Calcul de la Courbure au Sommet de l'Onde Attachée dans les Écoulements Plans non Stationnaires

HENRI CABANNES

Université d'Aix-Marseille

Communicated by A. LICHNEROWICZ

Introduction. Le calcul de la courbure au sommet de l'onde de choc attachée dans les écoulements plans stationnaires fut effectué pour la première fois par Crocco en 1937; le résultat paradoxal qui fut mis en évidence est le suivant: dans certains cas, l'onde de choc et l'obstacle possèdent des courbures au sommet de signes contraires. Depuis 1937, plusieurs auteurs ont étudié le comportement de l'onde de choc attachée au voisinage de son sommet; les conclusions de Crocco ont été étendues à toutes les dérivées de la courbure et également aux écoulements de révolution. A notre connaissance, personne n'a envisagé le cas des écoulements non stationnaires. Une telle étude semble cependant s'imposer puisque les divers résultats qui ont été obtenus à la suite de Crocco sont liés au phénomène de détachement de l'onde (transformation de l'onde attachée en onde détachée); ce phénomène est essentiellement un phénomène non stationnaire.

Cette considération nous a amenés à reprendre l'étude de l'onde attachée dans les écoulements non stationnaires. Nous nous sommes proposé de traiter pour commencer un problème plan. Un obstacle présentant une pointe est placé dans un courant supersonique permanent uniforme; on se place uniquement dans le cas d'une onde de choc attachée; nous avons déterminé les variations au cours du temps de la tangente au sommet et de la courbure au sommet de l'onde de choc. Lorsque l'obstacle est immobile, on retrouve naturellement les résultats de Crocco; lorsque l'obstacle n'est pas immobile, on peut, dans chaque position, obtenir n'importe quelle valeur (positive ou négative) pour le rapport des courbures au sommet du choc et de l'obstacle; il suffit de donner à la vitesse angulaire de rotation de l'obstacle une valeur convenable. Deux positions de l'obstacle font exception: celle qui correspond à l'angle de

Crocco et celle qui correspond à l'angle maximum; dans ce dernier cas, l'onde attachée, supposée analytique, possède toujours une courbure au sommet infinie. Il n'en était pas ainsi dans les écoulements stationnaires; il avait alors fallu introduire les ondes de choc non analytiques pour obtenir ce résultat qui semble nécessaire du point de vue physique.

Nous partagerons notre étude en trois parties. Dans la première, nous étudierons les équations des écoulements plans non stationnaires; dans la seconde, nous calculerons la valeur du rayon de courbure de l'onde de choc en son sommet; dans la troisième partie, nous indiquerons comment varie ce rayon de courbure en fonction de la vitesse angulaire et de la position de l'obstacle lorsque le nombre de Mach de l'écoulement amont est donné.

I. Solution des équations du mouvement. Nous rapportons l'espace à des axes de coordonnées rectangulaires fixes Ox et Oy . Nous désignons par u et v les composantes du vecteur vitesse sur Ox et Oy , par ρ et p la densité et la pression, par k le rapport des chaleurs spécifiques du fluide; nous adopterons la valeur $k = 7/5$. Nous introduisons les coordonnées polaires r et θ telles que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Les quatre fonctions u , v , ρ et p dépendent des deux variables r et θ et aussi du temps t . Si on utilise ces variables qui sont plus particulièrement adaptées à l'étude du mouvement dans le voisinage d'un point, les équations du mouvement du fluide s'écrivent de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 & u_t + u \left(u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) + v \left(u_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{\rho} \left(p_r \cos \theta - p_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) = 0, \\
 & v_t + u \left(v_r \cos \theta - v_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) + v \left(v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{\rho} \left(p_r \sin \theta + p_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right) = 0, \\
 & \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + u \left\{ \left(\frac{1}{\rho} \right)_r \cos \theta - \left(\frac{1}{\rho} \right)_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right\} + v \left\{ \left(\frac{1}{\rho} \right)_r \sin \theta + \left(\frac{1}{\rho} \right)_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right\} \\
 & \quad = \frac{1}{\rho} \left\{ u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r} + v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right\}, \\
 & \left(\frac{p}{\rho^k} \right)_t + u \left\{ \left(\frac{p}{\rho^k} \right)_r \cos \theta - \left(\frac{p}{\rho^k} \right)_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right\} + v \left\{ \left(\frac{p}{\rho^k} \right)_r \sin \theta + \left(\frac{p}{\rho^k} \right)_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right\} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Les deux premières équations traduisent la loi fondamentale de la dynamique (égalité entre la force et le produit de la masse par l'accélération); la troisième équation exprime la conservation de la masse et la quatrième le caractère adiabatique de l'écoulement. Puisque nous voulons étudier l'écoulement seulement au

voisinage du point O , il est naturel de développer les fonctions inconnues suivant les puissances de la variable r ; nous posons

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{c}\{u_0(\theta, t) + ru_1(\theta, t) + \dots\}, \\
 v &= \bar{c}\{v_0(\theta, t) + rv_1(\theta, t) + \dots\}, \\
 (2) \quad \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\bar{\rho}}\{\alpha_0(\theta, t) + r\alpha_1(\theta, t) + \dots\}, \\
 p &= \bar{p}\{p_0(\theta, t) + rp_1(\theta, t) + \dots\}.
 \end{aligned}$$

Les quantités $\bar{c}$, $\bar{\rho}$ et $\bar{p}$ désignent la célérité du son, la densité et la pression dans un écoulement uniforme.

Détermination des fonctions d'indice 0. En portant les développements précédents dans les équations (1), on obtient une suite infinie d'équations aux dérivées partielles dans lesquelles interviennent seulement les variables θ et t . Pour les fonctions d'indice 0, ces équations sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{5}{7} \alpha_0 \sin \theta \frac{\partial p_0}{\partial \theta} &= 0, \\
 (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{5}{7} \alpha_0 \cos \theta \frac{\partial p_0}{\partial \theta} &= 0, \\
 (3) \quad (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) \frac{\partial \alpha_0}{\partial \theta} - \alpha_0 \left(\sin \theta \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) &= 0, \\
 (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (p_0 \alpha_0^{\frac{1}{2}}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Par combinaison des équations (3), on obtient l'équation suivante:

$$(4) \quad [\alpha_0 p_0 - (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta)^2] \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = 0.$$

L'équation (4) se décompose en deux équations. En annulant le facteur $\partial p_0 / \partial \theta$, on obtient, pour le système (3), la solution suivante, qui contient quatre fonctions arbitraires du temps:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad u_0(\theta, t) &= u_0(t), & \alpha_0(\theta, t) &= \alpha_0(t), \\
 v_0(\theta, t) &= v_0(t), & p_0(\theta, t) &= p_0(t).
 \end{aligned}$$

En annulant le facteur $\alpha_0 p_0 - (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta)^2$, on obtient, à partir du système (3), les deux équations

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) - \frac{1}{8} (u_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (u_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta) + (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) = 0.$$

La solution (5) représente, à chaque instant, un écoulement uniforme; la solution des équations (6) représente, à chaque instant, une détente de Prandtl-Meyer. Nous n'envisageons dans ce travail que les mouvements pour lesquels les fonctions d'indice 0 sont données par les formules (5).

Détermination des fonctions d'indice 1. En poursuivant l'identification qui nous a permis d'obtenir les équations (3), on établit que les fonctions d'indice 1 doivent vérifier le système suivant:

$$(7) \quad \begin{aligned} & u_0 \left(u_1 \cos \theta - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) + v_0 \left(u_1 \sin \theta + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) \\ & \quad + \frac{5}{7} \alpha_0 \left(p_1 \cos \theta - \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{u'_0}{\bar{c}} = 0, \\ & u_0 \left(v_1 \cos \theta - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) + v_0 \left(v_1 \sin \theta + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) \\ & \quad + \frac{5}{7} \alpha_0 \left(p_1 \sin \theta + \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) + \frac{v'_0}{\bar{c}} = 0, \\ & u_0 \left(\alpha_1 \cos \theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) + v_0 \left(\alpha_1 \sin \theta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) + \frac{\alpha'_0}{\bar{c}} \\ & \quad - \alpha_0 \left(u_1 \cos \theta - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \sin \theta + v_1 \sin \theta + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) = 0, \\ & \frac{1}{\bar{c}} \left(\frac{p'_0}{p_0} - \frac{7}{5} \frac{\alpha'_0}{\alpha_0} \right) + (u_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta) \left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{7}{5} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \\ & \quad - (u_0 \sin \theta - v_0 \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{7}{5} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Les équations (7) forment un système linéaire dans lequel les dérivées par rapport au temps des fonctions inconnues ne figurent pas. Ce système peut donc être intégré comme un système d'équations différentielles; nous allons expliciter sa solution générale. L'élimination de la fonction α_1 entre les deux dernières équations (7) donne le résultat suivant:

$$(8) \quad \begin{aligned} & u_1 \cos \theta - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \sin \theta + v_1 \sin \theta + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{5}{7} \frac{1}{\bar{c}} \frac{p'_0}{p_0} \\ & \quad + \frac{5}{7} \frac{u_0}{p_0} \left(p_1 \cos \theta - \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{5}{7} \frac{v_0}{p_0} \left(p_1 \sin \theta + \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) = 0. \end{aligned}$$

L'élimination des deux fonctions p_1 et $\partial p_1/\partial\theta$ entre les deux premières équations (7) et l'équation (8) permet d'écrire la nouvelle équation suivante:

$$(9) \quad \left(u_1 \cos \theta - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \sin \theta\right) \left(1 - \frac{u_0^2}{\alpha_0 p_0}\right) + \left(v_1 \sin \theta + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{v_0^2}{\alpha_0 p_0}\right) \\ - \left(u_1 \sin \theta + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \cos \theta + v_1 \cos \theta - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \sin \theta\right) \frac{u_0 v_0}{\alpha_0 p_0} \\ + \frac{1}{\bar{c}} \left(\frac{5}{7} \frac{p_0'}{p_0} - \frac{u_0 u_0' + v_0 v_0'}{\alpha_0 p_0}\right) = 0.$$

Les deux premières équations (7) permettent de calculer p_1 et $\partial p_1/\partial\theta$; en comparant la dérivée de p_1 avec la valeur obtenue pour $\partial p_1/\partial\theta$, on obtient

$$(10) \quad \cos \theta \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1\right) + \sin \theta \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + v_1\right) = 0.$$

Les équations (9) et (10) qui contiennent seulement les fonctions inconnues u_1 et v_1 déterminent ces fonctions. En dérivant l'équation (9), on obtient le système suivant, conséquence du système (7):

$$(11) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + v_1 = 0.$$

Il en résulte que les fonctions $u_1(\theta, t)$ et $v_1(\theta, t)$ possèdent la forme suivante:

$$(12_1) \quad u_1(\theta, t) = \lambda_1(t) \cos \theta + \lambda_2(t) \sin \theta,$$

$$(12_2) \quad v_1(\theta, t) = \mu_1(t) \cos \theta + \mu_2(t) \sin \theta.$$

Les quatre fonctions du temps $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 ne sont pas indépendantes puisque nous avons dû effectuer au cours du calcul des dérivations par rapport à la variable θ .

En écrivant que l'équation (9) est vérifiée, on obtient la relation suivante:

$$(13) \quad \left(1 - \frac{u_0^2}{\alpha_0 p_0}\right) \lambda_1 - \frac{u_0 v_0}{\alpha_0 p_0} (\lambda_2 + \mu_1) + \left(1 - \frac{v_0^2}{\alpha_0 p_0}\right) \mu_2 \\ = \frac{1}{\bar{c}} \left(\frac{u_0 u_0' + v_0 v_0'}{\alpha_0 p_0} - \frac{5}{7} \frac{p_0'}{p_0}\right).$$

La fonction $p_1(\theta, t)$ se calcule à l'aide des deux premières équations (7); on obtient le résultat suivant:

$$(12_3) \quad \frac{5}{7} \alpha_0 p_1 + \cos \theta \left(u_0 \lambda_1 + v_0 \lambda_2 + \frac{u_0'}{\bar{c}}\right) + \sin \theta \left(u_0 \mu_1 + v_0 \mu_2 + \frac{v_0'}{\bar{c}}\right) = 0.$$

On établit enfin, par dérivation de la troisième équation (7), que la fonction $\alpha_1(\theta, t)$ possède la forme

$$(12_4) \quad \alpha_1(\theta, t) = v_1(t) \cos \theta + v_2(t) \sin \theta,$$

avec

$$v_1 u_0 + v_2 v_0 + \frac{\alpha_0'}{\bar{c}} = \alpha_0(\lambda_1 + \mu_2).$$

Le système (7) est entièrement résolu; la solution générale représentée par les équations (12) dépend de quatre fonctions arbitraires du temps.

II. Écoulement autour d'un obstacle. Les équations (5) et (12) déterminent le mouvement du fluide au voisinage d'un point O dans le cas le plus général qui puisse se présenter. Nous allons appliquer ces résultats à l'étude d'un cas particulier.

Nous considérons un obstacle présentant une pointe en un point O et mobile autour du point O (Figure 1). Nous désignons par S_1 et S_2 les deux arcs de courbe aboutissant au point O et limitant l'obstacle. Un courant supersonique uniforme arrive de l'infini amont. Une onde de choc limite la région dans laquelle l'écoulement est uniforme; nous supposons que l'onde est attachée à la pointe de l'obstacle et nous désignons par W_1 et W_2 les deux arcs de courbe qui la constituent. Nous désignons par $\bar{q}$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ et $\bar{c}$ la vitesse, la densité, la pression et la célérité du son dans l'écoulement avant le choc¹. Nous choisissons l'axe Ox parallèle à la vitesse amont et de même sens, l'axe Oy est directement perpendiculaire à Ox . Nous écrirons les équations de l'arc S_1 de l'obstacle et de l'arc correspondant W_1 de l'onde de choc à l'aide des coordonnées polaires sous la forme suivante:

$$\theta = \omega(t) + f(r) \quad \text{pour l'obstacle,}$$

$$\theta = F(r, t) \quad \text{pour l'onde de choc.}$$

Nous supposons que $f(0)$ est nul, ce qui est toujours possible, et que $f'(0)$ n'est ni nul, ni infini; nous poserons $f'(0) = -\frac{1}{2}\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ désigne ainsi le rayon de courbure au point O de l'arc S_1 ; $\mathcal{R}$ est positif lorsque cet arc est convexe vers l'amont. L'écoulement est déterminé par les équations que nous avons établies au paragraphe précédent et par les deux conditions suivantes: 1° contourner l'obstacle; 2° vérifier les équations du choc. Nous allons expliciter ces deux conditions.

Condition sur l'obstacle. Le fluide glisse sur l'obstacle. Si nous désignons par V_1 l'angle de la tangente à l'obstacle avec le rayon vecteur, la vitesse du fluide a pour composante sur la normale

$$-u \sin(\theta + V_1) + v \cos(\theta + V_1).$$

¹ Les trois constantes $\bar{c}$, ρ et $\bar{p}$ introduites dans les formules (2) possèdent désormais les valeurs que nous venons de définir.

La vitesse normale à l'obstacle a pour valeur $r(d\omega/dt) \cos V_1$. En égalant les deux valeurs et en remplaçant $\tan V_1$ par $r df/dr$, on peut écrire la condition sur l'obstacle de la façon suivante:

$$(14) \quad -u \sin \theta + v \cos \theta = r[\omega'(t) + f'(r)(u \cos \theta - v \sin \theta)].$$

FIGURE 1

FIGURE 2

Dans l'équation (14), l'angle θ a pour valeur $\omega(t) + f(r)$; on peut remplacer u et v par leurs expressions (2) et identifier suivant les puissances de r . On obtient les relations successives suivantes:

$$(15_1) \quad -u_0(t) \sin \omega + v_0(t) \cos \omega = 0,$$

$$(15_2) \quad -u_1(w, t) \sin \omega + v_1(w, t) \cos \omega = \omega'(t) - \frac{u_0 \cos \omega + v_0 \sin \omega}{R},$$

$$\vdots$$

Conditions sur l'onde de choc. Dans un écoulement non stationnaire, le nombre de Mach M est le quotient de la vitesse de déplacement de l'onde de choc par rapport au fluide par la célérité du son avant le choc. On peut donc écrire

$$(16) \quad M = \frac{\bar{q} \sin \beta + r \frac{\partial F}{\partial t} \cos V_2}{\bar{c}}$$

avec $\beta = \theta + V_2, \quad \tan V_2 = r \frac{\partial F}{r \partial r}.$

Les équations du choc sont les suivantes:

$$\begin{aligned} u \cos \beta + v \sin \beta &= \bar{q} \cos \beta, \\ (17) \quad -u \sin \beta + v \cos \beta + \bar{q} \sin \beta &= \bar{c} \frac{5}{8} \left(M - \frac{1}{M} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{p}}{\rho} = \frac{5}{8} \frac{1}{M^2} + \frac{1}{8}, \quad \frac{p}{\bar{p}} = \frac{7}{8} M^2 - \frac{1}{8}.$$

Dans les équations (17), l'angle θ a pour valeur $F(r, t)$. Nous posons

$$F(r, t) = F_0(t) + rF_1(t) + \dots$$

et nous identifions les équations de choc suivant les puissances de r . Nous obtenons les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (18) \quad u_0 + v_0 \tan F_0 &= \frac{\bar{q}}{\bar{c}}, \\ -u_0 \sin F_0 + v_0 \cos F_0 + \frac{\bar{q}}{\bar{c}} \sin F_0 &= \frac{5}{8} \left[\frac{\bar{q}}{\bar{c}} \sin F_0 - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \frac{1}{\sin F_0} \right], \\ \alpha_0 &= \frac{5}{8} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 F_0} + \frac{1}{8}, \\ p_0 &= \frac{7}{8} \left(\frac{\bar{q}}{\bar{c}} \right)^2 \sin^2 F_0 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (19) \quad u_1 \cos F_0 + v_1 \sin F_0 &= 2F_1 \left[\left(u_0 - \frac{\bar{q}}{\bar{c}} \right) \sin F_0 - v_0 \cos F_0 \right], \\ -u_1 \sin F_0 + v_1 \cos F_0 &= \frac{5}{8} \left[1 + \frac{\bar{c}^2}{\bar{q}^2} \frac{1}{\sin^2 F_0} \right] \frac{2\bar{q}F_1 \cos F_0 + F_0'}{\bar{c}}, \\ \alpha_1 &= -\frac{5}{8} \frac{\bar{c}^2}{\bar{q}^2} \frac{2\bar{q}F_1 \cos F_0 + F_0'}{\bar{q} \sin^3 F_0}, \\ p_1 &= \frac{7}{8} \frac{\bar{q}}{\bar{c}} \sin F_0 \frac{2\bar{q}F_1 \cos F_0 + F_0'}{\bar{c}}. \end{aligned}$$

Si l'écoulement était supposé stationnaire, les équations (18) et la condition (15₁) ne seraient pas modifiées, par contre les équations (19) et la condition (15₂) dépendent du mouvement de l'obstacle par l'intermédiaire du terme $\omega'(t)$.

Les équations (18) et la condition (15₁) permettent de déterminer en fonction des données $\bar{M} = \bar{q}/\bar{c}$ et ω les cinq quantités suivantes: $F_0(t)$, $u_0(t)$, $v_0(t)$, $\alpha_0(t)$ et $p_0(t)$. Les résultats sont bien connus, ils peuvent être écrits de la façon suivante:

$$(20) \quad 6 \tan (F_0 - \omega) = \tan F_0 + \frac{1}{\bar{M}^2} \frac{5}{\sin F_0 \cos F_0};$$

$$(21) \quad \begin{aligned} u_0 &= \bar{M} \frac{\cos F_0 \cos \omega}{\cos (F_0 - \omega)}, & v_0 &= \bar{M} \frac{\cos F_0 \sin \omega}{\cos (F_0 - \omega)}, \\ \alpha_0 &= \frac{\tan (F_0 - \omega)}{\tan F_0}, & p &= \frac{6 \tan F_0 - \tan (F_0 - \omega)}{6 \tan (F_0 - \omega) - \tan F_0}. \end{aligned}$$

La correspondance entre les angles F_0 et ω est représentée pour mémoire sur la figure 2. En dérivant la relation (20) par rapport au temps, on obtient

$$(22) \quad \omega'(t) = \left[1 - \frac{\cos^2 (F_0 - \omega)}{3} - \sin (F_0 - \omega) \cos (F_0 - \omega) (\tan F_0 - \omega \tan F_0) \right] F_0'(t).$$

Nous écrivons ensuite que les fonctions d'indice 1, écrites sous la forme indiquée dans les équations (12), vérifient les équations (19) et la condition (15₂). On détermine de cette façon les valeurs des sept quantités suivantes: $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $F_1(t)$. Cette dernière fonction du temps est égale à $-1/2R(t)$ où $R(t)$ désigne le rayon de courbure de l'onde de choc au point O sur l'arc W_1 ; ce rayon de courbure est positif lorsque l'onde de choc est convexe vers l'amont. Nous écrivons les deux premières et la dernière des équations (19) la condition (15₂) et la relation (13) de la façon suivante:

$$(23) \quad \begin{aligned} \lambda_1 \cos^2 F_0 + \lambda_2 \sin F_0 \cos F_0 + \mu_1 \sin F_0 \cos F_0 + \mu_2 \sin^2 F_0 &= A, \\ -\lambda_1 \cos F_0 \sin F_0 - \lambda_2 \sin^2 F_0 + \mu_1 \cos^2 F_0 + \mu_2 \sin F_0 \cos F_0 &= B, \\ \lambda_1 \cos F_0 \cos \omega + \lambda_2 \cos F_0 \sin \omega + \mu_1 \sin F_0 \cos \omega + \mu_2 \sin F_0 \sin \omega &= C \\ -\lambda_1 \sin \omega \cos \omega - \lambda_2 \sin^2 \omega + \mu_1 \cos^2 \omega + \mu_2 \sin \omega \cos \omega &= D, \\ \lambda_1 \left(1 - \frac{u_0^2}{\alpha_0 p_0} \right) - \lambda_2 \frac{u_0 v_0}{\alpha_0 p_0} - \mu_1 \frac{u_0 v_0}{\alpha_0 p_0} + \mu_2 \left(1 - \frac{v_0^2}{\alpha_0 p_0} \right) &= E. \end{aligned}$$

En tenant compte des équations (20) et (21), on obtient, pour les seconds membres, les expressions suivantes:

$$(24) \quad \begin{aligned} A &= 2\bar{M}[\tan (F_0 - \omega) - \tan F_0]F_1 \cos F_0, \\ B &= \frac{5}{8} \left[1 - \frac{1}{\bar{M}^2 \sin^2 F_0} \right] \left(2\bar{M}F_1 \cos F_0 + \frac{F_0'}{\bar{c}} \right), \\ C &= -\frac{1}{3}\bar{M}F_1 \cos F_0 \sin (F_0 - \omega) - \frac{8}{3} \frac{F_0'}{\bar{c}} \sin (F_0 - \omega) \\ &\quad + \frac{F_0'}{\bar{c}} \tan F_0 \cos (F_0 - \omega) \\ D &= \frac{\omega'}{\bar{c}} - \frac{\bar{M}}{8} \frac{\cos F_0}{\cos (F_0 - \omega)}, \\ E &= \frac{1}{\bar{c}} \left(\frac{u_0 u_0' + v_0 v_0'}{\alpha_0 p_0} - \frac{5}{7} \frac{p_0'}{p_0} \right). \end{aligned}$$

L'élimination des quantités λ_1 , λ_2 , μ_1 et μ_2 entre les équations (23) donne la relation suivante:

$$(25) \quad A\delta_1 - B\delta_2 + C\delta_3 - D\delta_4 + E\delta_5 = 0.$$

Les coefficients δ sont proportionnels aux déterminants d'ordre quatre construits à l'aide des coefficients de λ_1 , λ_2 , μ_1 et μ_2 dans les équations (23). On obtient

$$(26) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= -\delta_5 = \sin(F_0 - \omega) \cos(F_0 - \omega), \\ \delta_2 &= -\cos^2(F_0 - \omega), \\ \delta_3 &= \sin(F_0 - \omega) - \frac{5}{\cos(F_0 - \omega)} \frac{1}{6 \tan F_0 - \tan(F_0 - \omega)}, \\ \delta_4 &= 6 \frac{\tan F_0 - \tan(F_0 - \omega)}{6 \tan F_0 - \tan(F_0 - \omega)}. \end{aligned}$$

En remplaçant les coefficients δ par leurs valeurs, on peut écrire l'équation (25) sous la forme définitive suivante:

$$(27) \quad \frac{R(t)}{\mathcal{R}} = \frac{f[\omega(t), \bar{M}]}{1 + \frac{\mathcal{R}\omega'(t)}{\bar{c}} g[\omega(t), \bar{M}] }.$$

Les fonctions f et g dépendent seulement du nombre de Mach dans l'écoulement amont et de la position de l'obstacle; le mouvement propre de l'obstacle intervient par l'intermédiaire de la qualité $\mathcal{R}\omega'(t)/\bar{c}$.

III. Etude de la courbure de l'onde de choc. Le rayon de courbure de l'onde de choc en son sommet est déterminé par la formule (27); lorsque l'obstacle tourne autour de son sommet, ce rayon de courbure varie au cours du temps. Nous nous proposons d'étudier ces variations.

Les valeurs de la fonction $f(\omega, \bar{M})$ ont déjà été calculées²; elles correspondent au cas des écoulements stationnaires pour lesquels $\omega'(t)$ est nul. Ces valeurs sont représentées sur la figure 3 pour $\bar{M} = 2$. Lorsque $\bar{M}$ est donné, la fonction $f(\omega, \bar{M})$ est définie dans un intervalle $0 \leq \omega \leq \omega_m$; la limite supérieure est fonction de $\bar{M}$: c'est l'angle limite, au delà duquel l'onde de choc est détachée. La fonction f possède deux déterminations, la plus grande des deux correspond au choc faible, c'est le seul qui possède une réalité physique dans le problème que nous envisageons actuellement. Cette détermination est une fonction décroissante de ω ; elle est infinie positive pour la valeur $\omega = 0$; elle possède une valeur finie négative lorsque ω est égal à l'angle limite; elle s'annule donc pour une valeur particulière $\omega = \omega_c$, appelée angle de Crocco.

Les valeurs de la fonction $g(\omega, \bar{M})$ se déduisent des calculs effectués au cours

² Voir en particulier les références suivantes: [1], [2], [5].

du paragraphe précédent; nous n'avons pas déterminé l'expression littérale de la fonction g , mais nous avons calculé ses valeurs numériques dans le cas où l'on a $\bar{M} = 2$. La fonction $g(\omega, \bar{M})$ est définie dans l'intervalle $0 \leq \omega \leq \omega_m$; elle possède deux déterminations. La plus grande détermination, représentée sur la figure 4, correspond au choc faible; elle est toujours positive; elle possède un minimum g^* ; elle est infinie pour $\omega = 0$ et $\omega = \omega_m$.

Les fonctions f et g étant connues, il est facile d'indiquer les variations du rayon de courbure de l'onde de choc en son sommet. Nous supposons un obstacle convexe vers l'amont; $\mathcal{R}$ est alors positif.

FIGURE 3

FIGURE 4

Etude du signe de la courbure du choc. Lorsque l'angle $\omega(t)$ augmente, le dénominateur $1 + \mathcal{R}\omega'g/\bar{c}$ est positif et supérieur à l'unité. Le rayon de courbure du choc au point O , soit $R(t)$, possède donc le même signe que dans l'écoulement stationnaire qui correspond à la même position de l'obstacle. La rotation de l'obstacle autour de sa pointe a pour effet d'accentuer la courbure du choc.

Lorsque l'angle $\omega(t)$ diminue avec une grande vitesse angulaire

$$\mathcal{R}\omega'/\bar{c} < -1/g^*,$$

le dénominateur $1 + \mathcal{R}\omega'g/\bar{c}$ est négatif. Le rayon de courbure $R(t)$ possède, dans l'écoulement stationnaire et dans l'écoulement non stationnaire correspondant, des signes opposés.

Lorsque l'angle $\omega(t)$ diminue avec une faible vitesse angulaire

$$0 > \mathcal{R}\omega'/\bar{c} > -1/g^*,$$

le dénominateur $1 + \mathcal{R}\omega'g/\bar{c}$ est négatif pour les valeurs de ω voisines de O ou de ω_m ; il est positif pour les autres valeurs de ω . Ce dénominateur s'annule pour deux valeurs particulières; la plus petite est inférieure à l'angle de Crocco; la plus grande peut être soit inférieure, soit supérieure à cet angle sui-

FIGURE 5

$\frac{\mathcal{R}\omega'}{\bar{c}}$ positif	Courbe en pointillé
négatif ou nul	Courbes en trait plein
supérieur à la valeur exceptionnelle	courbe A
égal à la valeur exceptionnelle	courbe B
inférieur à la valeur exceptionnelle	courbe C

vant la vitesse angulaire de rotation. On obtient donc, pour le signe du rayon de courbure $R(t)$, diverses possibilités.

Etude des positions particulières de l'obstacle. Lorsque l'angle $\omega(t)$ est nul, les fonctions f et g sont infinies, mais leur quotient possède une valeur finie. Il en résulte que le rayon de courbure $R(t)$ possède une valeur finie, sauf dans l'écoulement stationnaire.

Lorsque l'angle $\omega(t)$ est égal à l'angle de Crocco, la fonction $f(\omega, \bar{M})$ est nulle; le dénominateur $1 + \mathcal{R}\omega'g/\bar{c}$ est en général différent de zéro. Il en résulte que la position de l'obstacle pour laquelle le rayon de courbure $R(t)$ de l'onde de

choc s'annule est indépendante du mouvement de l'obstacle. Il existe une valeur exceptionnelle du rapport $\mathcal{R}\omega'/\bar{c}$ pour laquelle le dénominateur $1 + \mathcal{R}\omega'g/\bar{c}$ est nul lorsque l'angle $\omega(t)$ est égal à l'angle de Crocco; le quotient $R(t)/\mathcal{R}$ est alors différent de zéro. Ce cas exceptionnel est représenté par la courbe B de la figure 5.

Lorsque l'angle $\omega(t)$ est égal à l'angle limite, la fonction g est infinie tandis que la fonction f est bornée. Il en résulte que, pour tous les écoulements non stationnaires dans lesquels $\omega'(t)$ est différent de zéro, $R(t)$ est nul. Dans l'écoulement stationnaire, le rapport $R/\mathcal{R}$ est négatif.

Les variations du rapport $R(t)/\mathcal{R}$ en fonction de l'angle $\omega(t)$ sont représentées sur la figure 5. Nous avons adopté la valeur $\bar{M} = 2$; nous avons indiqué plusieurs courbes correspondant à diverses valeurs du paramètre $\mathcal{R}\omega'/\bar{c}$. L'angle ω_c est l'angle de Crocco, l'angle ω_m l'angle limite.

Conclusion. L'étude que nous venons de terminer avait été entreprise dans l'espoir d'apporter quelque lumière sur le paradoxe de la courbure du choc et sur le phénomène du détachement (transformation de l'onde attachée en onde détachée). Nous n'avons pas élucidé ce phénomène de façon définitive, cependant deux résultats méritent d'être notés. Le premier est l'existence d'un angle, indépendant de la vitesse angulaire de rotation de l'obstacle, pour lequel le rayon de courbure de l'onde de choc en son sommet $R(t)$ est nul; cet angle est celui qui avait été trouvé par Crocco dans les écoulements stationnaires. Le second résultat est relatif au comportement de l'onde de choc pour l'angle limite: la valeur de $R(t)$ est alors nulle; autrement dit, l'onde de choc attachée possède à l'instant où elle se détache une courbure au sommet infinie. Ce résultat qui semble indispensable du point de vue physique n'était pas vérifié dans les calculs de Crocco; Guderley avait été amené, pour le retrouver, à établir l'existence d'ondes de choc stationnaires non analytiques. Il n'est plus nécessaire d'opérer ainsi dans les écoulements non stationnaires.

Le problème que nous venons de traiter ne constitue qu'un cas particulier, mais il est facile de traiter par la même méthode d'autres questions; la solution que nous avons donnée dans la première partie est en effet générale. On pourra par exemple étudier l'évolution de l'onde attachée dans le cas où, l'obstacle étant fixe, l'écoulement avant le choc possède une vitesse de direction constante mais de grandeur variable.³ On pourra également envisager un obstacle terminé par un segment rectiligne; et reprendre en écoulement non stationnaire la théorie des ondes de choc non analytiques.

Il conviendrait également de traiter le cas des écoulements de révolution.

L'étude que nous venons d'achever a fait l'objet d'une communication au Huitième Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée à Istamboul, le 25 août 1952; elle fut entreprise sous contrat pour l'Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques à Paris.

³J'ai traité depuis ce dernier cas dans le rapport 4/1483 A effectué pour le compte de l'ONERA.

BIBLIOGRAPHIE

Écoulements plans stationnaires.

Calcul de la courbure au sommet de l'onde de choc attachée.

1. CROCCO, L. Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro. *L'Aerotecnica* **17** p. 519-534 (1937).
2. THOMAS, T. Y. Calculation of the curvature of attached shock waves. *Journal of Mathematics and Physics* **27** p. 279-297 (1949).

Étude des dérivées successives de la courbure.

3. CABANNES, H. Étude de la singularité au sommet d'une onde de choc attachée, dans un écoulement à deux dimensions. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* **229** p. 923-925 (1949).
 4. THOMAS, T. Y. The distribution of singular shock directions. *Journal of Mathematics and Physics* **28** p. 153-172 (1949).
 5. CABANNES, H. Contribution à l'étude théorique des fluides compressibles. Thèse. Paris 1950. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **69** p. 1-63 (en particulier chap. IV).
- Étude des ondes de choc non analytiques.
6. GUDERLEY, K. G. Considerations of the structure of mixed subsonic-supersonic flow patterns. *Technical Report. Project H. A.* **219** (1947).
 7. CABANNES, H. Détermination de l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe est subsonique. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* n° **250** p. 181-195 (1951).

Écoulements de révolution stationnaires.

Calcul de la courbure au sommet de l'onde de choc attachée.

8. CABANNES, H. Étude de la courbure au sommet de l'onde de choc attachée dans un écoulement de révolution. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* **232** p. 481-483 (1951).
9. SHEN, S. F. & LIN, C. C. On the Attached curved Shock in Front of a Sharp-nosed axially symmetrical Body placed in a uniform Stream. *National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note* **2505** (1951).

Étude des ondes de choc non analytiques.

10. CABANNES, H. Étude de l'onde de choc attachée dans les écoulements de révolution. *La Recherche Aéronautique* n° **27** p. 7-16 (1952).