad (2.11a)$$

bzw.

$$-\frac{\eta_x}{\eta_y} = \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) \quad (2.11b)$$

erhält man die Neigung der beiden Scharen hauptcharakteristischer Grundkurven; die ξ -Kurven schneiden also die Stromlinien unter dem Winkel $-\alpha$, die η -Kurven unter dem Winkel $+\alpha$. Diese Kurven sind natürlich nichts anderes als die Machschen Linien. Nach einem Vorschlag von W. Tollmien bezeichnet man die beiden Scharen zweckmäßig als linksläufige oder rechtsläufige Machsche Linien, je nachdem auf welcher Seite der Stromlinie die Machschen Linien vom Schnittpunkt aus in Strömungsblickrichtung verlaufen (Figur 2).

Für $v < a$ sind die Lösungen von (2.8) *konjugiert-komplex*. Bei *Unterschallströmungen* setzen wir daher mit zwei *reellen* Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$ an:

$$\xi = s + it, \quad (2.12a)$$

$$\eta = s - it, \quad (2.12b)$$

oder

$$s = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad (2.13a)$$

$$t = \frac{\xi - \eta}{2i} \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (2.13b)$$

⁴ Hierauf kommen wir in Abschnitt 5 zurück.

FIGUR 2

Durch Einsetzen in (2.11) ergibt sich, wenn analog zum Machschen Winkel α , der ja im Unterschallbereich nicht mehr reell bleibt und damit seine physikalische Bedeutung verliert, eine formale Winkelgröße A durch

$$\sin A = \frac{v}{a} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (2.14)$$

eingeführt wird, mit $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} = i \sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}} = i \cos A$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial}{\partial x}(s \pm it)}{\frac{\partial}{\partial y}(s \pm it)} &= \frac{(s_x s_y + t_x t_y) \pm i(s_y t_x - s_x t_y)}{s_y^2 + t_y^2} = -\frac{\sin \vartheta \operatorname{ctg} \alpha \mp \cos \vartheta}{\cos \vartheta \operatorname{ctg} \alpha \pm \sin \vartheta} \\ &= \frac{\cos \vartheta \mp i \sin \vartheta \cos A}{\sin \vartheta \pm i \cos \vartheta \cos A} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 A \mp i \cos A}{1 - \cos^2 \vartheta \sin^2 A}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die beiden Kurvenscharen $s = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ bezeichnen wir als „nebencharakteristische“ Grundkurven oder kurz als „Nebencharakteristiken“.

Wir können sie offenbar auch für den Überschallbereich definieren:

$$\xi = \sigma + \tau, \quad (2.16a)$$

$$\eta = \sigma - \tau, \quad (2.16b)$$

oder

$$\sigma = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad (2.17a)$$

$$\tau = \frac{\xi - \eta}{2}; \quad (2.17b)$$

und aus (2.11) folgt die (2.15) entsprechende Beziehung

$$\frac{\sigma_x \pm \tau_x}{\sigma_y \pm \tau_y} = -\operatorname{tg}(\vartheta \mp \alpha) = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \mp \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \vartheta}. \quad (2.18)$$

Für $\sigma \approx {}^5s$, $\tau \approx it$ und $\sin \alpha \approx 1/\sin A$ geht offensichtlich (2.18) in (2.15) über, während im Grenzfall $\tau = t = 0$, d.h. längs der Schallgrenze ($v = a = a^*$), die beiden Beziehungen identisch sind. Diese hier erkannte Analogie wird uns im folgenden auf Schritt und Tritt begegnen und von Nutzen sein.

3. Die charakteristischen Hodographengleichungen. Wenden wir uns nunmehr der Untersuchung der hauptcharakteristischen Hodographengleichung zu. Sie wird durch Nullsetzen der rechtsseitigen Determinante in (2.6) gewonnen unter Berücksichtigung der charakteristischen Bedingung in der Form (2.11a) und (2.11b). Außerdem erhält man genau wie bei der charakteristischen Bedingung eine zweite entsprechende Gleichung durch Vertauschung von ξ und η . Es ergibt sich dann anstelle des ursprünglichen Gleichungspaares (2.4a), (2.4b) das auf die neuen ξ - η -Koordinaten bezogene Gleichungspaar

$$\vartheta_\xi - \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{av} v_\xi = 0, \quad (3.1a)$$

$$\vartheta_\eta + \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{av} v_\eta = 0 \quad (v > a). \quad (3.1b)$$

Bei Einführung der neuen abhängigen Veränderlichen $\nu(v)$ anstatt v durch

$$\nu = \int_{a^*}^v \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{av} dv = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (3.2)$$

$$\left(a^* = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} v_m \text{ kritische Schallgeschwindigkeit} \right)$$

bekommt (3.1) die einfache Gestalt

$$\vartheta_\xi - \nu_\xi = 0, \quad (3.3a)$$

$$\vartheta_\eta + \nu_\eta = 0. \quad (3.3b)$$

Die erste Beziehung ist eine Differentialgleichung längs der *linksläufigen* Machschen Linien $\eta = \text{const.}$ (η hat dabei nur die Rolle eines Parameters!), die zweite eine Differentialgleichung längs der *rechtsläufigen* Machschen Linien $\xi = \text{const.}$

⁵ Lies: entspricht.

Bei Verwendung der *Nebencharakteristiken* als Koordinatenlinien erhält man dagegen im *Überschallbereich* aus (3.3) mit (2.17):

$$\vartheta_\sigma + \vartheta_\tau - \nu_\sigma - \nu_\tau = 0,$$

$$\vartheta_\sigma - \vartheta_\tau + \nu_\sigma - \nu_\tau = 0,$$

oder durch Kombination beider Gleichungen

$$\vartheta_\sigma - \nu_\tau = 0, \quad (3.4a)$$

$$\vartheta_\tau - \nu_\sigma = 0. \quad (3.4b)$$

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Gleichungsformen (3.3) und (3.4) springt sofort ins Auge. Der eigentümliche Zerfall des Gleichungssystems, der bei Verwendung der Hauptcharakteristiken statt hat, tritt bei Verwendung der Nebencharakteristiken nicht ein, da in (3.4) jedesmal Ableitungen in *beiden* Koordinatenrichtungen vorkommen.

Der Übergang vom System (3.3) bzw. (3.4) zu je einer Differentialgleichung für ϑ und ν allein liefert entweder

$$\vartheta_{\xi\eta} = \nu_{\xi\eta} = 0 \quad (3.5)$$

oder die Saitenschwingungsgleichung

$$\vartheta_{\sigma\sigma} - \vartheta_{\tau\tau} = \nu_{\sigma\sigma} - \nu_{\tau\tau} = 0, \quad (3.6)$$

also die beiden einfachsten Grundtypen von hyperbolischen Differentialgleichungen.

Für den *Unterschallbereich* erhält man gemäß unserer Übertragungsanalogie $\sigma \approx s$, $\tau \approx it$ anstatt (3.4) nun

$$\vartheta_s + i\nu_t = 0,$$

$$-i\vartheta_t - \nu_s = 0.$$

Führen wir anstelle ν die analoge Funktion $N(v)$ für $v \leq a$ durch

$$-i\nu \approx N = \int_{a^*}^v \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{av} dv = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \log \frac{1 + \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \cos \Lambda}{1 - \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \cos \Lambda} \quad (3.7)$$

$$+ \log \operatorname{tg} \frac{\Lambda}{2}$$

ein, so ergibt sich im Unterschied zu (3.4) das Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungssystem

$$\vartheta_s - N_t = 0, \quad (3.8a)$$

$$\vartheta_* + N_* = 0 \quad (3.8b)$$

für das reelle Funktionenpaar ϑ und N . Beide Funktionen genügen also der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta\vartheta = \Delta N = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \quad (3.9)$$

die hier an die Stelle von (3.6) tritt.

Die allgemeine Lösung der charakteristischen Hodographengleichungen (3.3) oder (3.4) bzw. (3.8) lautet

im Überschallbereich

$$\vartheta - \nu = g(\eta), \quad (3.10a)$$

$$\vartheta + \nu = f(\xi), \quad (3.10b)$$

mithin

$$\vartheta = \frac{1}{2}\{f(\xi) + g(\eta)\}, \quad (3.11a)$$

$$\nu = \frac{1}{2}\{f(\xi) - g(\eta)\} \quad (3.11b)$$

oder

$$\vartheta = \frac{1}{2}\{f(\sigma + \tau) + g(\sigma - \tau)\}, \quad (3.12a)$$

$$\nu = \frac{1}{2}\{f(\sigma + \tau) - g(\sigma - \tau)\}, \quad (3.12b)$$

zunächst mit zwei willkürlichen¹ Funktionen f und g . Dagegen lautet sie im Unterschallbereich

$$\vartheta = \frac{1}{2}\{F(s + it) + G(s - it)\}, \quad (3.13a)$$

$$N = \frac{1}{2i}\{F(s + it) - G(s - it)\}, \quad (3.13b)$$

wobei F und G willkürliche *analytische* Funktionen einer Veränderlichen sind. Da wir aber naturgemäß nur an reellen Lösungen interessiert sind, ist offenbar $G(s - it)$ *konjugiert-komplex* zu $F(s + it)$ zu wählen.

Der Grenzfall $v \rightarrow 0$ bzw. $a \rightarrow \infty$ muß natürlich die *inkompressible* Strömung liefern. Hierfür sind ϑ und $\log(v/v_0)$ (v_0 konstante Bezugsgeschwindigkeit) bezüglich x und y konjugiert harmonische Funktionen, wie man auch sofort aus (2.4) für $a \rightarrow \infty$ erkennt. In der Tat befriedigt für $A \rightarrow 0$ der Ansatz $s \equiv x$, $t \equiv y$

¹ Diese Willkür ist selbstverständlich entsprechend der physikalischen Bedeutung der Funktionen etwas eingeschränkt; es handelt sich hierbei um mindestens stückweise stetige und stetig differenzierbare Funktionen.

Gleichung (2.15), aus (3.7) folgt $N \rightarrow \log(v/v_0)$, und daher geht (3.8) in das Gleichungspaar

$$\vartheta_x - \frac{1}{v} v_y = 0, \quad (2.4a^*)$$

$$\vartheta_y + \frac{1}{v} v_x = 0 \quad (2.4b^*)$$

über, das sich sofort durch Kombination von (2.4a) und (2.4b) gewinnen läßt.

4. Durchgang durch die Schallgrenze; Übergangsbedingung. Da der Unterschallbereich und der Überschallbereich nicht isoliert nebeneinander bestehen, sondern vielmehr in *wechselseitiger Beeinflussung* ein *Gesamtströmungsfeld* bilden, müssen sicherlich die Lösungsfunktionen in (3.12) und (3.13) gegenseitigen *Bindungen* und *Bedingungen* unterworfen sein. Mit deren Formulierung im einfachsten Falle wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen. Beschränken wir uns hier auf den Fall von Überschallströmungen mit *durchweg stetiger Fortsetzbarkeit* in den Unterschallbereich—das Umgekehrte ist bekanntlich aus thermodynamischen Gründen immer notwendig—, so muß eine *nicht unterbrochene* Schallgrenze (die gegebenenfalls auch aus mehreren Teilen mit der gleichen Eigenschaft bestehen kann) existieren, längs der jedenfalls die Stetigkeit von v und ϑ zu fordern ist. Ganz andersartig liegen dagegen die Verhältnisse, wenn der Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeiten teilweise oder durchgängig durch einen Verdichtungsstoß mit einem Geschwindigkeitssprung nach Größe und eventuell auch nach Richtung erzwungen wird; dann tritt die kritische Schallgeschwindigkeit $v = a^*$, nur teilweise oder garnicht auf, und die Schallgrenze beginnt oder endet irgendwo auf der Stoßfront. Derartige verwickelte Möglichkeiten sollen jedoch, wie gesagt, hier vollkommen außer Betracht bleiben.

Wir betrachten die Abbildung des Strömungsfeldes in die Ebene der nebencharakteristischen Koordinaten in cartesischer Auftragung (Figur 3), so daß die Nebencharakteristiken durch die Achsenparallelen, die Hauptcharakteristiken (Machsche Linien) des Überschallbereichs durch um 45° geneigte Geraden dargestellt werden. Dabei erscheint die Trennungslinie zwischen Unter- und Überschallbereich, die Schallgrenze, welche der Einfachheit halber als aus einem einzigen Kurvenstück bestehend¹ angenommen sei, als Strecke $\sigma_1 \cdots \sigma_2$ der σ - und zugleich s -Achse $t = \tau = 0$. Längs der Schallgrenze ist definitionsgemäß [vgl. (3.2) und (3.7)] $\nu = N = 0$. Daher folgt für den *Überschallbereich* aus (3.12b) $f(\sigma) = g(\sigma)$ für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, während für Argumentwerte außerhalb dieses Intervalles, also außerhalb des Abhängigkeitsgebietes der Schallgrenze (siehe Figur 3): $\sigma_1 \leq \left\{ \begin{matrix} \sigma + \tau \\ \sigma - \tau \end{matrix} \right\} \leq \sigma_2$, zunächst (d.h. ohne Hinzuziehung etwaiger

¹ Was jedoch keine grundsätzliche Einschränkung bedeutet.

zusätzlicher Randbedingungen) keine Bindung zwischen den beiden Funktionen f und g besteht. Liegt jedoch der Überschallbereich vollständig in diesem Abhängigkeitsgebiet, so gilt offenbar $f(\sigma) \equiv g(\sigma)$. Entsprechend ergibt sich für den *Unterschallbereich* unter Beachtung der Zusatzbemerkung zu (3.13), daß $F(s) \equiv G(s)$ und reell sein muß; die Übereinstimmung beider Funktionen im ganzen Bereich folgt aus ihrem analytischen Charakter.

FIGUR 3

Somit haben wir bei *stetigem* Durchgang durch die Schallgrenze als allgemeine Lösungen der charakteristischen Hodographengleichungen für den *Überschallbereich im Abhängigkeitsgebiet* der Schallgrenze:

$$\vartheta(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\{f(\sigma + \tau) + f(\sigma - \tau)\}, \quad (4.1a)$$

$$\nu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\{f(\sigma + \tau) - f(\sigma - \tau)\}, \quad (4.1b)$$

während *außerhalb des Abhängigkeitsgebietes* die allgemeinere Form

$$\vartheta(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\{f(\sigma + \tau) + g(\sigma - \tau)\}, \quad (3.12a)$$

$$\nu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\{f(\sigma + \tau) - g(\sigma - \tau)\} \quad (f, g \text{ unabhängig}) \quad (3.12b)$$

heranzuziehen ist, und für den *Unterschallbereich*:

$$\vartheta(s, t) = \operatorname{Re} F(s + it), \quad (4.2a)$$

$$N(s, t) = \operatorname{Im} F(s + it); \quad (4.2b)$$

Re und Im bedeuten den Realteil bzw. Imaginärteil irgendeiner analytischen Funktion F der komplexen Variablen $s + it$, wobei für $t = 0$ $F(s)$ reell sein muß.

Ferner ergibt der Vergleich von (4.1a) und (4.2a) als *Übergangsbedingung* längs der Schallgrenze $t = \tau = 0$ (stetiger Anschluß von $\mathfrak{D}$!):

$$f(\sigma) = F^*(s) \text{ für } \sigma_1 \leq \sigma \equiv s \leq \sigma_2, \quad (4.3)$$

wobei $F^*(s)$ die stetigen "Rand" werte von F auf der Schallgrenze² kennzeichnet.

Es sei darauf hingewiesen, daß die *Ableitungen* von f keiner Beschränkung unterliegen; *Regularitätsdefekte* in den Ableitungen, die sich im Überschallbereich etwa von einer festen Wand aus längs Machscher Linien bis zur Schallgrenze fortpflanzen, sind also grundsätzlich durchaus *zugelassen*.

Fordert man jedoch ein völlig *reguläres* Verhalten der Strömung an der Schallgrenze, und befindet sich überdies der ganze Überschallbereich in deren Abhängigkeitsgebiet, so ist wegen (4.3) offenbar

$$f \equiv F. \quad (4.3^*)$$

In diesem Falle wird also der analytische Charakter der Unterschall-Lösung auch der Überschall-Lösung aufgezwungen, die diese Eigenschaft an sich keineswegs zu haben braucht. Für solche regulären Lösungen ist daher der grundsätzliche Unterschied in dem Charakter der Lösungen von elliptischen und hyperbolischen Differentialgleichungen verwischt. Dies ist auch in Übereinstimmung mit einem einschlägigen Satz von Sonja Kowalewski³, da hier ein *reines Anfangswertproblem* für den Überschallbereich vorliegt.

Diespezielle Art der Lösungsfunktionen muß sich im allgemeinen⁴ entsprechend der Nichtlinearität des Problems nach den Randbedingungen in der Strömungsebene (Ortsplan) richten, was aber hier noch nicht näher zur Sprache kommen kann.

5. Die Metrik des Koordinatennetzes. Nachdem durch die Lösung der charakteristischen Hodographengleichungen der Zusammenhang zwischen den *Geschwindigkeitskoordinaten* und den charakteristischen Koordinaten in allgemeiner Form dargestellt ist, haben wir uns nun noch mit der funktionalen Beziehung zwischen den *Ortskoordinaten* x, y der Strömungsebene und den charakteristischen Koordinaten zu befassen. Hierzu müssen wir an die in Abschnitt 2 aufgestellte charakteristische Bedingung anknüpfen. Es handelt sich nunmehr offenbar um ein vorwiegend geometrisches Problem, nämlich um die Bestimmung des mit den vorgegebenen Randbedingungen (z.B. Gestalt der Körperkontur, Verlauf der Strömung in Unendlichen, Lage einer etwaigen Stoßfront) verträglichen Netzes nebencharakteristischer Grundkurven. Der Schlüssel hierfür sind gewisse "*Metrikfunktionen*", die in einfacher Weise mit

² Die Schallgrenze ist als ein natürlicher gemeinsamer Randteil von der Gesamtberandung des Unterschallbereiches wie der des Überschallbereiches aufzufassen.

³ Vgl. etwa [27, Kp. I, §7, 4].

⁴ Vgl. hierzu Abschnitt 6.

den (von den Grundlagen der Differentialgeometrie her) geläufigen metrischen Fundamentalgrößen erster Ordnung zusammenhängen und aus denen sich die *Ortskoordinaten* selbst durch bloße *Quadraturen* gewinnen laßen. Die Differentialgleichungen für diese Metrikfunktionen werden im nächsten Abschnitt aufgestellt; im vorliegenden Abschnitt geben wir vorerst für die Netzkurven eine Reihe von differentialgeometrischen Beziehungen an, die teils für die Gewinnung dieser Gleichungen benötigt werden, teils für die Anwendung unserer Methode von Wichtigkeit sind.

Wir betrachten zunächst wiederum den *Überschallbereich* und die *hauptcharakteristischen* Grundkurven. Wegen der geforderten Eineindeutigkeit zwischen Strömungsebene und Ebene der charakteristischen Koordinaten darf die Funktionaldeterminante oder ihre Reziproke nicht identisch verschwinden. Ihr Wert ist unter Heranziehung von (2.10):

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \lambda\mu \sin 2\alpha \neq 0. \quad (5.1)$$

Mit (5.1) hat man

$$x_\xi = \frac{\cos(\vartheta + \alpha)}{\lambda \sin 2\alpha}, \quad x_\eta = -\frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{\mu \sin 2\alpha}, \quad (5.2a, b)$$

$$y_\xi = \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{\lambda \sin 2\alpha}, \quad y_\eta = -\frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\mu \sin 2\alpha}; \quad (5.3a, b)$$

und hieraus ergeben sich die metrischen Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} K_1 = x_\xi^2 + y_\xi^2 &= \frac{1}{\lambda^2 \sin^2 2\alpha}, & M_1 = x_\eta^2 + y_\eta^2 &= \frac{1}{\mu^2 \sin^2 2\alpha}, \\ \Lambda_1 = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta &= -\frac{\cos 2\alpha}{\lambda\mu \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{K_1 M_1} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (5.4)$$

(Die letzte Gleichung drückt den geläufigen Sachverhalt aus, daß zwei Machsche Linien verschiedener Scharen miteinander den Winkel 2α bilden.).

Aus (5.4) folgt

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{K_1} \sin 2\alpha}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{M_1} \sin 2\alpha}. \quad (5.5a, b)$$

Gehen wir nun zu den *nebencharakteristischen* Grundkurven über, so erweist es sich als zweckmäßig, anstelle von K_1 und M_1 die beiden "*charakteristischen Metrikfunktionen*" durch

$$\Xi = (\sqrt{K_1} + \sqrt{M_1}) \sin \alpha, \quad (5.6a)$$

$$H = (\sqrt{K_1} - \sqrt{M_1}) \cos \alpha \quad (5.6b)$$

einzuführen.

Mit (5.6) ergibt sich wegen (2.16) aus (5.2)

$$x_\sigma = -\sin\vartheta \Xi + \cos\vartheta H, \quad x_\tau = \cos\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \Xi - \sin\vartheta \operatorname{tg}\alpha H, \quad (5.7a, b)$$

und aus (5.3)

$$y_\sigma = \cos\vartheta \Xi + \sin\vartheta H, \quad y_\tau = \sin\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \Xi + \cos\vartheta \operatorname{tg}\alpha H. \quad (5.8a, b)$$

Die Funktionaldeterminante bekommt mit (5.7) und (5.8) den Wert

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\sigma, \tau)} = -\operatorname{ctg}\alpha \Xi^2 + \operatorname{tg}\alpha H^2 \neq 0. \quad (5.9)$$

Für die Neigungswinkel Σ und T der Nebencharakteristiken $\sigma(x, y) = \text{const.}$ bzw. $\tau(x, y) = \text{const.}$ gegen die $+x$ -Achse im Ortsplan erhält man mit (5.7) und (5.8):

$$\operatorname{tg}\Sigma = -\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{y_\tau}{x_\tau} = \frac{\sin\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \Xi + \cos\vartheta \operatorname{tg}\alpha H}{\cos\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \Xi - \sin\vartheta \operatorname{tg}\alpha H} \quad (5.10a)$$

bzw.

$$\operatorname{tg}T = -\frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{y_\sigma}{x_\sigma} = \frac{\cos\vartheta \Xi + \sin\vartheta H}{-\sin\vartheta \Xi + \cos\vartheta H}, \quad (5.10b)$$

und für die metrischen Fundamentalgrößen:

$$K_2 = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 = \Xi^2 + H^2, \quad M_2 = x_\tau^2 + y_\tau^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha \Xi^2 + \operatorname{tg}^2\alpha H^2, \quad (5.11)$$

$$\Lambda_2 = x_\sigma x_\tau + y_\sigma y_\tau = 2 \frac{\Xi H}{\sin 2\alpha},$$

woraus sich für den Schnittwinkel β von nicht der gleichen Schar angehörenden Nebencharakteristiken

$$\cos\beta = \frac{\Lambda_2}{\sqrt{K_2 M_2}} = \frac{2\Xi H}{\sin 2\alpha \sqrt{(\Xi^2 + H^2)(\operatorname{ctg}^2\alpha \Xi^2 + \operatorname{tg}^2\alpha H^2)}} \quad (5.12)$$

ergibt.

Der Vergleich von (5.10) mit (2.11) wie der durch (5.12) gegebene Wert für den Schnittwinkel läßt den gerade für die *praktische* Berechnung bedeutsamen Unterschied zwischen Haupt- und Nebencharakteristiken deutlich werden. Während bei den Hauptcharakteristiken Neigungswinkel ($\vartheta - \alpha$ bzw. $\vartheta + \alpha$) und Schnittwinkel 2α nicht explizit von den Metrikfunktionen abhängig sind, treten bei den Nebencharakteristiken jeweils beide Metrikfunktionen explizit auf, so daß also die Richtungen beider Kurvenscharen durch die Metrik des ganzen Netzes miteinander gekoppelt sind. Die Bindung der beiden Scharen von Nebencharakteristiken erscheint "enger" als die der beiden Scharen von Hauptcharakteristiken.

Für den *Unterschallbereich* laßen sich die entsprechenden Ausdrücke auf Grund unserer Übertragungsanalogie $\sigma \approx s$, $\tau \approx it$; $\sin \alpha \approx 1/\sin A$, $\cos \alpha \approx i \operatorname{ctg} A$ nun sofort hinschreiben. Dabei seien die Metrikfunktionen, da sie im Unterschallbereich anderen Differentialgleichungen als im Überschallbereich genügen werden, zur Unterscheidung mit $X(s, t)$ bzw. $Y(s, t)$ bezeichnet; wir haben also außerdem $\Xi \approx X$, $H \approx Y$ zu setzen.

Man hat dann anstatt (5.7), (5.8):

$$x_s = -\sin \vartheta X + \cos \vartheta Y, \quad -x_t = \cos \vartheta \cos A X + \frac{\sin \vartheta}{\cos A} Y, \quad (5.13a, b)$$

$$y_s = \cos \vartheta X + \sin \vartheta Y, \quad -y_t = \sin \vartheta \cos A X - \frac{\cos \vartheta}{\cos A} Y; \quad (5.14a, b)$$

für die Funktionaldeterminante anstatt (5.9):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \cos A X^2 + \frac{Y^2}{\cos A} \neq 0; \quad (5.15)$$

für die Neigungswinkel S und T der Nebencharakteristiken $s(x, y) = \text{const.}$ bzw. $t(x, y) = \text{const.}$ gegen die $+x$ -Achse anstatt (5.10):

$$\operatorname{tg} S = -\frac{s_x}{s_y} = \frac{\sin \vartheta \cos A X - \cos \vartheta \frac{Y}{\cos A}}{\cos \vartheta \cos A X + \sin \vartheta \frac{Y}{\cos A}} \quad (5.16a)$$

bzw.

$$\operatorname{tg} T = -\frac{t_x}{t_y} = \frac{\cos \vartheta X + \sin \vartheta Y}{-\sin \vartheta X + \cos \vartheta Y}; \quad (5.16b)$$

für die metrischen Fundamentalgrößen anstatt (5.11):

$$K = x_s^2 + y_s^2 = X^2 + Y^2, \quad M = x_t^2 + y_t^2 = \cos^2 A X^2 + \frac{Y^2}{\cos^2 A}, \quad (5.17)$$

$$L = x_s x_t + y_s y_t = \frac{\sin^2 A}{\cos A} XY,$$

und daher für den Schnittwinkel B der Nebencharakteristiken anstatt (5.12):

$$\cos B = \frac{L}{\sqrt{KM}} = \frac{\sin^2 A XY}{\sqrt{(X^2 + Y^2)(\cos^4 A X^2 + Y^2)}}. \quad (5.18)$$

6. Die Differentialgleichungen für die Metrikfunktionen (Integrabilitätsbedingungen). Da die charakteristischen Koordinaten echte krummlinige Koordinaten sein sollen, sind die Gleichungspaare (5.7) sowie (5.8) bzw. (5.13) sowie (5.14)

nur dann miteinander verträglich, wenn für sie die *Integrabilitätsbedingungen* erfüllt sind. Diese lauten etwa für (5.7) und (5.8):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} x_\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma} x_\tau, \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} y_\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma} y_\tau \quad (6.1b)$$

und liefern uns je zwei Bestimmungsgleichungen für die bislang noch unbestimmten Metrikfunktionen Ξ und H im *Überschallbereich* bzw. für X und Y im *Unterschallbereich* zur Festlegung des Koordinatennetzes.

Die Gleichungen (6.1a) und (6.1b) lauten ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} x_{\sigma\tau} &= -\sin\vartheta \Xi_\tau - \cos\vartheta \vartheta_\tau \Xi + \cos\vartheta H_\tau - \sin\vartheta \vartheta_\tau H \\ &= \cos\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \Xi_\sigma - \left(\sin\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \vartheta_\sigma + \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\alpha} \frac{d\alpha}{d\nu} \nu_\sigma \right) \Xi \\ &\quad - \sin\vartheta \operatorname{tg}\alpha H_\sigma - \left(\cos\vartheta \operatorname{tg}\alpha \vartheta_\sigma + \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\alpha} \frac{d\alpha}{d\nu} \nu_\sigma \right) H, \end{aligned} \quad (6.2a)$$

$$\begin{aligned} y_{\sigma\tau} &= \cos\vartheta \Xi_\tau - \sin\vartheta \vartheta_\tau \Xi + \sin\vartheta H_\tau + \cos\vartheta \vartheta_\tau H \\ &= \sin\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \Xi_\sigma + \left(\cos\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \vartheta_\sigma - \frac{\sin\vartheta}{\sin^2\alpha} \frac{d\alpha}{d\nu} \nu_\sigma \right) \Xi \\ &\quad + \cos\vartheta \operatorname{tg}\alpha H_\sigma - \left(\sin\vartheta \operatorname{tg}\alpha \vartheta_\sigma - \frac{\cos\vartheta}{\cos^2\alpha} \frac{d\alpha}{d\nu} \nu_\sigma \right) H, \end{aligned} \quad (6.2b)$$

wobei auf Grund der differenzierten Beziehung (3.2):

$$\frac{d\alpha}{d\nu} = -\frac{\kappa - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = 1 - \frac{\kappa + 1}{2 \cos^2 \alpha} \quad (6.3)$$

ist. Ersetzt man nun in (6.2) mittels der charakteristischen Hodographengleichungen (3.4) ϑ_τ und ϑ_σ durch ν_σ bzw. ν_τ und kombiniert beide Gleichungen, indem man einmal (6.2a) mit $\cos\vartheta$, (6.2b) mit $\sin\vartheta$ multipliziert und zum anderen (6.2a) mit $-\sin\vartheta$ und (6.2b) mit $\cos\vartheta$ und dann jedesmal addiert, so lassen sich jeweils zwei Ableitungen der abhängigen Veränderlichen eliminieren. Nach kurzer Umrechnung erhält man

$$\Xi_\sigma - \operatorname{tg}\alpha \cdot H_\tau + \frac{\kappa + 1 - 2 \cos^4 \alpha}{2 \sin \alpha \cos^3 \alpha} \nu_\sigma \cdot \Xi - \operatorname{tg}^2 \alpha \nu_\tau \cdot H = 0, \quad (6.4a)$$

Überschallbereich

$$\Xi_\tau - \operatorname{tg}\alpha \cdot H_\sigma - \operatorname{ctg}\alpha \nu_\tau \cdot \Xi + \frac{\kappa + 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2 \cos^4 \alpha} \nu_\sigma \cdot H = 0. \quad (6.4b)$$

Die analoge Rechnung zur Gewinnung der Differentialgleichungen für X und Y können wir uns ersparen, da sie auf Grund der Übertragungsanalogie ($\sigma \approx s$, $\tau \approx it$; $\nu \approx iN$; $\sin \alpha \approx 1/\sin A$, $\cos \alpha \approx i \operatorname{ctg} A$; $\Xi \approx X$, $H \approx Y$) unmittelbar aus (6.4) folgen:

$$X_s + \frac{1}{\cos A} \cdot Y_t + \frac{2 \cos^4 A - (\kappa + 1) \sin^4 A}{2 \cos^3 A} N_s \cdot X + \frac{N_t}{\cos^2 A} \cdot Y = 0, \quad (6.5a)$$

Unterschallbereich

$$X_t - \frac{1}{\cos A} \cdot Y_s + \cos A N_t \cdot X - \frac{2 \cos^2 A + (\kappa + 1) \sin^4 A}{2 \cos^4 A} N_s \cdot Y = 0. \quad (6.5b)$$

Führt man anstatt Ξ , H :

$$\bar{\Xi} = \frac{\Xi}{\sin \alpha}, \quad H = \frac{H}{\cos \alpha} \quad (6.6a)$$

bzw. anstatt X , Y :

$$\bar{X} = X \sin A, \quad \bar{Y} = Y \operatorname{tg} A \quad (6.6b)$$

ein, so erhalten die Gleichungspaare (6.4) bzw. (6.5) die einfachere Form

$$\bar{\Xi}_\sigma - \bar{H}_\tau + \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} \{ \nu_\sigma \cdot \bar{\Xi} - \nu_\tau \cdot \bar{H} \} = 0, \quad (6.7a)$$

Überschallbereich

$$\bar{\Xi}_\tau - \bar{H}_\sigma - \frac{\kappa + 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \{ \nu_\tau \cdot \bar{\Xi} - \nu_\sigma \cdot \bar{H} \} = 0 \quad (6.7b)$$

bzw.

$$\bar{X}_s + \bar{Y}_t - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \{ N_s \cdot \bar{X} + N_t \cdot \bar{Y} \} = 0, \quad (6.8a)$$

Unterschallbereich

$$\bar{X}_t - \bar{Y}_s - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\sin^2 A}{\cos A} \{ N_t \cdot \bar{X} - N_s \cdot \bar{Y} \} = 0. \quad (6.8b)$$

Jedoch erweist es sich in gewissen Fällen¹ als zweckmäßiger, die zuerst eingeführten ungestrichenen Funktionen heranzuziehen.

Das Gleichungssystem (6.4) oder (6.7) ist von hyperbolischem, das Gleichungssystem (6.5) oder (6.8) hingegen von elliptischem Typus. Im allgemeinen sind diese Gleichungssysteme aber nicht äquivalent je einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine abhängige Veränderliche allein².

¹ Vgl. unten sowie auch Abschnitt 8.

² Vgl. hierzu etwa [27, Kp. I Anhang, §3].

Die Differentialgleichungen für die Metrikfunktionen sind zwar *linear*, jedoch —wie nicht anders zu erwarten— mit dem charakteristischen Hodographengleichungspaar gekoppelt, indem in die Koeffizientenfunktionen über α und ν bzw. A und N gemäß (3.12b) bzw. (3.13b) deren Lösung eingeht. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß der eigentümliche Typuswechsel der Differentialgleichungen beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit auch für die Metrikfunktionen statt hat.

Für hinreichend *kleine* Strömungsgeschwindigkeiten $v \ll a$, bei denen der Kompressibilitätseinfluß praktisch nicht ins Gewicht fällt, bringt offenbar die Verwendung der gestrichenen Funktionen Vorteil, da dann (6.8) angenähert in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen übergeht. Die entsprechende Vereinfachung hat man auch bei sehr großen Überschallgeschwindigkeiten, was indeßen für die Anwendungen weniger von Bedeutung sein wird.

Es erhebt sich natürlich nun die Frage, in welcher Weise die Metrikfunktionen des Unterschallbereiches an die des Überschallbereiches längs der gemeinsamen Trennungslinie (Schallgrenze) anzuschließen sind. Wir setzen wie in Abschnitt 4 voraus, daß das Strömungsfeld eine nicht unterbrochene Schallgrenze $t = \tau = 0$ besitzen möge, die durch $x(\sigma, 0) = x(\sigma)$, $y(\sigma, 0) = y(\sigma)$ mit $\sigma \equiv s$ in Parameterform dargestellt wird und eine Kurve mit stetiger Tangente sei. Längs der Schallgrenze sollen die ursprünglichen ungestrichenen Metrikfunktionen, die man hier zweckmäßigerweise heranzieht, die Werte X^* , Y^* bzw. Ξ^* , H^* annehmen. Dann gelten—abgesehen von Ausnahmepunkten (das sind Endpunkte der unter Umständen aus mehreren Teilen bestehenden Schallgrenze)—, da der Stromlinienwinkel ϑ^* an der Schallgrenze stetig sein muß, die aus (5.7a), (5.8a) und (5.13a), (5.14a) resultierenden Identitäten

$$\frac{dx}{d\sigma} = x_\sigma = -\sin\vartheta^* \Xi^* + \cos\vartheta^* H^* \equiv \frac{dx}{ds} = x_s = -\sin\vartheta^* X^* + \cos\vartheta^* Y^*,$$

$$\frac{dy}{d\sigma} = y_\sigma = \cos\vartheta^* \Xi^* + \sin\vartheta^* H^* \equiv \frac{dy}{ds} = y_s = \cos\vartheta^* X^* + \sin\vartheta^* Y^*,$$

aus denen unmittelbar die *Anschlußbedingungen*

$$\Xi^* = X^*, \tag{6.9a}$$

$$H^* = Y^* \tag{6.9b}$$

folgen.

Denkt man sich schließlich die aus (6.4) bzw. (6.5) ermittelten Metrikfunktionen $\Xi(\sigma, \tau)$, $H(\sigma, \tau)$ bzw. $X(s, t)$, $Y(s, t)$ in die Ausdrücke (5.7), (5.8) bzw. (5.13), (5.14) für x_σ , x_τ ; y_σ , y_τ bzw. x_s , x_t ; y_s , y_t eingesetzt, so erhält man durch Integration die *Ortskoordinaten* in Abhängigkeit von den nebencharakteristischen Variablen in folgender, geläufigen Integraldarstellung bis auf eine additive Konstante:

$$\begin{aligned}
 x(\sigma, \tau) &= \int_{\sigma_0, \tau_0}^{\sigma, \tau} [x_\sigma(\sigma', \tau') d\sigma' + x_\tau(\sigma', \tau') d\tau'] \\
 &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} x_\sigma(\sigma', \tau_0) d\sigma' + \int_{\tau_0}^{\tau} x_\tau(\sigma, \tau') d\tau',
 \end{aligned} \tag{6.10a}$$

$$y(\sigma, \tau) = \dots = \int_{\sigma_0}^{\sigma} y_\sigma(\sigma', \tau_0) d\sigma' + \int_{\tau_0}^{\tau} y_\tau(\sigma, \tau') d\tau' \quad (\sigma_0, \tau_0 \text{ Festwerte}) \tag{6.10b}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 x(s, t) &= \int_{s_0, t_0}^{s, t} [x_s(s', t') ds' + x_t(s', t') dt'] \\
 &= \int_{s_0}^s x_s(s', t_0) ds' + \int_{t_0}^t x_t(s, t') dt',
 \end{aligned} \tag{6.11a}$$

$$y(s, t) = \dots = \int_{s_0}^s y_s(s', t_0) ds' + \int_{t_0}^t y_t(s, t') dt' \quad (s_0, t_0 \text{ Festwerte}). \tag{6.11b}$$

ZUSAMMENFASSUNG:

Damit ist das eingangs aufgestellte Programm, die Geschwindigkeits- und Ortskoordinaten einer reibungs- und drehungsfreien ebenen Gasströmung als *eindeutige* Funktionen angepaßter unabhängiger Variablen³ darzustellen, jedenfalls grundsätzlich durchgeführt. Bezogen auf diese "nebencharakteristischen" Variablen genügen geeignete polare Geschwindigkeitskoordinaten einfachsten Differentialgleichungen, nämlich der Laplaceschen Differentialgleichung im Unterschallbereich und der Saitenschwingungsgleichung im Überschallbereich. Zur Ermittlung der Ortskoordinaten sind für beide Geschwindigkeitsbereiche je ein lineares Differentialgleichungspaar zu lösen, dessen Koeffizientenfunktionen jedoch von der Lösung der oben genannten Differentialgleichungen (Hodographengleichungen) abhängen, und sodann sind je zwei Quadraturen auszuführen.

Nicht zur Sprache kommen soll in dieser nur grundlegenden Untersuchung, in welcher Weise sich die Einbeziehung von Randbedingungen in der dargelegten Methode gestaltet, oder aber das tiefliegende und sehr schwierige Problem der Existenz und Eindeutigkeit allgemeiner Strömungsfelder vom gemischten Typus.

7. Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion. Die Art der Herleitung des zur Rechnung benötigten Formelsystems hat es mit sich gebracht, daß das *Geschwindigkeitspotential* Φ und die *Stromfunktion* Ψ , die sonst gewöhnlich an die Spitze einschlägiger Untersuchungen gestellt werden, als methodisch durchaus entbehrlich hier bisher überhaupt nicht aufgetreten sind. Zur Vervollständigung unseres Formelmateri als sowie im Hinblick auf die Anwendung

³ Daß hingegen umgekehrt diese Variablen im allgemeinen keine eindeutigen Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten sind, ist dabei belanglos.

unserer Methode wollen wir nun aber noch den Zusammenhang mit diesen wichtigen Strömungsgrößen herstellen.

Bekanntlich werden Φ und Ψ eingeführt zur Befriedigung des Gleichungspaares (2.2):

$$v \cos \vartheta = \Phi_x = \frac{1}{\rho} \Psi_y, \quad (7.1a)$$

$$v \sin \vartheta = \Phi_y = -\frac{1}{\rho} \Psi_x. \quad (7.1b)$$

Aus

$$\Phi_x = \Phi_\xi \xi_x + \Phi_\eta \eta_x = \frac{1}{\rho} \Psi_y = \frac{1}{\rho} \{\Psi_\xi \xi_y + \Psi_\eta \eta_y\},$$

$$\Phi_y = \Phi_\xi \xi_y + \Phi_\eta \eta_y = -\frac{1}{\rho} \Psi_x = -\frac{1}{\rho} \{\Psi_\xi \xi_x + \Psi_\eta \eta_x\}$$

folgt mit (7.1), (2.10), (5.1), (5.5)

$$\Phi_\xi = \sqrt{K_1} v \cos \alpha, \quad \Phi_\eta = -\sqrt{M_1} v \cos \alpha; \quad (7.2a, b)$$

$$\Psi_\xi = \sqrt{K_1} \rho v \sin \alpha, \quad \Psi_\eta = \sqrt{M_1} \rho v \sin \alpha. \quad (7.3a, b)$$

Nimmt man die nebencharakteristischen Grundkurven als Bezugssystem, so ergibt sich wegen (5.6) und (6.6) aus (7.2) für den *Überschallbereich*:

$$\Phi_\sigma = H v = \bar{H} v \cos \alpha, \quad \Phi_\tau = \Xi v \operatorname{ctg} \alpha = \bar{\Xi} v \cos \alpha \quad (7.4a, b)$$

bzw. aus (7.3):

$$\Psi_\sigma = \Xi \rho v = \bar{\Xi} \rho v \sin \alpha, \quad \Psi_\tau = H \rho v \operatorname{tg} \alpha = \bar{H} \rho v \sin \alpha. \quad (7.5a, b)$$

Unsere Übertragungsanalogie ($\sigma \approx s$, $\tau \approx it$; $\cos \alpha \approx i \operatorname{ctg} \Lambda$, $\sin \alpha \approx 1/\sin \Lambda$; $\Xi \approx X$, $H \approx Y$) angewandt auf (7.4) und (7.5) liefert für den *Unterschallbereich*:

$$\Phi_s = Y v = \bar{Y} v \operatorname{ctg} \Lambda, \quad \Phi_t = -X v \cos \Lambda = -\bar{X} v \operatorname{ctg} \Lambda \quad (7.6a, b)$$

bzw.

$$\Psi_s = X \rho v = \bar{X} \frac{\rho v}{\sin \Lambda}, \quad \Psi_t = Y \frac{\rho v}{\cos \Lambda} = \bar{Y} \frac{\rho v}{\sin \Lambda}. \quad (7.7a, b)$$

Φ und Ψ selbst bekommt man hieraus durch Quadraturen entsprechend den Integralformeln (6.10) bzw. (6.11).

Es sei darauf hingewiesen, daß die für die vier obigen Gleichungspaare (7.4) bis (7.7) notwendigen Verträglichkeitsbedingungen nichts anderes sind als die

zwei Paare von Integrabilitätsbedingungen aus dem vorigen Abschnitt. So fordert z.B. die Verträglichkeit von (7.4):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{H} v \cos \alpha) = \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{\Xi} v \cos \alpha),$$

was wegen $dv/d\nu = v \operatorname{tg} \alpha$ und (6.3):

$$\begin{aligned} v \left[\bar{H}_\tau \cos \alpha + \bar{H} \sin \alpha \nu_\tau - \bar{H} \sin \alpha \left(1 - \frac{\kappa + 1}{2 \cos^2 \alpha} \right) \nu_\tau \right] \\ = v \left[\bar{\Xi}_\sigma \cos \alpha + \bar{\Xi} \sin \alpha \nu_\sigma - \bar{\Xi} \sin \alpha \left(1 - \frac{\kappa + 1}{2 \cos^2 \alpha} \right) \nu_\sigma \right] \end{aligned}$$

ergibt in Übereinstimmung mit (6.7a), während z.B. die Verträglichkeit von (7.7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{X} \frac{\rho v}{\sin A} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\bar{Y} \frac{\rho v}{\sin A} \right)$$

fordert, was wegen $dv/dN = v/\cos A$ und

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v}{a^2}, \quad (7.8)^1$$

$$\frac{dA}{dN} = \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{tg}^2 A \right) \sin A \quad (7.9)^1$$

auf

$$\begin{aligned} \rho v \left[\bar{X}_t \frac{1}{\sin A} - \bar{X} \operatorname{tg} A N_t + \bar{X} \frac{N_t}{\sin A \cos A} - \bar{X} \operatorname{ctg} A \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{tg}^2 A \right) N_t \right] \\ = \rho v \left[\bar{Y}_s \frac{1}{\sin A} - \bar{Y} \operatorname{tg} A N_s + \bar{Y} \frac{N_s}{\sin A \cos A} - \bar{Y} \operatorname{ctg} A \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{tg}^2 A \right) N_s \right] \end{aligned}$$

führt in Übereinstimmung mit (6.8b).

8. Spezialfall der schlichten Strömungsfelder (Tschapliginsche Methode).

Als Abschluß wollen wir noch die Anwendung unserer Methode auf den rechnerisch einfachsten Fall von gemischten regulären Strömungsfeldern bringen, bei dem sich die strenge Lösung explizit angeben läßt. Es handelt sich dabei um die Klasse der bereits von Tschapligin [11] gefundenen Partikularlösungen, die unter anderem Unterschallströmungen mit eingebettetem Überschallbereich längs Halbkörpern entsprechen und einen ausgearteten Fall darstellen.

¹ Dies folgt durch Differentiation im ersten Falle aus (2.3), im zweiten Falle aus (3.7).

Offenbar lautet der einfachste Ansatz zur Befriedigung der charakteristischen Hodographengleichungen (3.4) bzw. (3.8)

$$\vartheta = \sigma, \quad \nu = \tau \quad (8.1a, b)$$

bzw.

$$\vartheta = s, \quad N = t \quad (8.2a, b)$$

wobei also $f(\sigma) \equiv F(\sigma) \equiv \sigma$ ist [vgl. (4.1), (4.2) und (4.3)*]. In diesem Spezialfall sind unsere Geschwindigkeitskoordinaten ϑ und ν bzw. N mit den (dimensionslosen) nebencharakteristischen Koordinaten identisch, und wir haben es somit mit Strömungsfeldern zu tun, deren Ortskoordinaten durchweg *eindeutige* Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten sind, was ja im allgemeinen nicht eintritt. Wir wollen daher von „*schlichten*“ *Strömungsfeldern* sprechen. Für sie fällt naturgemäß die Tschapliginsche Hodographenmethode mit unserer Charakteristikenmethode zusammen.

Der einfache Ansatz (8.1) bzw. (8.2) reduziert (besonders wegen $\nu_\sigma = N_s = 0$) das Differentialgleichungssystem für die Metrikfunktionen entscheidend, weil σ und τ bzw. s und t *nicht explizit* auftreten. Daher ist es angebracht, die Metrikfunktionen—wir arbeiten hier zweckmäßig mit den ursprünglichen Größen—in Abhängigkeit von ν und ϑ anstatt von den nebencharakteristischen Variablen zu betrachten. Aus (6.4) erhält man wegen $dv/d\nu = v \operatorname{tg} \alpha$ und, wenn man noch $\operatorname{ctg}^2 \alpha$ durch ν ausdrückt: $\operatorname{ctg}^2 \alpha = (\nu^2 - a^2)/a^2$,

$$\frac{\nu^2 - a^2}{a^2} \Xi_\vartheta - \nu H_\nu - H = 0, \quad (8.3a)$$

$$\nu \Xi_\nu - H_\vartheta - \frac{\nu^2 - a^2}{a^2} \Xi = 0. \quad (8.3b)$$

Das Gleichungspaar (8.3) läßt seine universelle Gültigkeit für das gesamte Feld erkennen, so daß sich hier eine gesonderte Einführung von Metrikfunktionen für den Unterschallbereich (X, Y) also erübrigt.

Entsprechend dem Vorgehen von Tschapligin suchen wir durch einen Produktansatz Partikularlösungen für die Metrikfunktionen zu gewinnen:

$$\Xi = \Theta_1(\vartheta) \cdot V_1(\nu), \quad H = \Theta_2(\vartheta) \cdot V_2(\nu). \quad (8.4a, b)$$

Für das Folgende denken wir uns ν mittels einer Bezugsgeschwindigkeit, etwa mittels V_m , dimensionslos gemacht.

Einsetzen von (8.4) in (8.3) ergibt nach Trennung der beiden Funktionen mit zwei reellen, nicht verschwindenden Konstanten k_1 und k_2 :

$$\frac{\Theta'_1}{\Theta_2} = \frac{a^2}{\nu^2 - a^2} \left\{ \nu \frac{V'_2}{V_1} + \frac{V_2}{V_1} \right\} = k_1, \quad (8.5a)$$

$$\frac{\Theta_2'}{\Theta_1} = v \frac{V_1'}{V_2} - \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) \frac{V_1}{V_2} = k_2, \quad (8.5b)$$

wobei hier und später die Striche Differentiation nach der betreffenden Variablen bedeuten.

Hieraus folgt zunächst

$$\Theta_1'' = k_1 \Theta_2' = k_1 k_2 \Theta_1, \quad (8.6)$$

und nun entweder mit $k_1 k_2 = -k^2$ (k reell)

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sin k\vartheta \\ \Theta_2 = \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}} \cos k\vartheta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \Theta_1 = \cos k\vartheta \\ \Theta_2 = \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}} \sin k\vartheta, \end{cases} \quad (8.7a, b)$$

oder mit $k_1 k_2 = +k^2$

$$\begin{cases} \Theta_1 = \mathfrak{S} \sin k\vartheta \\ \Theta_2 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \mathfrak{C} \sin k\vartheta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \Theta_1 = \mathfrak{C} \sin k\vartheta \\ \Theta_2 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \mathfrak{S} \sin k\vartheta \end{cases} \quad (8.8a, b)$$

Außerdem hat man

$$v V_2' + V_2 - k_1 \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) V_1 = 0, \quad (8.9a)$$

$$v V_1' - \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) V_1 - k_2 V_2 = 0. \quad (8.9b)$$

Beachtet man, daß mit Benutzung von (7.8)

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{\rho_0}{\rho v} \right) = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{v^2 - a^2}{v^2 a^2} \quad (8.10)$$

ist, so erkennt man unschwer, daß (8.9b) durch den Ansatz

$$V_1 = \frac{k_2 \rho_0}{\rho v} P(v), \quad V_2 = \frac{\rho_0}{\rho} P(v)' \quad (8.11a, b)$$

befriedigt wird. Die Bestimmungsleichung für $P(v)$ folgt aus (8.9a):

$$v^2(1 - v^2)P'' + v \left(1 + \frac{3 - \kappa}{\kappa - 1} v^2 \right) P' \mp k^2 \left(1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} v^2 \right) P = 0. \quad (8.12)$$

Dabei gilt vor k^2 das Minus- oder das Pluszeichen, je nachdem ob k_1 und k_2 mit ungleichem oder gleichem Vorzeichen gewählt werden.

Setzt man für $k_1 k_2 < 0$ in (8.12)

$$P(v) = v^k H_k(w), \quad (8.13)$$

so genügt H als Funktion von $w = v^2$ der *hypergeometrischen Differentialgleichung*

$$w(1-w) \frac{d^2 H_k}{dw^2} + \left\{ (k+1) - \left(k - \frac{2-\kappa}{\kappa-1} \right) w \right\} \frac{dH_k}{dw} + \frac{k(k+1)}{2(\kappa-1)} H_k = 0, \quad (8.14)$$

die sich nach kurzer Zwischenrechnung ergibt.

Im anderen Fall: $k_1 k_2 > 0$, der spirale Strömungen darstellt und weniger von Interesse ist, erzielt man dieselbe Zurückführung auf hypergeometrische Funktionen durch formalen Übergang ins Komplexe mittels der Substitution $P(v) = v^{il} H_l(w)$ ($l = -ik$).

Damit sind die Metrikfunktionen bestimmt. Einsetzen von (8.7) und (8.11) mit (8.13) in (8.4) liefert für das *gesamte Feld*

$$\Xi = k \frac{\rho_0}{\rho} v^{k-1} H_k(w) \cdot \begin{cases} -\sin k\vartheta \\ \cos k\vartheta \end{cases}. \quad (8.15a)$$

$$(w = v^2)$$

$$H = \frac{\rho_0}{\rho} [k v^{k-1} H_k(w) + 2v^{k+1} H'_k(w)] \cdot \begin{cases} \cos k\vartheta \\ \sin k\vartheta \end{cases} \quad (8.15b)$$

(Der Faktor $\sqrt{-k_2/k_1}$ von H ist dabei dem Faktor k_2 von Ξ hinzugeschlagen worden.).

Mit (8.15) bekommt man für die dimensionslose *Stromfunktion* den Ausdruck

$$\Psi = v^k H_k(w) \cdot \begin{cases} \cos k\vartheta \\ \sin k\vartheta \end{cases}, \quad (8.16)$$

dessen Richtigkeit leicht an Hand von (7.5) oder (7.7) zu bestätigen ist. Damit ist der Anschluß an die Ergebnisse von Tschaplin [11] hergestellt, welche dieser aus seiner Differentialgleichung für die Stromfunktion gewonnen hatte.

Um nun noch die *Ortskoordinaten* zu erhalten, hat man (5.7) und (5.8) mit (8.15) als Integranden in (6.10a) bzw. (6.10b) einzuführen. Wie bereits eingangs angemerkt, bekommt man explizit angebbare und sogar verhältnismäßig einfache Ausdrücke. Die Rechnung, die wir hier unterdrücken, da die Probe leicht durch Differenzieren und Vergleich mit (5.7) bzw. (5.8) zu machen ist, liefert für die auf die Längeneinheit bezogenen¹ Ortskoordinaten, wobei wir das Lösungspaar (8.7a) verwenden, falls $k^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned} x - x_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \left\{ \frac{v^{k+1}}{k+1} H'_k(w) \sin(k+1)\vartheta \right. \\ \left. + \frac{v^{k-1}}{k-1} (kH_k(w) + wH'_k(w)) \cdot \sin(k-1)\vartheta \right\}, \end{aligned} \quad (8.17a)$$

¹ Daß wir die Ortskoordinaten dimensionslos erhalten, liegt an dem dimensionslosen Ansatz (8.1) für die nebencharakteristischen Koordinaten.

$$y - y_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \left\{ -\frac{v^{k+1}}{k+1} H'_k(w) \cdot \cos(k+1)\vartheta + \frac{v^{k-1}}{k-1} (kH_k(w) + wH'_k(w)) \cdot \cos(k-1)\vartheta \right\}; \quad (8.17b)$$

und falls $k = 1$:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho} \{ wH'_1(w) \cdot \sin 2\vartheta + 2(H_1(w) + wH'_1(w)) \cdot \vartheta \}, \quad (8.17a^*)$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho} \{ -wH'_1(w) \cdot \cos 2\vartheta + I(w) \}$$

mit

(8.17b*)

$$I(w) = \int^w \frac{\rho_0}{\rho} \left\{ \frac{\kappa - 1 - \kappa w}{(\kappa - 1)w(1 - w)} H_1(w) + H'_1(w) \right\} dw$$

(x_0, y_0 Integrationskonstanten).

Für $k = -1$ ist $H = \text{const.}$ eine Fundamentallösung von (8.14), wie man unmittelbar erkennt.

Die Formeln (8.17) finden sich bereits bei F. Ringleb [13]; wir haben ihnen allerdings hier eine andere und teilweise einfachere Form gegeben.

Zieht man den durch (8.16) längs einer Stromlinie $\Psi = \text{const.}$ gegebenen Zusammenhang zwischen v und ϑ heran, so bedeutet (8.17) eine Parameterdarstellung für die betreffende Stromlinie.

Eine nähere Diskussion der Lösung (8.15) erübrigt sich an dieser Stelle, da bereits mehrere Arbeiten über die Tschapliginsche Methode, z.B. [16] und [30], vorliegen, die sich eingehend mit den Eigenschaften unserer hypergeometrischen Differentialgleichung und der Tschapliginschen Partikularlösungen beschäftigen.

Für das rechnerisch einfachste Beispiel ($k = -1$) einer gemischten Unterschall-Überschallströmung längs eines Halbkörpers, das auch von F. Ringleb konstruiert wurde, soll schließlich noch Figur 4 den Unterschied zwischen dem Hauptcharakteristikennetz (links), das ja nur im Überschallbereich existiert, und dem Netz der Nebencharakteristiken (rechte Bildhälfte) auch anschaulich zeigen. Die Kurven $\tau = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ fallen hier mit den Isotachen (gestrichelt) zusammen, dabei ist die Schallgrenze $t = \tau = 0$ strichpunktiert gezeichnet. Weshalb in der Figur die Netzkurven durch Streckenzüge approximiert sind, ist im Rahmen der hier angestrebten Erörterungen von nebensächlichem Interesse: Im Hinblick auf weniger einfache Anwendungsbeispiele, bei denen sich die Differentialgleichungen der Metrikfunktionen nicht mehr streng lösen lassen, waren diese probeweise durch endliche Differenzengleichungen ersetzt worden.

Das hat sich im vorliegenden Falle sehr gut bewährt, wie der Vergleich mit der bekannten strengen Lösung ergab.

FIGURE 4

LITERATUR

- [1] AVA Monographs¹, C: Flows of Compressible Fluids. 6.1 W. TOLLMIE: *Passing the Velocity of Sound, Theoretical Investigations*. Reports and Translations No. 1000, M. A. P. Völkenrode, August 1948.
 - [2] AVA Monographs¹, C: Flows of Compressible Fluids. 4.1 M. SCHÄFER: *Method of Characteristics and Shock Waves*. Reports and Translations No. 995, M.A.P. Völkenrode, April 1948.
 - [3] R. SAUER: *Einführung in die theoretische Gasdynamik*. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg, 2. Aufl. 1951.
 - [4] AVA Monographs¹, C: Flows of Compressible Fluids. 3 E. KRAHN: *Steady Subsonic Flows*. Reports and Translations No. 994, M.A.P. Völkenrode, April 1948.
 - [5] F. REUTTER: *Eine ebene Potentialströmung in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit*. Ing.-Arch. **16** (1948), 299–306. *Über eine angenäherte quasilineare Potentialgleichung der ebenen kompressiblen Strömung und ihre mittels der Legendretransformation zu gewinnenden Lösungen* (Vortrag Deutsche Mathematikertagung Karlsruhe 1947; Vortragsauszug in Z. angew. Math. Mech. **25/27** (1947), 156–157).
 - [6] I. IMAI: *Application of the W. K. B. method to the flow of a compressible fluid*, I. J. Math. Phys. **28** (1949), 173–182.
 - [7] H. BEHRBOHM: *Näherungstheorie des unsymmetrischen Schalldurchgangs in einer Lavaldüse*. Z. angew. Math. Mech. **30** (1950), 101–112.
 - [8] K. OSWATITSCH: *Die Geschwindigkeitsverteilung bei lokalen Überschallgebieten an flachen Profilen*. Z. angew. Math. Mech. **30** (1950), 17–24.
 - [9] G. GUDERLEY & H. YOSHIHARA: *The flow over a wedge profile at Mach number 1*. Journ. Aero. Sci. **17** (1950), 723–750.
 - [10] P. MOLENBROEK: *Über einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials*. Arch. Math. Phys. 1890, **II**, 9, 157–195.
 - [11] C. A. TSCHAPLIGIN: *Über Gasstrahlen*. Wiss. Ann. Univ. Moskau, Phys. Math. Klasse **21** (1904), 1–121 (russisch); wieder abgedruckt in der vollständigen Ausgabe seiner Werke. Über diese Untersuchungen findet sich ein Bericht bei B. DEMTSCHENKO: *Sur la relation entre la dynamique des fluides compressibles et celle des fluides incompressibles*. Public. Math. Univ. Belgrade **2** (1933), 85–105.
 - [12] A. BUSEMANN: *Hodographenmethode der Gasdynamik*. Z. angew. Math. Mech. **17** (1937), 73–79.
 - [13] F. RINGLEB: *Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung*. Z. angew. Math. Mech. **20** (1940), 185–198.
 - [14] J. W. CRAGGS: *The compressible flow corresponding to a line doublet*. Quart. Appl. Math. **10** (1952), 88–93.
 - [15] W. TOLLMIE: *Grenzlinsen adiabatischer Potentialströmungen*. Z. angew. Math. Mech. **21** (1941), 140–152 und 308.
 - [16] M. J. LIGHTHILL: *The hodograph transformation in trans-sonic flow I–IV*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **191** (1947), 323–369; **192** (1947), 135–142.
 - [17] M. J. LIGHTHILL: *On the hodograph transformation for highspeed flow*. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. **1** (1948).
- zusammen mit
S. GOLDSTEIN & J. W. CRAGGS: p. 344–357, ferner p. 442–450.
- [18] M. J. LIGHTHILL: *Methods for Predicting Phenomena in the High-Speed Flow of Gases*. Journ. Aero. Sci. **16** (1949), 69–83. Dieses Referat enthält eine sehr ausführliche Literaturübersicht aus den letzten Jahren.
 - [19] T. M. CHERRY: *Flow of compressible fluid about a cylinder*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **192** (1947), 45–79.

¹ Die Monographien sollen durch das Ministry of Supply, Millbank, London SW 1, beziehbar sein.

- [20] T. M. CHERRY: *Relation between Bergman's and Chaplygin's Methods of Solving the Hodograph Equation*. Quart. Appl. Math. **9** (1951), 92–94.
- [21] S. BERGMAN: *Operatorenmethoden in der Gasdynamik*. Z. angew. Math. Mech. **32** (1952), 33–45.
- [22] H. S. TSIEN & Y. H. KUO: *Two-dimensional irrotational mixed subsonic and supersonic flow of a compressible fluid and the upper critical Mach Number*. NACA TN 995 (1946).
- [23] J. E. GARRICK & CARL KAPLAN: *On the Flow of a Compressible Fluid by the Hodograph Method. I Unification and Extension of Present-Day Results*. NACA Rep-No. 789 (1944). *II Fundamental Set of Particular Flow Solutions of the Chaplygin Differential Equation*. NACA Rep. No. 790 (1944).
- [24] S. TOMOTIKA & K. TAMADA: *Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids*, I, II, III. Quart. Appl. Math. **7**, 381–397, **8**, 127–136, **9**, 129–147 (1950).
- [25] K. TAMADA: *On the hodograph method and analytic continuation in the theory of compressible fluid*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto (A) **26** (1950), 21–30.
- [26] L. CROCCO: *Transforms of the hodograph flow equation and the introduction of two generalized potential functions*. NACA TN 2432, 81 pp. (August 1951).
- [27] J. W. CRAGGS: *The Breakdown of the Hodograph Transformation for irrotational Compressible Fluid Flow in Two Dimensions*. Proc. Camb. Phil. Soc. **44** (1948), 360–379.
- [28] R. TIMMAN: *Linearization of the equations of two-dimensional subsonic compressible flow by means of complex characteristics*. Proc. Seventh Int. Congress Appl. Mech. **4**, 28–42 (1948).
- [29] R. COURANT & D. HILBERT: *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. II. Verlag Springer Berlin 1937.
- [30] G. GUDERLEY: *Asymptotic representations for special solutions of the hodograph equations in two-dimensional compressible flow*. Ministry of Supply, 3 E/244. T, 32 pp. (PB 96095, Publ. Bd., Dept. Comm., Wash., D. C.)